ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 514.712.2

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ХАУСДОРФОВА ОТКЛОНЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ В $\mathbb{R}^2$ ОТ ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ С КРУГАМИ[1]

М. В. Першаков

Изучается задача, относящаяся к вычислению хаусдорфова отклонения выпуклых многоугольников в $\mathbb{R}^2$ от их геометрической разности с кругами достаточно малого радиуса. Задачи с такой тематикой, в которых рассматриваются не только выпуклые многоугольники, но и выпуклые компакты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, возникают в различных областях математики, и в частности в теории дифференциальных игр, теории управления, выпуклом анализе. Оценки хаусдорфовых отклонений выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ от их геометрической разности с замкнутыми шарами в $\mathbb{R}^n$ присутствуют в работах Л. С. Понтрягина, его сотрудников и коллег. Эти оценки весьма существенны при выводе оценки рассогласования альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования и альтернированных сумм. Аналогичные оценки оказываются полезными при выводе оценки рассогласования множеств достижимости нелинейных управляемых систем в $\mathbb{R}^n$ и аппроксимирующих их множеств. В работе рассмотрен выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$. Получена формула для вычисления хаусдорфова отклонения многоугольника от его геометрической разности с кругом в $\mathbb{R}^2$, радиус которого меньше минимального из радиусов кругов, вписанных в трёхзвенники многоугольника Ф.

Ключевые слова: выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$, хаусдорфово отклонение, круг, геометрическая разность множеств.

M. V. Pershakov. On the calculation of the Hausdorff deviation of convex polygons in $\mathbb{R}^2$ from their geometric difference with disks.

We study a problem concerning the calculation of the Hausdorff deviation of convex polygons in $\mathbb{R}^2$ from their geometric difference with disks of sufficiently small radius. Problems of this kind, in which not only convex polygons but also convex compact sets in Euclidean space $\mathbb{R}^n$ are considered, arise in various fields of mathematics, in particular, in the theory of differential games, control theory, and convex analysis. Estimates of the Hausdorff deviations of convex compact sets in $\mathbb{R}^n$ from their geometric difference with closed balls in $\mathbb{R}^n$ are found in the works of L.S. Pontryagin and his colleagues. These estimates are essential in deriving an estimate for the discrepancy between Pontryagin's alternating integral in linear differential games of pursuit and alternating sums. Similar estimates turn out to be useful in deriving an estimate for the discrepancy between reachable sets of nonlinear control systems in $\mathbb{R}^n$ and the sets approximating them. The paper considers a convex polygon in $\mathbb{R}^2$. We derive a formula for the Hausdorff deviation of the polygon from its geometric difference with a disk in $\mathbb{R}^2$ whose radius is less than the smallest of the radii of the circles inscribed in the three-links of the polygon.

Keywords: convex polygon in $\mathbb{R}^2$, Hausdorff deviation, disk, geometric difference of sets.

MSC: 11H16, 28A78

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-209-217

Введение

В работе изучается задача, относящаяся к вычислению хаусдорфова отклонения выпуклых многоугольников в пространстве $\mathbb{R}^2$ от их геометрической разности с достаточно малыми шарами в $\mathbb{R}^2$. Задачи такого рода возникают в различных областях математики, и в том числе в выпуклом анализе, теории управления, теории дифференциальных игр. Так, оценки хаусдорфовых отклонений выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ от шаров в $\mathbb{R}^n$ достаточно малого радиуса применяются в работах Л. С. Понтрягина и его сотрудников при оценке рассогласований альтернированного интеграла и аппроксимирующих его альтернированных сумм [1–8]. Такого же

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

рода оценки и при аналогичных условиях на компакт в $\mathbb{R}^n$ используются в недавней работе В. Н. Ушакова и автора[2], составляя важное звено при выводе двусторонних оценок множеств достижимости нелинейных управляемых систем в $\mathbb{R}^n$. При этом в качестве компактов в $\mathbb{R}^n$, задействованных в оценках геометрической разности, рассматриваются выпуклые оболочки вектограмм скоростей управляемых систем. При определенных ограничениях на степень вытянутости этих выпуклых оболочек в данной работе выводится оценка хаусдорфова отклонения множеств достижимости управляемых систем от их внутренних аппроксимаций, отвечающих конечным разбиениям промежутка времени, на котором рассматривается управляемая система. Эти оценки обеспечивают сходимость внутренних аппроксимаций к множествам достижимости при стремящемся к нулю диаметре разбиения временного промежутка.

Особенность настоящей работы состоит в том, что акцент при выводе оценки соответствующего хаусдорфова отклонения (в случае пространства $\mathbb{R}^2$) ставится не на степень вытянутости многоугольника в $\mathbb{R}^2$, а на величину углов при его вершинах. Это позволяет получить оценки соответствующих хаусдорфовых отклонений для более широких классов выпуклых компактов в $\mathbb{R}^2$. В действительности, есть все основания для того, чтобы перенести рассуждения и оценки, полученные в этой работе для выпуклых многоугольников в $\mathbb{R}^2$, на выпуклые компакты в $\mathbb{R}^2$. Актуальность работы подчеркивают в том числе и статьи [9; 10].

Настоящая работа примыкает к [11].

1. Трехзвенники многоугольника Φ

Рассмотрим в плоскости $\mathbb{R}^2$ выпуклый замкнутый n-угольник Φ с вершинами $A^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, и углами $\alpha^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, соответственно. Для удобства будем считать, что $A^{(n+1)} = A^{(1)}$, $A^{(n+2)} = A^{(2)}$, $A^{(n+3)} = A^{(3)}$.

Введем следующие обозначения:

$B(x^*;r) = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ \|x - x^*\| \le r\},\ x^* \in \mathbb{R}^2,\ r \in (0,\infty)$,

— круг с центром в точке x и радиусом r;

$O(x^*;r) = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ \|x - x^*\| = r\},\ x^* \in \mathbb{R}^2,\ r \in (0,\infty)$,

— окружность с центром в точке x и радиусом r;

$h(\Phi^{(1)},\Phi^{(2)}) = \max\limits_{f^{(1)}\in\Phi^{(1)}} \min\limits_{f^{(2)}\in\Phi^{(2)}} \|f^{(1)} - f^{(2)}\|$

— хаусдорфово отклонение множества $\Phi^{(1)}$ от множества $\Phi^{(2)}$;

$\Phi \dot{-} B(0;r) = \{x^* \in \Phi :\ B(x^*;r) \subset \Phi\}$ — геометрическая разность множеств Φ и $B(0;r)$;

$\partial\Phi$ — граница в $\mathbb{R}^2$ многоугольника Φ, $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ — компакты в $\mathbb{R}^2$.

В работе исследуем задачу о вычислении хаусдорфова отклонения $h(\Phi, \Phi \dot{-} B(0;r))$ многоугольника Φ от геометрической разности Φ и круга $B(0;r)$.

О п р е д е л е н и е 1. Трехзвенником многоугольника Φ будем называть ломанную $L^{(i)}$, состоящую из трех последовательных сторон многоугольника Φ и начинающуюся со стороны $A^{(i)}A^{(i+1)}$, т. е.

$$L^{(i)} = A^{(i)}A^{(i+1)} \cup A^{(i+1)}A^{(i+2)} \cup A^{(i+2)}A^{(i+3)}.$$

О п р е д е л е н и е 2. Вписанным кругом трехзвенника $L^{(i)}$ будем называть круг $\omega^{(i)}$, касающийся стороны $A^{(i+1)}A^{(i+2)}$ и лучей $A^{(i+1)}A^{(i)}$ и $A^{(i+2)}A^{(i+3)}$ (см. рис. 1).

Заметим, что в каждый трехзвенник можно вписать один и только один круг. Прежде всего поймем, как вычислить радиус $r^{(i)}$ такого круга.

Центр $O^{(i)}$ вписанного в трехзвенник $L^{(i)}$ круга $\omega^{(i)}$ лежит на биссектрисах углов $\alpha^{(i+1)}$, $\alpha^{(i+2)}$ многоугольника Φ (см. рис. 2).

Пусть $K^{(i)}$ — точка касания круга $\omega^{(i)}$ со стороной $A^{(i+1)}A^{(i+2)}$. Тогда

[2]О двусторонних аппроксимациях множеств достижимости управляемых систем с геометрическими ограничениями на управления // Тр. Ин-та матемактики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 239–255.

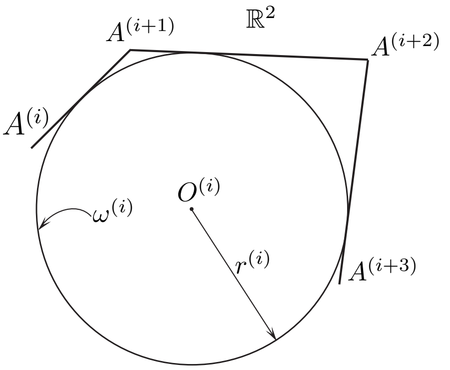

Рис. 1. Вписанный круг трехзвенника $L^{(i)}$.

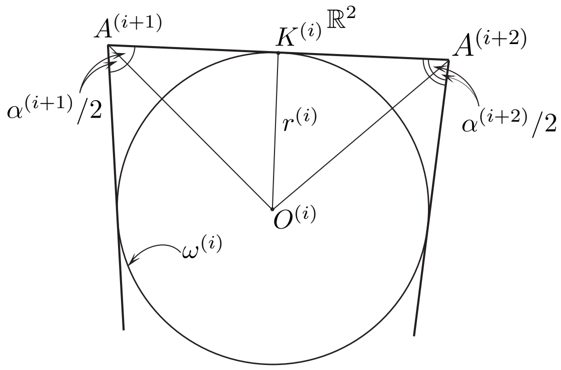

Рис. 2. Вычисление радиуса $r^{(i)}$.

$$|A^{(i+1)}A^{(i+2)}| = |A^{(i+1)}K^{(i)}| + |K^{(i)}A^{(i+2)}| = r^{(i)} \operatorname{ctg} \frac{\alpha^{(i+1)}}{2} + r^{(i)} \operatorname{ctg} \frac{\alpha^{(i+2)}}{2},$$

откуда

$$r^{(i)} = \frac{|A^{(i+1)}A^{(i+2)}|}{\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha^{(i+1)}}{2} + \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha^{(i+2)}}{2}}. \tag{1.1}$$

Лемма 1. *Пусть некоторый круг $B(x^*; r) \subset \Phi$ касается трех или более сторон выпуклого многоугольника Φ. Тогда существует трехзвенник $L^{(i^*)}$ такой, что $r^{(i^*)} \leq r$.*

Доказательство. Пусть круг $B(x^*; r)$ касается сторон $A^{(i)}A^{(i+1)}$, $A^{(j)}A^{(j+1)}$, $A^{(k)}A^{(k+1)}$ многоугольника Φ (см. рис. 3). Если эти стороны образуют трехзвенник, то лемма доказана. □

Если стороны не образуют трехзвенник, то следует рассмотреть следующие 2 случая.

1. Только две стороны являются смежными, т. е. $j = i + 1$. Тогда среди пар лучей

$$(A^{(j)}A^{(j+1)}; A^{(k+1)}A^{(k)}), \quad (A^{(k)}A^{(k+1)}; A^{(i+1)}A^{(i)})$$

хотя бы одна пара пересекается.

Действительно, рассмотрим пятиугольник $A^{(i)}A^{(i+1)}A^{(i+2)}A^{(k)}A^{(k+1)}$. Если пара лучей

$$(A^{(j)}A^{(j+1)}; A^{(k+1)}A^{(k)})$$

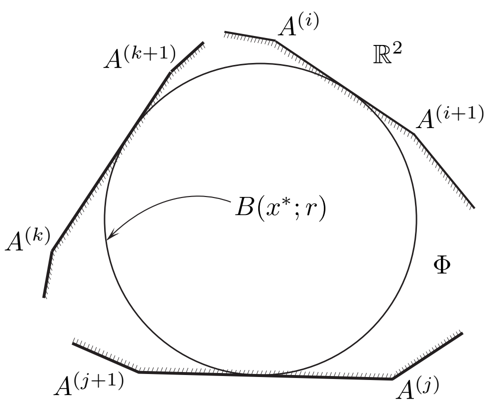

Рис. 3. Вписанный в многоугольник Φ круг $B(x^*; r)$.

не пересекается, то

$$\angle A^{(j)}A^{(j+1)}A^{(k)} + \angle A^{(j+1)}A^{(k)}A^{(k+1)} \le 180^\circ. \tag{1.2}$$

Аналогично, если пара лучей $(A^{(k)}A^{(k+1)}; A^{(i+1)}A^{(i)})$ не пересекается,

$$\angle A^{(k)}A^{(k+1)}A^{(i)} + \angle A^{(k+1)}A^{(i)}A^{(i+1)} \le 180^\circ. \tag{1.3}$$

Складывая неравенства (1.2), (1.3) и $\angle A^{(i)}A^{(i+1)}A^{(i+2)}$, получаем

$$540^\circ = \angle A^{(i)}A^{(i+1)}A^{(i+2)} + \angle A^{(j)}A^{(j+1)}A^{(k)} + \angle A^{(j+1)}A^{(k)}A^{(k+1)}$$

$$+ \angle A^{(k)}A^{(k+1)}A^{(i)} + \angle A^{(k+1)}A^{(i)}A^{(i+1)} < 540^\circ;$$

это приводит нас к противоречию. □

2. Среди сторон нет смежных. Тогда среди пар лучей

$$(A^{(i)}A^{(i+1)}; A^{(j+1)}A^{(j)}),\ (A^{(j)}A^{(j+1)}; A^{(k+1)}A^{(k)}),\ (A^{(k)}A^{(k+1)}; A^{(i+1)}A^{(i)})$$

хотя бы одна пара пересекается.

Действительно, рассмотрим шестиугольник $A^{(i)}A^{(i+1)}A^{(j)}A^{(j+1)}A^{(k)}A^{(k+1)}$. Если пара лучей $(A^{(i)}A^{(i+1)}; A^{(j+1)}A^{(j)})$ не пересекается, то

$$\angle A^{(i)}A^{(i+1)}A^{(j)} + \angle A^{(i+1)}A^{(j)}A^{(j+1)} \le 180^\circ. \tag{1.4}$$

Аналогично, если пары лучей $(A^{(j)}A^{(j+1)}; A^{(k+1)}A^{(k)})$ и $(A^{(k)}A^{(k+1)}; A^{(i+1)}A^{(i)})$ не пересекаются,

$$\angle A^{(j)}A^{(j+1)}A^{(k)} + \angle A^{(j+1)}A^{(k)}A^{(k+1)} \le 180^\circ, \tag{1.5}$$

$$\angle A^{(k)}A^{(k+1)}A^{(i)} + \angle A^{(k+1)}A^{(i)}A^{(i+1)} \le 180^\circ; \tag{1.6}$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое, так как в выпуклом многоугольнике не может быть трех попарно параллельных сторон.

Складывая неравенства (1.4)–(1.6), получаем

$$720^\circ = \angle A^{(i)}A^{(i+1)}A^{(j)} + \angle A^{(i+1)}A^{(j)}A^{(j+1)}$$

$$+ \angle A^{(j)}A^{(j+1)}A^{(k)} + \angle A^{(j+1)}A^{(k)}A^{(k+1)} + \angle A^{(k)}A^{(k+1)}A^{(i)} + \angle A^{(k+1)}A^{(i)}A^{(i+1)} < 540^\circ;$$

это приводит нас к противоречию. □

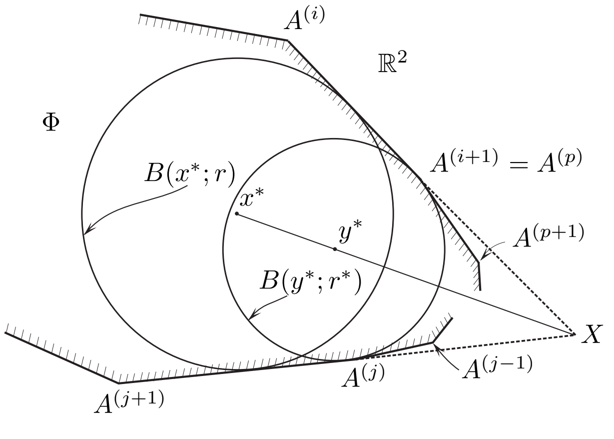

Рис. 4. Процесс сужения.

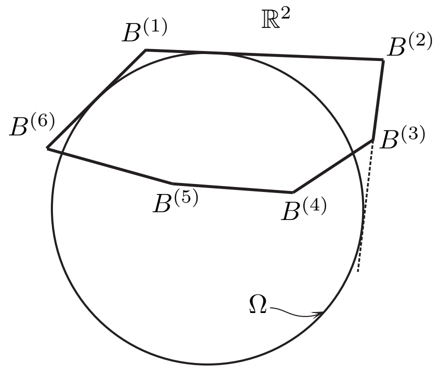

Рис. 5. Вписанный в трехзвенник круг, центр которого не содержится в многоугольнике.

Без ограничения общности пусть несмежные лучи $A^{(i)}A^{(i+1)}$ и $A^{(j+1)}A^{(j)}$ пересекаются в точке X. Если круг $B(x^*;r)$ касается еще какой-то стороны $A^{(m)}A^{(m+1)}$, то повторим процесс выбора двух пересекающихся лучей. Если такой стороны нет, то будем уменьшать круг $B(x^*;r)$, добиваясь, чтобы его центр двигался вдоль биссектрисы угла $A^{(i+1)}XA^{(j)}$ по направлению к точке X, а радиус менялся таким образом, чтобы круг все время касался лучей $A^{(i)}A^{(i+1)}$ и $A^{(j+1)}A^{(j)}$ (см. рис. 4). Это движение будем продолжать до тех пор, пока круг не коснется еще какой-то стороны $A^{(p)}A^{(p+1)}$ многоугольника Φ (На самом деле это сторона будет смежной с одной из сторон $A^{(i)}A^{(i+1)}$ и $A^{(j+1)}A^{(j)}$.) Получили круг $B(y^*,r^*)$, касающийся трех сторон мноугольника Φ. Если отрезки $A^{(i)}A^{(i+1)}$, $A^{(p)}A^{(p+1)}$ и $A^{(j)}A^{(j+1)}$ не образуют трехзвенник многоугольника Φ, то продолжаем процесс, начиная с выбора двух пересекающихся лучей. Если же указанные отрезки образуют трехзвенник многоугольника Φ, то полученный трехзвенник — искомый, так как вписанный в него круг $B(y^*,r^*)$ по построению имеет радиус не больше исходного круга, что и требовалось доказать. $\square$

Процесс, описанный в лемме 1, будем называть *процессом сужения.*

Несложно привести пример, когда не только вписанный в трехзвенник круг, но и его центр не содержится в многоугольнике (см. рис. 5).

Тем не менее следующая лемма говорит о том, что такая ситуация не может произойти со всеми вписанными в трехзвенники кругами.

Лемма 2. *Пусть* $r^{(i^*)} = \min\limits_{i=\overline{1,n}} r^{(i)}$. *Обозначим через* $Z^{(i)}$ *центр круга, вписанного в угол* $A^{(i-1)}A^{(i)}A^{(i+1)}$ *многоугольника* Φ, *с радиусом* $r^{(i^*)}$, $i=\overline{1,n}$. *Тогда* $B(Z^{(i)};r^{(i^*)}) \subset \Phi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что круг $B(Z^{(i)};r^{(i^*)})$, вписанный в трехзвенник $L^{(i^*)}$, не содержится во множестве Φ. Тогда этот круг пересекает одну или несколько сторон многоугольника Φ. Будем уменьшать круг $B(Z^{(i)};r^{(i^*)})$ так, чтобы его центр двигался вдоль биссектрисы угла $A^{(i)}A^{(i+1)}A^{(i+2)}$ по направлению к вершине $A^{(i+1)}$, до тех пор пока он не будет содержаться в Φ и касаться трех или более его сторон. В результате получим круг, радиус R которого меньше $r^{(i^*)}$ и который удовлетворяет условиям леммы 1. Значит, существует трехзвенник $L^{(i_*)}$ такой, что $r^{(i_*)} \le R < r^{(i^*)}$; это противоречит минимальности $r^{(i^*)}$. Следовательно, наше предположение ошибочно и $B(Z^{(i)};r^{(i^*)}) \subset \Phi$. $\square$

2. Основной результат

Теорема 1. *Пусть* Φ *— выпуклый замкнутый* n*-угольник в плоскости* $\mathbb{R}^2$ *с вершинами* $A^{(i)}$, $i=\overline{1,n}$, *и углами* $\alpha^{(i)}$, $i=\overline{1,n}$, *соответственно. Пусть* $L^{(i)}$ *— трехзвенники многоугольника* Φ, $\omega^{(i)}$ *— круги радиусов* $r^{(i)}$, *вписанные в трезвенники* $L^{(i)}$ *соответственно, где* $i=\overline{1,n}$, *и* $r^{(i^*)} = \min\limits_{i=\overline{1,n}} r^{(i)}$. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, r^{(i^*)})$ *геометрическая разность*

$\Phi \dot{-} B(0;\varepsilon)$ *— это выпуклый замкнутый n-угольник, стороны которого попарно параллельны сторонам* Φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $\varepsilon^* \in (0, r^{(i^*)})$. Обозначим через $Z^{(i)}$ центр окружности с радиусом ε^*, $i = \overline{1,n}$, вписанной в угол $A^{(i-1)}A^{(i)}A^{(i+1)}$ многоугольника Φ. По лемме 2 следует, что $Z^{(i)} \subset \Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*)$, $i = \overline{1,n}$. Так как Φ — выпуклое множество, то $\Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*)$ также является выпуклым множеством (см., например, [12]). Из этого вытекает, что n-угольник с вершинами $Z^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, содержится во множестве $\Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*)$. Обозначим этот многоугольник через Ψ. Возьмем теперь произвольную точку $Z \in \Phi \setminus \Psi$. Несложно видеть, что $\rho(Z, \partial\Phi) < \varepsilon^*$, поэтому $\Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*) = \Psi$.

Наконец, $\rho(Z^{(i)}, A^{(i)}A^{(i+1)}) = \rho(Z^{(i+1)}, A^{(i)}A^{(i+1)}) = \varepsilon^*$, $i = \overline{1,n}$, а значит, $Z^{(i)}Z^{(i+1)} \| A^{(i)}A^{(i+1)}$, т. е. стороны многоугольника Ψ попарно параллельны сторонам Φ, что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть Φ — выпуклый замкнутый n-угольник в плоскости $\mathbb{R}^2$ с вершинами $A^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, и углами $\alpha^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, соответственно, $\alpha^* = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \alpha^{(i)}$. Пусть $L^{(i)}$ — трехзвенники многоугольника Φ, $\omega^{(i)}$ — круги радиусов $r^{(i)}$, вписанные в трезвенники $L^{(i)}$ соответственно, где $i = \overline{1,n}$, и $r^{(i^*)} = \min\limits_{i=\overline{1,n}} r^{(i)}$. Тогда для любого $\varepsilon^* \in (0, r^{(i^*)})$ справедливо равенство*

$$h(\Phi, \Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*)) = \varepsilon^* \frac{1}{\sin \alpha^*/2}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $\varepsilon^* \in (0, r^{(i^*)})$. Обозначим через $Z^{(i)}$ центр окружности, вписанной в угол $A^{(i-1)}A^{(i)}A^{(i+1)}$ многоугольника Φ, с радиусом ε^*, $i = \overline{1,n}$. Опустим из каждой точки $Z^{(i)}$ перпендикуляры $Z^{(i)}H_1^{(i)}$ на стороны $A^{(i)}A^{(i+1)}$ соответственно и перпендикуляры $Z^{(i)}H_2^{(i-1)}$ на стороны $A^{(i-1)}A^{(i)}$ соответственно, где $i = \overline{1,n}$. Для любого $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} [H_1^{(i)}, H_2^{(i)}]$ справедливо $\rho(x, \Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*)) = \varepsilon^*$.

Для любого $i = \overline{1,n}$ справедливо

$$h\big([H_2^{(i)}, A^{(i+1)}] \cup [A^{(i+1)}, H_1^{(i+1)}], \Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*)\big) = |A^{(i+1)}Z^{(i+1)}|$$

в силу свойств наклонной.

Тогда

$$\max_{i=\overline{1,n}} h\big([H_2^{(i)}, A^{(i+1)}] \cup [A^{(i+1)}, H_1^{(i+1)}], \Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*)\big)$$

$$= \max_{i=\overline{1,n}} |A^{(i+1)}Z^{(i+1)}| = \varepsilon^* \max_{i=\overline{1,n}} \frac{1}{\sin \alpha^{(i)}/2}. \tag{2.2}$$

Поскольку $\alpha^{(i)}/2 < \pi/2$, $i = \overline{1,n}$, равенство (2.2) примет вид

$$\max_{i=\overline{1,n}} h\big([H_2^{(i)}, A^{(i+1)}] \cup [A^{(i+1)}, H_1^{(i+1)}], \Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*)\big) = \varepsilon^* \frac{1}{\sin\big(\min\limits_{i=\overline{1,n}} \alpha^{(i)}\big)/2} = \varepsilon^* \frac{1}{\sin \alpha^*/2}.$$

Очевидно, что $\varepsilon^* \dfrac{1}{\sin \alpha^*/2} > \varepsilon^*$, а значит, $h(\Phi, \Phi \dot{-} B(0;\varepsilon^*)) = \varepsilon^* \dfrac{1}{\sin \alpha^*/2}$ и формула (2.1) доказана. □

3. Вычисление хаусдорфова отклонения

В качестве примера рассмотрим многоугольник из статьи [11].

Пусть Φ — выпуклый замкнутый семиугольник в плоскости $\mathbb{R}^2$ с вершинами $A^{(i)}$, $i=\overline{1,7}$, углами $\alpha^{(i)}$, $i=\overline{1,7}$, соответственно, а также

$$A^{(1)}=(-4;3),\quad A^{(2)}=(6;3),\quad A^{(3)}=(5;0),\quad A^{(4)}=(3;-3),\quad A^{(5)}=(1;-4),$$
$$A^{(6)}=(-5;-3),\quad A^{(7)}=(-6;1).$$

Вычислим стороны и углы Φ:

$$A^{(1)}A^{(2)}=10,\quad A^{(2)}A^{(3)}=\sqrt{10},\quad A^{(3)}A^{(4)}=\sqrt{13},\quad A^{(4)}A^{(5)}=\sqrt{5},\quad A^{(5)}A^{(6)}=\sqrt{37},$$
$$A^{(6)}A^{(7)}=\sqrt{17},\quad A^{(7)}A^{(1)}=\sqrt{8}.$$
$$\alpha^{(1)}=\frac{3\pi}{4},\quad \alpha^{(2)}=\operatorname{arcctg}\frac{1}{3},\quad \alpha^{(3)}=\operatorname{arcctg}\frac{-11}{3},\quad \alpha^{(4)}=\operatorname{arcctg}\frac{-7}{4},$$
$$\alpha^{(5)}=\operatorname{arcctg}\frac{-11}{8},\quad \alpha^{(6)}=\operatorname{arcctg}\frac{-10}{23},\quad \alpha^{(7)}=\operatorname{arcctg}\frac{-3}{5},$$

откуда $\alpha^*=\min\limits_{i=\overline{1,n}}\alpha^{(i)}=\alpha^{(2)}=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}$.

Найдем радиусы $r^{(i)}$, $i=\overline{1,7}$, кругов, вписанных в трехзвенники $L^{(i)}$ многоугольника Φ, по формуле (1.1):

$$r^{(1)}=\frac{30}{\sqrt{10}+3\sqrt{2}-2},\quad r^{(2)}=\frac{3}{\sqrt{13}-\sqrt{10}+1},$$
$$r^{(3)}=\frac{12}{4\sqrt{10}+3\sqrt{5}-5\sqrt{13}},\quad r^{(4)}=\frac{8}{2\sqrt{13}+\sqrt{37}-5\sqrt{5}},$$
$$r^{(5)}=\frac{184}{23\sqrt{5}+8\sqrt{17}-9\sqrt{37}},\quad r^{(6)}=\frac{115}{5\sqrt{37}+23\sqrt{2}-7\sqrt{17}},\quad r^{(7)}=\frac{10}{\sqrt{17}-4\sqrt{2}+5},$$

откуда $r^{(i^*)}=\min\limits_{i=\overline{1,n}}r^{(i)}=r^{(2)}=\dfrac{3}{\sqrt{13}-\sqrt{10}+1}$.

В силу теоремы 2 и формулы (2.1) получаем, что для любого $\varepsilon^*\in\left(0,\dfrac{3}{\sqrt{13}-\sqrt{10}+1}\right)$ справедливо

$$h(\Phi,\Phi\mathbin{\dot-}B(0;\varepsilon^*))=\varepsilon^*\frac{1}{\sin\dfrac{\operatorname{arcctg}1/3}{2}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}-1}}\cdot\varepsilon^*.$$

4. Сравнение с оценкой Л. С. Понтрягина

Хорошо известна оценка Л. С. Понтрягина, полученная в работе [1]. Для выпуклого компакта $A\subset\mathbb{R}^n$, круга $B(x_0;r)\subset A$ и для любого $r\in(0,R)$ имеем

$$h(A,A\mathbin{\dot-}B(0;r))\le\frac{\delta(A)}{R}r, \tag{4.1}$$

где $\delta(A)=\max\limits_{x_1,x_2\in A}\|x_1-x_2\|, R=\max\{R'>0\colon A\mathbin{\dot-}B(0;R')\ne\varnothing\}$.

Рассмотрим прямоугольник Π со сторонами $a,b\,(a\ge b)$. Тогда $\delta(\Pi)=\sqrt{a^2+b^2}$, $R=\dfrac{1}{2}b$. Для любого $r\in(0,R)$ оценка (4.1) перепишется следующим образом:

$$h(\Pi,\Pi\mathbin{\dot-}B(0;r))\le\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b}r,$$

в то время как результат, полученный в данной работе, будет иметь вид

$$h(\Pi, \Pi \dot{-} B(0; r)) = r\frac{1}{\sin \pi/4} = \sqrt{2}r. \tag{4.2}$$

Сравним правые части полученных оценок. Пусть $a = bk$, $k \geq 1$, тогда

$$\frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{b}r : (\sqrt{2}r) = \sqrt{2}\sqrt{1 + k^2}.$$

При увеличении k правая часть оценки Л. С. Понтрягина будет расти, в то время как правая часть равенства (4.2) останется без изменений, что дает существенный выигрыш в сколь угодно большое число раз.

Заключение

Выведена формула для вычисления хаусдорфова отклонения $h\big(\Phi, \Phi \dot{-} B(0; \varepsilon)\big)$ для выпуклого многоугольника Φ в $\mathbb{R}^2$. При получении этой оценки существенным образом использовались введенные в этой работе понятия трехзвенника в $\mathbb{R}^2$ и вписанного в него круга. Процесс сужения, описанный автором, позволяет применять указанную формулу в случае, когда ε меньше минимального из радиусов кругов, вписанных в трехзвенники многоугольника Φ. Тем не менее автор предполагает, что приведенные рассуждения можно обобщить на случай большего радиуса вычитаемого круга и даже на случай произвольного выпуклого многоугольника в $\mathbb{R}^2$. Сравнение полученной формулы с оценкой Л. С. Понтрягина показало существенный выигрыш даже в случае простейших многоугольников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112 (154), № 3 (7). С. 307–330.
2. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 576 с.
3. **Никольский М.С.** Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116 (158), № 1 (9). С. 136–144.
4. **Nikol'skii M.S.** Approximate computation of the least guaranteed estimate in linear differential games with a fixed duration // J. Appl. Math. Mech. 1982. Vol. 46, No 4. P. 550–552. doi: 10.1016/0021-8928(82)90044-2 .
5. **Половинкин Е.С.** Стабильность терминального множества и оптимальность времени преследования в дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 3. С. 433–446.
6. **Пономарев А.П., Розов Н.Х.** Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15: Вычисл. математика и кибернетика. 1978. № 1. С. 82–90.
7. **Азамов А.А.** Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 265–268.
8. **Половинкин Е.С. и др.** Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина. Стабильность терминального множества и оптимальность времени преследования в дифференциальных играх // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 95–122.
9. **Azamov A.A., Iskanadjiev I.M.** Pontryagin's alternating integral for differential inclusions with counteraction // Contributions to Game Theory and Management. 2012. Vol 5. P. 33–44.
10. **Ершов А.А., Ушаков А.В., Ушаков В.Н.** О двух игровых задачах о сближении // Мат. сб. 2021. Т. 212, № 9. С. 40–74. doi: 10.4213/sm9496 .
11. **Ушаков В.Н., Першаков М.В.** К оценке хаусдорфова отклонения выпуклых многоугольников в $\mathbb{R}^2$ от их геометрической разности с кругами // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2020. Vol. 30, № 4. P. 585–603. doi: 10.35634/vm200404 .
12. **Петров Н.Н.** Введение в выпуклый анализ: уч. пособие. Ижевск: Изд-во УдГУ, 2008. 168 с.

Поступила 22.08.2021
После доработки 22.10.2021
Принята к публикации 25.10.2021

Першаков Максим Вадимович
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Mper192@yandex.ru

REFERENCES

1. Pontrjagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815 .
2. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy. T. 2* [Selected scientific works. Vol. 2]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 576 p.
3. Nikol'skii M.S. On the alternating integral of Pontryagin. *Math. USSR-Sb.*, 1983, vol. 44, no. 1, pp. 125–132. doi: 10.1070/SM1983v044n01ABEH000956 .
4. Nikol'skii N. Approximate computation of the least guaranteed estimate in linear differential games with a fixed duration. *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 46, no. 4, pp. 550–552. doi: 10.1016/0021-8928(82)90044-2 .
5. Polovinkin E.S. Stability of a terminal set and optimality of pursuit time in differential games. *Differ. Uravn.*, 1984, vol. 20, no. 3, pp. 433–446 (in Russian).
6. Ponomarev A.P., Rozov N.Kh. The stability and convergence of alternated Pontryagin sums. *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 15: Vych. mat. kib.*, 1978, no. 1, pp. 82–90 (in Russian).
7. Azamov A. Semistability and duality in the theory of the Pontryagin alternating integral. *Dokl. Math.*, 1988, vol. 37, no. 2, pp. 355–359.
8. Polovinkin E.S., Ivanov G.E., Balashov M.V., Konstantinov R.V., Khorev A.V. An algorithm for the numerical solution of linear differential games. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1515–1542. doi: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000604 .
9. Azamov A., Iskanadjiev I.M. Pontryagin's alternating integral for differential inclusions with counteraction. *Contributions to Game Theory and Management*, 2012, vol. 5, pp. 33–44.
10. Ershov A.A., Ushakov A.V., Ushakov V.N. Two game-theoretic problems of approach. *Sb. Math.*, 2021, vol. 212, no. 9, pp. 1228–1260. doi: 10.1070/SM9496 .
11. Ushakov V.N., Pershakov M.V. On estimation of Hausdorff deviation of convex polygons in $\mathbb{R}^2$. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 585–603. (in Russian). doi: 10.35634/vm200404 .
12. Petrov N.N. *Vvedenie v vypuklyi analiz: ucheb. posobie* [Introduction to convex analysis: textbook]. Izhevsk: UdGU Publ., 2008, 168 p.

Received August 22, 2021
Revised October 22, 2021
Accepted October 25, 2021

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2021-1383).

Maksim Vadimovich Pershakov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Mper192@yandex.ru .

Cite this article as: M. V. Pershakov. On the calculation of the Hausdorff deviation of convex polygons in $\mathbb{R}^2$ from their geometric difference with disks, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 209–217 .