ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 512.54

О ПОКАЗАТЕЛЯХ СТЕПЕНЕЙ КОММУТАТОРОВ ИЗ СОБИРАТЕЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ Ф. ХОЛЛА[1]

В. М. Леонтьев

Пусть G — группа, $x, y \in G$. В работе вычисляются в явном виде показатели степеней некоторых коммутаторов из собирательной формулы Ф. Холла для выражения $(xy)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Для двух серий коммутаторов: $[y, {}_u x, {}_v y]$ и $[[y, {}_u x], [y, {}_v x]]$ показатели найдены в холловском виде, т. е. в виде целочисленных полиномов от n с нулевым свободным членом, а также по модулю n, когда n — простое число. Для серии коммутаторов $[[y,\, {}_u x,\, {}_v y],\, {}_{t_1}[y,\, {}_{u_1} x,\, {}_{v_1} y], \ldots,\, {}_{t_h}[y,\, {}_{u_h} x,\, {}_{v_h} y]]$ показатели найдены в виде кратных комбинаторных сумм. Как следствие, в работе получен явный вид собирательной формулы Ф. Холла в двух случаях: группа G разрешима ступени 2, коммутант G' нильпотентен ступени 2 и $y \in C_G(G')$. Выведена собирательная формула в явном виде для выражения $(xy)^n$, когда группа G разрешима ступени 3. Результаты получены на основе параметризации несобранной части собирательной формулы функцией бинарного веса числа. Они могут оказаться полезными при решении проблем комбинаторной теории групп, при исследовании конечных p-групп на регулярность.

Ключевые слова: собирательный процесс, собирательная формула, коммутатор.

V. M. Leontiev. On the exponents of commutators from P. Hall's collection formula.

Let G be a group, and let $x, y \in G$. We find an explicit form of the exponents of some commutators from P. Hall's collection formula for the expression $(xy)^n$, $n \in \mathbb{N}$. The exponents for the series of commutators $[y, {}_u x, {}_v y]$ and $[[y, {}_u x], [y, {}_v x]]$ are found in the Hall form, i.e., in the form of integer-valued polynomials in n with zero constant term, and also modulo n when n is a prime number. The exponents for the series of commutators $[[y,\, {}_u x,\, {}_v y],\, {}_{t_1}[y,\, {}_{u_1} x,\, {}_{v_1} y], \ldots,\, {}_{t_h}[y,\, {}_{u_h} x,\, {}_{v_h} y]]$ are found in the form of multiple combinatorial sums. As a consequence, we obtain an explicit form of Hall's collection formula in two cases: the group G has solvability length 2, the commutator subgroup G' has nilpotency class 2, and $y \in C_G(G')$. A collection formula for the expression $(xy)^n$ is obtained in an explicit form when the group G has solvability length 3. To obtain these results we parameterize the uncollected part of the collection formula by the binary weight function. The results may be useful in solving problems in combinatorial group theory and in studying the regularity of finite p-groups.

Keywords: collection process, collection formula, commutator.

MSC: 20F12, 05E15

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-182-198

1. Введение

Пусть G — группа, $x, y \in G$, и формально различные коммутаторы $x, y, R_3, \ldots, R_i, \ldots$ от x и y записаны в порядке возрастания весов (порядок среди коммутаторов одинакового веса можно выбрать произвольно). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место собирательная формула Ф. Холла [1]

$$(xy)^n = x^n y^n {R_3}^{f_3(n)} \ldots {R_i}^{f_i(n)} \ldots, \tag{1.1}$$

в которой показатели степеней коммутаторов представимы в виде

$$f_i(n) = \sum_{k=1}^{w} a_k \binom{n}{k}, \quad a_k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2}$$

где w — вес коммутатора R_i, коэффициенты a_k зависят от R_i, но не от n.

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Для теории конечных p-групп важным следствием представления (1.2) является делимость $f_i(p)$ на число p, когда вес коммутатора R_i меньше p. Вычисление показателей степеней $f_i(n)$ в общем случае представляет трудную задачу.

В работе [2] формула (1.1) была обобщена для слова $(a_1 \dots a_m)^n$, где $n, m \in \mathbb{N}$, а в [3] доказана собирательная формула с аналогичным свойством делимости показателей степеней коммутаторов для слова W^n, где $n \in \mathbb{N}$, W — произвольное слово свободной группы.

Для группы $G = \langle x, y \rangle$ формула (1.1) принимает следующий вид при соответствующих ограничениях [2]:

$$(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\binom{n}{2}}, \qquad \text{если } [y,x] \in Z(G);$$

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_i x]^{\binom{n}{i+1}}, \qquad \text{если } [\Gamma_2(G), \Gamma_2(G)] = 1,\ y \in C_G(\Gamma_2(G)).$$

Мы полагаем $[y,x] = y^{-1}x^{-1}yx$ и используем краткую запись: $[y, {}_0 x] = y$, $[y, {}_u x] = [[y, {}_{u-1} x], x]$; здесь $u \in \mathbb{N}$; $[y, {}_u x, {}_v z] = [[y, {}_u x], {}_v z]$, где $u, v \in \mathbb{N}_0$. Для элементов нижнего центрального ряда группы G используем обозначения: $\Gamma_1(G) = G$, $\Gamma_k = [\Gamma_{k-1}(G), G]$, где $k \in \mathbb{N}$.

Показатель степени коммутатора $[y, {}_i x]$ в (1.1) равен $\binom{n}{i+1}$, из чего следует, что группа простой экспоненты p удовлетворяет $(p-1)$-му условию Энгеля (см. [2, с. 327]):

$$[y, {}_{p-1} x] = 1 \ (\mathrm{mod}\ \Gamma_{p+1}(G)).$$

Данное соотношение было основным при исследовании ослабленной проблемы Бернсайда для групп экспоненты p. Исходя из этого соотношения, А. И. Кострикин решил ослабленную проблему Бернсайда для группы экспоненты 5 с двумя образующими.

В работе [4] Ю. Краузе доказал, что показатели степеней коммутаторов

$$[y, {}_i x, {}_j y],\ \ i \geqslant 1,\ \ j \geqslant 0; \quad [[y, {}_i x, {}_j y], [y,x]],\ \ i \geqslant 1,\ \ j \geqslant 0, \text{ где } i \geqslant 2 \text{ при } j = 0; \quad [[y,x,y],[y, {}_2 x]],$$

входящих в (1.1), равны соответственно

$$\sum_{m=0}^{n-1} \binom{m}{i}\binom{m}{j}, \quad \sum_{m=0}^{n-1} \binom{m}{i}\left(\binom{m}{2}\binom{m}{j} + \binom{m}{j+1}\right), \quad \sum_{m=0}^{n-1} m\left(2\binom{m}{2} + (m+2)\binom{m}{3}\right).$$

Используя эти показатели, Ю. Краузе установил, что группа экспоненты 8 удовлетворяет 14-му условию Энгеля [5].

В статье [6] А. И. Скопин вычислил отрезок собирательной формулы для $(xy)^8$, а в [7] показал, что для любых $x \in G$, $y \in \Gamma_2(G)$ справедливы следующие формулы при соответствующих ограничениях:

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} [y, {}_i x, {}_j y]^{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{i}\binom{k}{j}}, \qquad \text{если } [\Gamma_3(G), \Gamma_3(G)] = 1;$$

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_i x]^{\binom{n}{i+1}} \prod_{m=0}^{n-2} \prod_{i=m+1}^{n-1} [[y, {}_i x], [y, {}_m x]]^{c^n_{mi}}, \qquad \text{если } [\Gamma_2(G), \Gamma_2(G), \Gamma_2(G)] = 1;$$

здесь коэффициенты c^n_{mi} определяются некоторыми соотношениями. Явные выражения для c^n_{mi} найдены не были. В последующих публикациях [8;9], также связанных с исследованием групп бернсайдовского типа, был представлен алгоритм построения собирательной формулы Ф. Холла для некоторых типов групп.

В работе [11] несобранная часть собирательной формулы Ф. Холла, полученная после двух этапов собирательного процесса, была параметризована с помощью функции бинарного веса числа $\omega(i)$ (количество единиц в двоичной записи $i \in \mathbb{N}_0$):

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{2^{n-k}-1} \prod_{j=0}^{2^{n-k}-1} [y, {}_{\omega(i)} x, {}_{\omega(j)} y]. \tag{1.3}$$

На основе разработанного комбинаторного аппарата, связанного с описанием множества

$$W(q,x)=\{i\mid \omega(i)=x, 0\leqslant i\leqslant q\},\quad q,x\in\mathbb{Z},$$

для произвольной группы G и любых $x,y\in G$ были доказаны следующие формулы:

$$(xy)^n=x^ny^n\prod_{u=1}^{n-1}\prod_{v=0}^{n-1}[y,{}_ux,{}_vy]^{g_n(u,v)},\quad \text{если } [\Gamma_2(G),\Gamma_2(G)]=1;$$

$$(xy)^n=x^ny^n\prod_{u=1}^{n-1}[y,{}_ux]^{\binom{n}{u+1}}\prod_{u=1}^{n-1}[y,{}_ux,y]^{n\binom{n}{u+1}-\binom{n+1}{u+2}}\prod_{n-1\geqslant u>v\geqslant 1}[[y,{}_ux],[y,{}_vx]]^{f_n(u,v)}\ (\mathrm{mod}\ H),$$

где H — нормальное замыкание в G подгруппы, порожденной всеми коммутаторами от x,y веса $\geqslant 4$, в которых y имеет не менее трех вхождений. Показатели степеней коммутаторов выражаются следующим образом:

$$g_n(u,v)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{k}{u}\binom{k}{v};$$

$$f_n(u,v)=\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{v}\sum_{i=v-k}^{n-m-k}\binom{n-m-i-1}{k-1}\binom{i}{u-k+1}\binom{i}{v-k}+\sum_{m=1}^{n-2}\sum_{k=m+1}^{n-1}\binom{m}{v}\binom{k}{u}.$$

В полученных собирательных формулах коммутаторы расположены не по возрастанию веса для удобства записи. Наложенные ограничения позволяют перегруппировать сомножители без возникновения новых коммутаторов так, чтобы эти формулы приняли вид (1.1).

Как было отмечено выше, если число n является простым, то $g_n(u,v)$, $f_n(u,v)$ делятся на n при условиях $u+v+1<n$ и $u+v+2<n$ соответственно. Ранее автором выражения для $g_n(u,v)$ и $f_n(u,v)$ были преобразованы к виду (см. список литературы в [10])

$$g_n(u,v)=\sum_{k=0}^{v}(-1)^k\binom{n+k}{u+k+1}\binom{n}{v-k},$$

$$f_n(u,v)=\sum_{k=1}^{v}\sum_{s=0}^{v-k}\binom{u-k+1+s}{v-k}\binom{v-k}{s}\binom{n}{u+s+2}+g_n(u,v+1),$$

где теперь каждое слагаемое в суммах при соответствующих условиях делится на n. Тем не менее эти выражения отличаются от холловского вида (1.2).

В настоящей работе мы обобщаем тождество (1.3), параметризуя несобранную часть (1.1) после конечного числа этапов собирательного процесса с помощью функции бинарного веса числа (теорема 1). Посредством этой параметризации, свойств множества $W(q,x)$, полученных в [11], а также в данной работе (леммы 1–3), мы вычисляем в холловском виде показатели степеней для двух серий коммутаторов (теоремы 2 и 4):

$$[y,{}_ux,{}_vy],\quad [[y,{}_ux],[y,{}_vx]]$$

из собирательной формулы (1.1) для $(xy)^n$. Холловский вид показателей позволяет легко вычислить их по модулю n, когда n является простым числом (теорема 5). Также мы вычисляем в явном виде показатели степеней для коммутаторов вида

$$[[y,{}_ux,{}_vy],{}_{t_1}[y,{}_{u_1}x,{}_{v_1}y],\dots,{}_{t_h}[y,{}_{u_h}x,{}_{v_h}y]],$$

возникающих в собирательной формуле Ф. Холла (теорема 3).

Как следствие полученных результатов мы находим явный вид формулы (1.1) в двух случаях: группа G разрешима ступени 2 (теорема 2), коммутант группы G нильпотентен ступени 2 и y перестановочен с любым элементом коммутанта (теорема 4). Кроме того, мы выводим явную собирательную формулу для $(xy)^n$, когда G разрешима ступени 3 (следствие 1).

Явный вид показателей степеней коммутаторов, особенно по модулю простого n, оказывается полезным при исследовании конечных p-групп на регулярность [12].

2. Несобранная часть собирательной формулы

Пусть G — группа, $u, v \in G$. В работе [11, с. 613] было доказано тождество, эквивалентное следующему:

$$uv^m = v^m u \prod_{i=1}^{2^m-1} [u, {}_{\omega(i)}v] = v^m \prod_{i=0}^{2^m-1} [u, {}_{\omega(i)}v], \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1}$$

Пусть среди элементов $u_1, \dots, u_n \in G$, $n \geqslant 1$, элемент c присутствует m раз. Непосредственно из (2.1) вытекает следующее утверждение. После проведения одного этапа собирательного процесса (после группировки элементов c) в произведении $u_1 \dots u_n$ мы получим тождество

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = c^m \prod_{\substack{k=1\\ u_k \neq c}}^{n} \prod_{i=0}^{2^{H(k)}-1} [u_k, {}_{\omega(i)}c], \tag{2.2}$$

где $H(k)$ — количество вхождений элемента c, расположенных правее вхождения u_k на позиции k в произведении $u_1 \dots u_n$.

О п р е д е л е н и е 1. Для фиксированной последовательности коммутаторов $c_0, c_1, \dots, c_r$ будем говорить, что коммутаторы $[c_0, {}_{i_1}c_1, , \dots, {}_{i_r}c_r]$ и $[c_0, {}_{j_1}c_1, , \dots, {}_{j_r}c_r]$ одного вида тогда и только тогда, когда $i_1 = j_1, \dots, i_r = j_r$.

Теорема 1. *Пусть G — группа, $x, y \in G$. Применяя собирательный процесс к $(xy)^n$, $n \geqslant 1$, соберем сначала элементы $c_1 = x$, затем $c_2 = y$. Далее собираем коммутаторы в произвольном порядке и на этапе $r \geqslant 3$ собираем коммутаторы вида $c_r = [c_2, {}_{l_1}c_1, \dots {}_{l_{r-1}}c_{r-1}]$. Справедлива формула*

$$(xy)^n = c_1^{e_n^1} c_2^{e_n^2} \dots c_r^{e_n^r} \prod_{k=1}^{n} \prod_{i_1=0}^{2^{H_n^1}-1} \prod_{i_2=0}^{2^{H_n^2}-1} \dots \prod_{i_r=0}^{2^{H_n^r}-1} [c_2, {}_{\omega(i_1)}c_1, {}_{\omega(i_2)}c_2, \dots, {}_{\omega(i_r)}c_r]^{\rho(i_1,\dots,i_r)}, \tag{2.3}$$

$$e_n^r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \in W(2^{H_n(k;c_1)}-1, l_1)} \sum_{i_2 \in W(2^{H_n(k,i_1;c_2)}-1, l_2)} \dots \sum_{i_{r-1} \in W(2^{H_n(k,i_1,\dots,i_{r-2};c_{r-1})}-1, l_{r-1})} 1.$$

Здесь $\rho(i_1, \dots, i_r) \in \{0, 1\}$, числа $H_n^r = H_n(k, i_1, \dots, i_{r-1}; c_r)$ выражаются в виде

$$e_n^r - \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j_1 \in W(2^{H_n(m;c_1)}-1, l_1)} \dots \sum_{j_{r-1} \in W(2^{H_n(m,j_1,\dots,j_{t-2};c_{r-1})}-1, l_{r-1})} 1$$

$$-\sum_{q=1}^{r} \Delta_q \sum_{j_q \in W(i_q-1, l_q)} \sum_{j_{q+1} \in W(2^{H_n(k,i_1,\dots,i_{q-1},j_q;c_{q+1})}-1, l_{q+1})} \dots \sum_{j_{r-1} \in W(2^{H_n(k,i_1,\dots,i_{q-1},j_q,\dots,j_{r-2};c_{r-1})}-1, l_{r-1})} 1,$$

где $\Delta_q = \delta_{\omega(i_1),l_1} \dots \delta_{\omega(i_{q-1}),l_{q-1}}$ и $\delta_{i,j}$ — дельта Кронекера.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем первый этап собирательного процесса, используя (2.2):

$$(xy)^n = \prod_{k=1}^{n} xy = x^n \prod_{k=1}^{n} \prod_{i_1=0}^{2^{H_n^1}-1} [y, {}_{\omega(i_1)}x]^{\rho(i_1)};$$

здесь $H_n^1 = H_n(k; x) = n - k$ — количество вхождений x после элемента y на позиции k, и $\rho(i_1) = 1$ для любого i_1. Проведем второй этап собирательного процесса:

$$x^n \prod_{k=1}^{n} \prod_{i_1=0}^{2^{H_n^1}-1} [y, {}_{\omega(i_1)}x]^{\rho(i_1)} = x^n y^n \prod_{k=1}^{n} \prod_{i_1=0}^{2^{H_n^1}-1} \prod_{i_2=0}^{2^{H_n^2}-1} [y, {}_{\omega(i_1)}x, {}_{\omega(i_2)}y]^{\rho(i_1,i_2)};$$

здесь $H_n^2 = H_n(k, i_1; y) = n - k$ — количество вхождений y после элемента $[y,{}_{\omega(i_1)}x]$ на позиции (k, i_1), и $\rho(i_1, i_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho(i_1) = 0$ или коммутатор $[y,{}_{\omega(i_1)}x]$ имеет вид собранного коммутатора y, т. е. $\rho(i_1, i_2) = 0$ при $i_1 = 0$.

Рассуждая аналогично, после сбора коммутаторов вида $c_r = [c_2,{}_{l_1}c_1, \dots {}_{l_{r-1}}c_{r-1}]$ получим формулу (2.3), где $H_n^r = H_n(k, i_1, \dots, i_{r-1}; c_r)$ — количество коммутаторов вида c_r после коммутатора $[c_2,{}_{\omega(i_1)}c_1, \dots {}_{\omega(i_{r-1})}c_{r-1}]$ на позиции $(k, i_1, \dots, i_{r-1})$ в произведении

$$\prod_{m=1}^{n} \prod_{j_1=0}^{2^{H_n^1}-1} \prod_{j_2=0}^{2^{H_n^2}-1} \cdots \prod_{j_{r-1}=0}^{2^{H_n^{r-1}}-1} [c_2,{}_{\omega(j_1)}c_1,{}_{\omega(j_2)}c_2, \dots {}_{\omega(j_{r-1})}c_{r-1}]^{\rho(j_1,\dots,j_{r-1})}. \tag{2.4}$$

Далее, $\rho(i_1, \dots, i_r)$ обращается в ноль тогда и только тогда, когда $\rho(i_1, \dots, i_{r-1}) = 0$ или коммутатор $[c_2,{}_{\omega(i_1)}c_1, \dots {}_{\omega(i_{r-1})}c_{r-1}]$ на позиции $(k, i_1, \dots, i_{r-1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, в (2.4) имеет вид собранного коммутатора $c_r = [c_2,{}_{l_1}c_1, \dots {}_{l_{r-1}}c_{r-1}]$, т. е. $\omega(i_1) = l_1, \dots, \omega(i_{r-1}) = l_{r-1}$.

Непосредственно из формулы (2.3) следует равенство

$$e_n^r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \in W(2^{H_n(k;c_1)}-1, l_1)} \sum_{i_2 \in W(2^{H_n(k,i_1;c_2)}-1, l_2)} \cdots \sum_{i_{r-1} \in W(2^{H_n(k,i_1,\dots,i_{r-2};c_{r-1})}-1, l_{r-1})} \rho(i_1, \dots, i_{r-1}).$$

Если $\rho(i_1, \dots, i_r) = 0$, то для любых $i'_1, \dots, i'_r$, таких что $\omega(i_1) = \omega(i'_1), \dots, \omega(i_r) = \omega(i'_r)$, справедливо равенство $\rho(i'_1, \dots, i'_r) = 0$. Иными словами, если в несобранной части (2.3) коммутатор фиксированного вида имеет степень 1, то и все коммутаторы такого вида будут иметь степень 1. Значит, в полученной сумме $\rho(i_1, \dots, i_{r-1}) = 1$ для всех допустимых $i_1, \dots, i_{r-1}$.

Далее, $H_n(k, i_1, \dots, i_{r-1}; c_r)$ можно выразить как разность общего количества коммутаторов вида c_r в (2.4), т. е. e_n^r, и количества вхождений c_r, расположенных не правее коммутатора $[c_2,{}_{\omega(i_1)}c_1, \dots, {}_{\omega(i_{r-1})}c_{r-1}]$ на позиции $(k, i_1, \dots, i_{r-1})$. Выделим в произведении (2.4) коммутатор $[c_2,{}_{\omega(i_1)}c_1, \dots {}_{\omega(i_{r-1})}c_{r-1}]$ на позиции $(k, i_1, \dots, i_{r-1})$ и пересчитаем каждое вхождение $c_r = [c_2,{}_{l_1}c_1, \dots {}_{l_{r-1}}c_{r-1}]$, расположенное не правее него:

$$\begin{aligned}
&\prod_{m=1}^{k-1} \prod_{j_1=0}^{2^{H_n(m;c_1)}-1} \prod_{j_2=0}^{2^{H_n(m,j_1;c_2)}-1} \cdots \prod_{j_{r-1}=0}^{2^{H_n(m,j_1,\dots,j_{r-2};c_{r-1})}-1} [c_2,{}_{\omega(j_1)}c_1, \cdots, {}_{\omega(j_{r-1})}c_{r-1}]^{\rho(j_1,\dots,j_{r-1})} \\
&\quad \times \prod_{j_1=0}^{i_1-1} \prod_{j_2=0}^{2^{H_n(k,j_1;c_2)}-1} \cdots \prod_{j_{r-1}=0}^{2^{H_n(k,j_1,\dots,j_{r-2};c_{r-1})}-1} [c_2,{}_{\omega(j_1)}c_1, \dots, {}_{\omega(j_{r-1})}c_{r-1}]^{\rho(j_1,\dots,j_{r-1})} \\
&\qquad \times \prod_{j_2=0}^{i_2-1} \cdots \prod_{j_{r-1}=0}^{2^{H_n(k,i_1,\dots,j_{r-2};c_{r-1})}-1} [c_2,{}_{\omega(i_1)}c_1, \cdots, {}_{\omega(j_{r-1})}c_{r-1}]^{\rho(i_1,\dots,j_{r-1})} \times \cdots \\
&\qquad\qquad \times \prod_{j_{r-1}=0}^{i_{r-1}-1} [c_2,{}_{\omega(i_1)}c_1, \dots, {}_{\omega(j_{r-1})}c_{r-1}]^{\rho(i_1,\dots,j_{r-1})} \\
&\qquad\qquad\qquad \times [c_2,{}_{\omega(i_1)}c_1, \dots, {}_{\omega(i_{r-1})}c_{r-1}]^{\rho(i_1,\dots,i_{r-1})} \times \cdots .
\end{aligned}$$

Получаем искомое соотношение для H_n^r, учитывая, что равенства: $\omega(i_1) = l_1, \dots, \omega(i_{q-1}) = l_{q-1}$ являются необходимым условием присутствия коммутаторов вида $c_r = [c_2,{}_{l_1}c_1, \dots {}_{l_{r-1}}c_{r-1}]$ в произведении

$$\prod_{j_q=0}^{i_q-1} \cdots \prod_{j_{r-1}=0}^{2^{H_n(k,j_1,\dots,j_{r-2};c_{r-1})}-1} [c_2,{}_{\omega(i_1)}c_1, \dots, {}_{\omega(i_{q-1})}c_{q-1},{}_{\omega(j_q)}c_q,{}_{\omega(j_{r-1})}c_{r-1}]^{\rho(i_1,\dots,i_{q-1},j_q,\dots,j_{r-1})}.$$

Теорема доказана.

3. Комбинаторика множества $W(q, x)$

Напомним, что в [11] было введено множество $W(q, x) = \{i \mid \omega(i) = x, 0 \leqslant i \leqslant q\}$, $q, x \in \mathbb{Z}$. Для любых натуральных q, m, таких что $1 \leqslant m \leqslant \omega(q)$, обозначим через $L(q, m)$ номер разряда m-й единицы в двоичной записи q (мы отсчитываем единицы слева направо, а разряды нумеруем справа налево, начиная с нулевого). Пусть $m, q, x, u, v \in \mathbb{N}_0$, $u \leqslant m$, $v \leqslant m$. В [11] были доказаны следующие формулы:

$$|W(2^m - 1, x)| = \binom{m}{x}, \tag{3.1}$$

$$|W(q, x)| = \sum_{k=1}^{\omega(q)} \binom{L(q, k)}{x - k + 1} + \delta_{\omega(q), x}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{j \in W(2^m - 1, v)} |W(j - 1, u)| = \sum_{k=1}^{v} \sum_{i=v-k}^{m-k} \binom{m - i - 1}{k - 1} \binom{i}{u - k + 1} \binom{i}{v - k}. \tag{3.3}$$

Как и в работе [10], мы используем биномиальный коэффициент с областью определения, расширенной на все целые n, k:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (n - i), & \text{если } k \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } k < 0. \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Свойства расширенного биномиального коэффициента, а также мультиномиального коэффициента, используемые нами далее, могут быть найдены в [10, с. 882].

Формула (3.3) позволила вычислить показатели степеней для некоторых коммутаторов в собирательной формуле Ф. Холла в явном виде. В следующей лемме мы выводим новую версию формулы (3.3), которая позволит вычислить показатели степеней уже в холловском виде (1.2).

Лемма 1. *Для любых целых неотрицательных m, u, v имеет место формула*

$$\sum_{j \in W(2^m - 1, v)} |W(j - 1, u)| = \sum_{i=0}^{u+v} \binom{m}{i} \sum_{k=1}^{v} \binom{i - k}{i - v} \binom{v - k}{i - u - 1}. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что левая часть (3.4) равна мощности множества

$$\{(\mu_1, \mu_2) \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}^2 \mid \omega(\mu_1) = u;\ \omega(\mu_2) = v;\ \mu_1 < \mu_2\}.$$

Тогда согласно [10, теорема 4] получаем равенство для натуральных m, u, v:

$$\sum_{j \in W(2^m - 1, v)} |W(j - 1, u)| = \sum_{i=1}^{u+v} \binom{m}{i} \sum_{k=1}^{v} \binom{i - k}{i - u - 1, i - v, u + v - i - k + 1}.$$

Поменяв местами параметры $i - u - 1$ и $i - v$ в мультиномиальном коэффициенте, выразим его через произведение биномиальных коэффициентов:

$$\binom{i - k}{i - v} \binom{v - k}{i - u - 1} \binom{u + v - i - k + 1}{u + v - i - k + 1}.$$

Имеем равенство

$$\binom{v - k}{i - u - 1} \binom{(v - k) - (i - u - 1)}{(v - k) - (i - u - 1)} = \binom{v - k}{i - u - 1},$$

поскольку $v-k\geqslant 0$, и при $(v-k)-(i-u-1)\geqslant 0$ биномиальный коэффициент $\binom{(v-k)-(i-u-1)}{(v-k)-(i-u-1)}$ равен 1, а при $(v-k)-(i-u-1)<0$ биномиальный коэффициент $\binom{v-k}{i-u-1}$ равен 0.

Распространяем суммирование по i до 0, добавив нулевые слагаемые, и получаем в итоге формулу (3.4) для любых натуральных m,u,v. Остается заметить, что если $m=0$ или $v=0$, то обе части (3.4) равны 0, а если $u=0$ и $v\geqslant 1$, $m\geqslant 1$, то обе части (3.4) равны $\binom{m}{v}$.

Лемма доказана.

Для вычисления показателей степеней коммутаторов из теоремы 3 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. *Для любых целых неотрицательных m,v имеет место равенство*

$$W(2^m-1,v)=\Big\{\sum_{k=1}^{v}2^{s_k}\mid m-1\geqslant s_1\geqslant v-1, s_1-1\geqslant s_2\geqslant v-2,\dots,s_{v-1}-1\geqslant s_v\geqslant 0\Big\}. \quad (3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через M множество в правой части (3.5). Доказательство разобьем на три случая. Если $0\leqslant m<v$, то по определению имеем $W(2^m-1,v)=M=\varnothing$. Если $m\geqslant 0$ и $v=0$, то $W(2^m-1,v)=M=\{0\}$.

Рассмотрим случай $m\geqslant v\geqslant 1$. Чтобы доказать, что множества M и $W(2^m-1,v)$ равны, достаточно убедиться, что $M\subseteq W(2^m-1,v)$, все элементы в M различны, мощность M равна $|W(2^m-1,v)|=\binom{m}{v}$.

Известно, что любое натуральное число i имеет уникальную двоичную запись, точно определяемую номерами разрядов единиц. Иными словами, как i определяет значения $L(i,k)$, $k=1,\dots,\omega(i)$, так и набор значений $L(i,k)$ однозначно определяет натуральное число i, при этом $i=\sum_{k=1}^{\omega(i)}2^{L(i,k)}$.

Пусть $i\in W(2^m-1,v)$. Найдем возможные значения $L(i,k)$, $k=1,\dots,v$. Для двоичной записи числа i используются ровно v единиц и не более m разрядов (от нулевого до $(m-1)$-го). Значит, первая единица (считая слева) может иметь номер разряда от $v-1$ до $m-1$, т. е. $m-1\geqslant L(i,1)\geqslant v-1$. Считая первую единицу зафиксированной, для второй имеем $L(i,1)-1\geqslant L(i,2)\geqslant v-2$, так как вторая единица не может находиться левее первой. Проведя аналогичные рассуждения для остальных единиц, получаем

$$\begin{gathered}m-1\geqslant L(i,1)\geqslant v-1,\\ L(i,1)-1\geqslant L(i,2)\geqslant v-2,\\ \dots\\ L(i,v-2)-1\geqslant L(i,v-1)\geqslant 1,\\ L(i,v-1)-1\geqslant L(i,v)\geqslant 0.\end{gathered}$$

Таким образом, $M\subseteq W(2^m-1,v)$ и все элементы в M различны. Используя известную формулу суммирования

$$\sum_{k=a}^{b}\binom{k}{a}=\sum_{k=0}^{b}\binom{k}{a}=\binom{b+1}{a+1},\quad a,b\in\mathbb{N}_0, \quad (3.6)$$

покажем, что $|M|=\binom{m}{v}$:

$$\begin{aligned}|M|&=\sum_{s_1=v-1}^{m-1}\cdots\sum_{s_{v-1}=1}^{s_{v-2}-1}\sum_{s_v=0}^{s_{v-1}-1}1=\sum_{s_1=v-1}^{m-1}\cdots\sum_{s_{v-1}=1}^{s_{v-2}-1}\sum_{s_v=0}^{s_{v-1}-1}\binom{s_v}{0}\\ &=\sum_{s_1=v-1}^{m-1}\cdots\sum_{s_{v-1}=1}^{s_{v-2}-1}\binom{s_{v-1}}{1}=\dots=\sum_{s_1=v-1}^{m-1}\binom{s_1}{v-1}=\binom{m}{v}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $f(x)$ — произвольная функция переменной x и, быть может, переменных $x_1,\dots,x_n$, не зависящих от параметра i. Тогда для любых целых неотрицательных m,v,u имеет место равенство*

$$\sum_{i\in W(2^m-1,v)} f(|W(i-1,u)|)=\sum_{s_1=v-1}^{m-1}\sum_{s_2=v-2}^{s_1-1}\cdots\sum_{s_v=0}^{s_{v-1}-1} f\Biggl(\sum_{k=1}^{v}\binom{s_k}{u-k+1}\Biggr).$$

Доказательство. Поскольку $f(|W(i-1,u)|)$ зависит от $|W(i-1,u)|$ и не зависит от i ни в каком другом виде, из предыдущей леммы следует равенство

$$\sum_{i\in W(2^m-1,v)} f(|W(i-1,u)|)=\sum_{s_1=v-1}^{m-1}\sum_{s_2=v-2}^{s_1-1}\cdots\sum_{s_v=0}^{s_{v-1}-1} f\Biggl(\Bigl|W\Bigl(\sum_{t=1}^{v}2^{s_t}-1,u\Bigr)\Bigr|\Biggr).$$

Согласно (3.2) и формуле $|W(q-1,x)|=|W(q,x)|-\delta_{\omega(q),x}$ получаем

$$|W(\sum_{k=1}^{v}2^{s_k}-1,u)|=\sum_{k=1}^{v}\binom{L(\sum_{t=1}^{v}2^{s_t},k)}{u-k+1}.$$

Наконец, из доказательства предыдущей леммы ясно, что $L(\sum_{t=1}^{v}2^{s_t},k)=s_k$.

Лемма доказана.

4. Явный вид показателей степеней коммутаторов

Теорема 2. *Пусть G — группа, $x,y\in G$. Тогда в собирательной формуле Ф. Холла для $(xy)^n$, $n\in\mathbb{N}$, показатель степени коммутатора $[y,{}_ux,{}_vy]$, где $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, и $u=0$ при $v=0$, равен*

$$g_n(u,v)=\sum_{i=1}^{u+v+1}\binom{n}{i}\binom{i-1}{u}\binom{u}{i-v-1}. \tag{4.1}$$

В частности, если $[\Gamma_2(G),\Gamma_2(G)]=1$, то

$$(xy)^n=x^ny^n\prod_{u=1}^{n-1}\prod_{v=0}^{n-1}[y,{}_ux,{}_vy]^{g_n(u,v)}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1, в которой в качестве собранных коммутаторов рассмотрим любой набор $c_1=x,c_2=y,c_3,\dots,c_{r-1},c_r=[y,{}_ux,{}_vy]$. Коммутатор c_r выражается через $c_1,\dots,c_{r-1}$ единственным образом: $c_r=[y,{}_uc_1,{}_vc_2,{}_0c_3\dots,{}_0c_{r-1}]$. Тогда

$$e_n^r=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1\in W(2^{H_n^1}-1,u)}\sum_{i_2\in W(2^{H_n^2}-1,v)}\sum_{i_3\in W(2^{H_n^3}-1,0)}\cdots\sum_{i_{r-1}\in W(2^{H_n^{r-1}}-1,0)}1.$$

Поскольку $W(q,0)=\{0\}$ для любого целого $q\geqslant 0$, имеем

$$e_n^r=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1\in W(2^{n-k}-1,u)}\sum_{i_2\in W(2^{n-k}-1,v)}1=\sum_{k=1}^{n}|W(2^{n-k}-1,u)||W(2^{n-k}-1,v)|.$$

Из формулы (3.1) следует, что

$$e_n^r=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k}{u}\binom{n-k}{v}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{u}\binom{k}{v}.$$

Наконец, используя тождество (30) в [10] для произведения $\binom{k}{u}\binom{k}{v}$ и формулу суммирования (3.6), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{u}\binom{k}{v}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=u}^{u+v}\binom{k}{i}\binom{i}{i-u,i-v,u+v-i}=\sum_{i=u}^{u+v}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{i}\binom{i}{i-u}\binom{u}{i-v}\binom{u+v-i}{u+v-i}$$
$$=\sum_{i=u}^{u+v}\binom{n}{i+1}\binom{i}{i-u}\binom{u}{i-v}=\sum_{i=0}^{u+v}\binom{n}{i+1}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v}. \tag{4.3}$$

Если $[\Gamma_2(G),\Gamma_2(G)]=1$, то все коммутаторы от x и y веса $\geqslant 2$ перестановочны друг с другом. Значит, тождество (1.3), являющееся результатом двух этапов собирательного процесса Ф. Холла, примет вид (4.2), где для удобства записи коммутаторы сгруппированы по виду, а не по весу.

Теорема 3. *Пусть G — группа, $x,y\in G$. Если в собирательной формуле Ф. Холла для $(xy)^n$, $n\in\mathbb{N}$, присутствует коммутатор $c_r=[[y,{}_ux,{}_vy],{}_{t_1}[y,{}_{u_1}x,{}_{v_1}y],\ldots,{}_{t_h}[y,{}_{u_h}x,{}_{v_h}y]]$, где $t_1\geqslant 1,\ldots,t_h\geqslant 1$, и коммутаторы $y,[y,{}_{u_1}x,{}_{v_1}y],\ldots,[y,{}_{u_h}x,{}_{v_h}y]$ попарно формально различны, то показатель степени c_r определяется как*

$$e_n^r=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s_1^1=u-1}^{n-k-1}\sum_{s_2^1=u-2}^{s_1^1-1}\cdots\sum_{s_u^1=0}^{s_{u-1}^1-1}\sum_{s_1^2=v-1}^{n-k-1}\sum_{s_2^2=v-2}^{s_1^2-1}\cdots\sum_{s_v^2=0}^{s_{v-1}^2-1}\prod_{a=1}^{h}B(a), \tag{4.4}$$

где

$$B(a)=$$
$$=\binom{\displaystyle\sum_{m=k}^{n}\binom{n-m}{u_a}\binom{n-m}{v_a}-\binom{n-k}{v_a}\sum_{m=1}^{u}\binom{s_m^1}{u_a-m+1}-\delta_{u,u_a}\sum_{m=1}^{v}\binom{s_m^2}{v_a-m+1}-\delta_{u,u_a}\delta_{v,v_a}}{t_a}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой 1, в которой в качестве собранных коммутаторов рассмотрим любой набор

$$c_1=x,c_2=y,c_3,\ldots,c_{r-1},c_r=[[y,{}_ux,{}_vy],{}_{t_1}[y,{}_{u_1}x,{}_{v_1}y],\ldots,{}_{t_h}[y,{}_{u_h}x,{}_{v_h}y]] \tag{4.5}$$

такой, что $c_{l_1}=[y,{}_{u_1}x,{}_{v_1}y],\ldots,c_{l_h}=[y,{}_{u_h}x,{}_{v_h}y]$ для некоторых $2<l_1<\ldots<l_h<r$. Коммутатор c_r можно выразить через $c_1,\ldots,c_{r-1}$ следующим образом: $c_r=[c_2,{}_{d_1}c_1,\ldots,{}_{d_{r-1}}c_{r-1}]$, где $d_1=u,d_2=v,d_{l_1}=t_1\ldots,d_{l_h}=t_h$, а остальные числа d_s равны 0. Тогда

$$e_n^r=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1\in W(2^{H_n^1}-1,d_1)}\cdots\sum_{i_{r-1}\in W(2^{H_n^{r-1}}-1,d_{r-1})}1.$$

Если некоторое число d_s равно нулю, то $W(2^{H_n^s}-1,d_s)=\{0\}$, откуда i_s принимает только значение 0. Таким образом,

$$e_n^r=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1\in W(2^{H_n^1}-1,u)}\sum_{i_2\in W(2^{H_n^2}-1,v)}\sum_{i_{l_1}\in W(2^{H_n^{l_1}}-1,t_1)}\cdots\sum_{i_{l_h}\in W(2^{H_n^{l_h}}-1,t_h)}1. \tag{4.6}$$

Рассмотрим коммутатор $c_{l_s}=[y,{}_{u_s}x,{}_{v_s}y]$ для некоторого s. Через $c_1,\ldots,c_{l_s-1}$ он выражается следующим образом: $c_{l_s}=[y,{}_{u_s}x,{}_{v_s}y,{}_0c_3,\ldots,{}_0c_{l_s-1}]$. Значит, согласно теореме 1 мы имеем

$$H_n^{l_s} = H_n(k, i_1, \ldots, i_{l_s-1}; c_{l_s}) = e_n^{l_s} - \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j_1 \in W(2^{H_n(m;x)}-1, u_s)} \sum_{j_2 \in W(2^{H_n(m, j_1; y)}-1, v_s)} 1$$
$$- \sum_{j_1 \in W(i_1-1, u_s)} \sum_{j_2 \in W(2^{H_n(k, j_1; y)}-1, v_s)} 1 - \delta_{\omega(i_1), u_s} \sum_{j_2 \in W(i_2-1, v_s)} 1$$
$$- \sum_{q=3}^{l_s} \delta_{\omega(i_1), u_s} \delta_{\omega(i_2), v_s} \prod_{c=3}^{q-1} \delta_{\omega(i_c), 0} \sum_{j_q \in W(i_q-1, 0)} \cdots \sum_{j_{l_s-1} \in W(2^{H_n(k, i_1, \ldots, i_{q-1}, j_q, \ldots, j_{l_s-2}; c_{l_s-1})}-1, 0)} 1.$$

Поскольку $l_s \geqslant l_1 \geqslant 3$, в сумме по q обязательно присутствует слагаемое при $q = l_1$, равное $\delta_{\omega(i_1), u_s} \delta_{\omega(i_2), v_s} \delta_{\omega(i_3), 0} \ldots \delta_{\omega(i_{l_1-1}), 0} = \delta_{\omega(i_1), u_s} \delta_{\omega(i_2), v_s}$. Остальные слагаемые в сумме равны нулю, так как при $q < l_1$ множество $W(i_q - 1, 0) = W(-1, 0)$ пусто, а при $q > l_1$ в произведении по c присутствует множитель $\delta_{\omega(i_{l_1}), 0} = \delta_{t_1, 0} = 0$. Исходя из этого,

$$H_n^{l_s} = H_n(k, i_1, \ldots, i_{l_s-1}; c_{l_s}) = e_n^{l_s} - \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j_1 \in W(2^{n-m}-1, u_s)} \sum_{j_2 \in W(2^{n-m}-1, v_s)} 1$$
$$- \sum_{j_1 \in W(i_1-1, u_s)} \sum_{j_2 \in W(2^{n-k}-1, v_s)} 1 - \delta_{u, u_s} |W(i_2 - 1, v_s)| - \delta_{u, u_s} \delta_{v, v_s}$$

используем формулу (3.1)

$$= e_n^{l_s} - \sum_{m=1}^{k-1} \binom{n-m}{u_s} \binom{n-m}{v_s} - |W(i_1 - 1, u_s)| \binom{n-k}{v_s} - \delta_{u, u_s} |W(i_2 - 1, v_s)| - \delta_{u, u_s} \delta_{v, v_s}.$$

Из доказательства предыдущей теоремы получаем

$$e_n^{l_s} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-m}{u_s} \binom{n-m}{v_s}.$$

Значит, $H_n^{l_s} = H_n(k, i_1, \ldots, i_{l_s-1}; c_{l_s})$ можно выразить следующим образом:

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{n-m}{u_s} \binom{n-m}{v_s} - |W(i_1 - 1, u_s)| \binom{n-k}{v_s} - \delta_{u, u_s} |W(i_2 - 1, v_s)| - \delta_{u, u_s} \delta_{v, v_s}. \tag{4.7}$$

Поскольку (4.7) не зависит от индексов i_q, $q \geqslant 3$, равенство (4.6) преобразуется к виду

$$e_n^r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \in W(2^{n-k}-1, u)} \sum_{i_2 \in W(2^{n-k}-1, v)} \binom{H_n^{l_1}}{t_1} \cdots \binom{H_n^{l_h}}{t_h}. \tag{4.8}$$

Применяя лемму 3 к суммам по i_1 и i_2, выводим (4.4).

Если последовательность (4.5) получена в ходе собирательного процесса Ф. Холла (в частности, коммутаторы в ней упорядочены по возрастанию веса), то найденное выражение e_n^r является показателем степени коммутатора $[[y, {}_u x, {}_v y], {}_{t_1}[y, {}_{u_1} x, {}_{v_1} y], \ldots, {}_{t_h}[y, {}_{u_h} x, {}_{v_h} y]]$ в собирательной формуле Ф. Холла.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть G — группа, $x, y \in G$. Если $[[\Gamma_2(G), \Gamma_2(G)], [\Gamma_2(G), \Gamma_2(G)]] = 1$, то справедлива формула*

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{u=1}^{n-1}\prod_{v=0}^{n-1}[y, {}_u x, {}_v y]^{\sum_{i=1}^{u+v+1}\binom{n}{i}\binom{i-1}{u}\binom{u}{i-v-1}}$$

$$\times \prod_{\substack{n-1\geqslant u\geqslant 1; n-1\geqslant v\geqslant 1;\\ (t_{1,0},\ldots,t_{n-1,n-1})\in M_{u,v}}} [[y, {}_u x, {}_v y], {}_{t_{1,0}}[y,x], {}_{t_{1,1}}[y,x,y], \ldots, {}_{t_{n-1,n-1}}[y, {}_{n-1}x, {}_{n-1}y]]^{e(t_{1,0},\ldots,t_{n-1,n-1})},$$

$$e(t_{1,0},\ldots,t_{n-1,n-1}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s_1^1=u-1}^{n-k-1}\sum_{s_2^1=u-2}^{s_1^1-1}\cdots\sum_{s_u^1=0}^{s_{u-1}^1-1}\sum_{s_1^2=v-1}^{n-k-1}\sum_{s_2^2=v-2}^{s_1^2-1}\cdots\sum_{s_v^2=0}^{s_{v-1}^2-1}\prod_{a=1}^{n-1}\prod_{b=0}^{n-1}B(a,b), \tag{4.9}$$

где

$$B(a,b) =$$
$$= \binom{\displaystyle\sum_{m=k}^{n}\binom{n-m}{a}\binom{n-m}{b} - \binom{n-k}{b}\sum_{m=1}^{u}\binom{s_m^1}{a-m+1} - \delta_{u,a}\sum_{m=1}^{v}\binom{s_m^2}{b-m+1} - \delta_{u,a}\delta_{v,b}}{t_{a,b}},$$

набор $(t_{1,0},\ldots,t_{n-1,n-1}) \in M_{u,v}$ тогда и только тогда, когда среди целых чисел $t_{i,j} \geqslant 0$ найдется хотя бы одно $\geqslant 1$, и, если набор имеет вид $(0,\ldots,0,t_{p,q},\ldots)$, где $t_{p,q} \geqslant 1$, то выполнено условие: $u > p$ либо $u = p$ и $v > q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим к качестве собираемых коммутаторов (4.5) последовательность

$$x, y, [y,x], [y,x,y], \ldots, [y, x, {}_{n-1}y], [y, {}_2x, y], \ldots, [y, {}_{n-1}x, {}_{n-1}y] \ldots .$$

Согласно теореме 1 и доказательству теоремы 2 выводим

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{u=1}^{n-1}\prod_{v=0}^{n-1}[y, {}_u x, {}_v y]^{\sum_{i=1}^{u+v+1}\binom{n}{i}\binom{i-1}{u}\binom{u}{i-v-1}}$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\prod_{i_1=0}^{2^{H_n^1}-1}\cdots\prod_{i_{r-1}=0}^{2^{H_n^{r-1}}-1}[y, {}_{\omega(i_1)}x, {}_{\omega(i_2)}y, {}_{\omega(i_3)}[y,x,y], \ldots, {}_{\omega(i_{r-1})}[y, {}_{n-1}x, {}_{n-1}y]]^{\rho(i_1,\ldots,i_{r-1})}.$$

Поскольку $[[\Gamma_2(G), \Gamma_2(G)], [\Gamma_2(G), \Gamma_2(G)]] = 1$, все коммутаторы в полученной несобранной части перестановочны друг с другом и порядок их сбора не важен. Любой из них будет иметь следующий вид:

$$[[y, {}_u x, {}_v y], {}_{t_{1,0}}[y,x], {}_{t_{1,1}}[y,x,y], \ldots, {}_{t_{n-1,n-1}}[y, {}_{n-1}x, {}_{n-1}y]], \tag{4.10}$$

где хотя бы одно из целых неотрицательных чисел $t_{i,j}$ больше нуля, первый ненулевой параметр $t_{p,q}$ удовлетворяет условию: коммутаторы $[y, {}_p x, {}_q y]$ собирались раньше $[y, {}_u x, {}_v y]$.

Очевидно, что указанные условия являются необходимыми, но не достаточными: существует такой допустимый набор параметров $(t_{1,0},\ldots,t_{n-1,n-1})$, что соответствующий этому набору коммутатор отсутствует в несобранной части. Убедимся, что показатель степени такого коммутатора равен нулю.

Согласно теореме 1 каждый набор значений индексов $k, i_1, \ldots, i_{r-1}$ в формуле

$$e_n^r = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1\in W(2^{H_n(k;c_1)}-1, l_1)}\sum_{i_2\in W(2^{H_n(k,i_1;c_2)}-1, l_2)}\cdots\sum_{i_{r-1}\in W(2^{H_n(k,i_1,\ldots,i_{r-2};c_{r-1})}-1, l_{r-1})} 1 \tag{4.11}$$

взаимно однозначно соответствует определенному множителю вида $[c_2, {}_{l_1}c_1, \dots, {}_{l_{r-1}}c_{r-1}]$ в несобранной части. Предположим, что в несобранной части отсутствуют коммутаторы вида $[c_2, {}_{l_1}c_1, \dots, {}_{l_{r-1}}c_{r-1}]$, но $e_n^r > 0$. Тогда в (4.11) существует допустимый набор индексов $k, i_1, \dots, i_{r-1}$ и соответствующее ему слагаемое, равное 1. Отсюда следует, что коммутатор в несобранной части на позиции $(k, i_1, \dots, i_{r-1})$ имеет степень $\rho(i_1, \dots, i_{r-1}) = 0$; это согласно доказательству теоремы 1 возможно тогда и только тогда, когда среди следующих пар найдется пара коммутаторов одного вида:

$$\begin{array}{ll}
[y, {}_ux, {}_vy, {}_{t_{1,0}}[y,x], \dots, {}_{t_{n-1,n-2}}[y, {}_{n-1}x, {}_{n-2}y]], & [y, {}_{n-1}x, {}_{n-1}y, {}_0[y,x], \dots, {}_0[y, {}_{n-1}x, {}_{n-2}y]]; \\
[y, {}_ux, {}_vy, {}_{t_{1,0}}[y,x], \dots, {}_{t_{n-1,n-3}}[y, {}_{n-1}x, {}_{n-3}y]], & [y, {}_{n-1}x, {}_{n-2}y, {}_0[y,x], \dots, {}_0[y, {}_{n-1}x, {}_{n-3}y]]; \\
\dots & \\
[y, {}_ux, {}_vy], & [y, {}_1x, {}_0y].
\end{array}$$

Предположим, что коммутаторы $[y, {}_ux, {}_vy, {}_{t_{1,0}}[y,x], \dots, {}_{t_{i,j}}[y, {}_ix, {}_jy]]$ и $[y, {}_ax, {}_by, {}_0[y,x], \dots, {}_0[y, {}_ix, {}_jy]]$ одного вида. Тогда $u = a, v = b, t_{1,0} = \dots = t_{i,j} = 0$ и коммутатор (4.10) примет вид

$$[y, {}_ux, {}_vy, {}_0[y,x], \dots, {}_0[y, {}_ix, {}_jy], {}_{t_{a,b}}[y, {}_ux, {}_vy], \dots, {}_{t_{n-1,n-1}}[y, {}_{n-1}x, {}_{n-1}y]].$$

Таким образом, первый коммутатор $[y, {}_px, {}_qy]$ с ненулевым параметром $t_{p,q}$, а именно $[y, {}_ux, {}_vy]$ с параметром $t_{a,b}$, собирался позже коммутатора $[y, {}_ux, {}_vy]$. Получаем противоречие с наложенными выше условиями на $u, v, t_{1,0}, \dots, t_{n-1,n-1}$.

Для завершения доказательства остается использовать формулу для показателя степени $e(t_{1,0}, \dots, t_{n-1,n-1})$, полученную в предыдущей теореме. Заметим, что в теореме рассматривался коммутатор c_r с параметрами $t_1 \geqslant 1, \dots, t_h \geqslant 1$, а среди параметров $t_{1,0}, \dots, t_{n-1,n-1}$ могут оказаться нулевые. Противоречия нет, поскольку в произведении по a, b в (4.9) биномиальный коэффициент с параметром $t_{a,b} = 0$ равен 1 по определению.

Следствие доказано.

Теорема 4. *Пусть G — группа, $x, y \in G$. Тогда в собирательной формуле Ф. Холла для $(xy)^n$, $n \in \mathbb{N}$, показатель степени коммутатора $[[y, {}_ux], [y, {}_vx]]$, $u > v \geqslant 1$, равен*

$$f_n(u,v) = \sum_{i=1}^{u+v+2} \binom{n}{i} \left(\binom{i-1}{v+1}\binom{v+1}{i-u-1} + \sum_{k=1}^{v} \binom{i-k-1}{i-v-1}\binom{v-k}{i-u-2} \right). \tag{4.12}$$

В частности, если $[\Gamma_2(G), \Gamma_2(G), \Gamma_2(G)] = 1$ и $y \in C_G(\Gamma_2(G))$, то

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_ix]^{\binom{n}{i+1}} \prod_{n-1 \geqslant u > v \geqslant 1} [[y, {}_ux], [y, {}_vx]]^{f_n(u,v)}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Поскольку в собирательной формуле Ф. Холла коммутаторы собираются по возрастанию веса, имеет место неравенство $u > v$.

Используем формулу (4.8) из теоремы 3 для $c_r = [[y, {}_ux], [y, {}_vx]]$. Справедливо равенство

$$e_n^r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \in W(2^{n-k}-1, u)} \sum_{i_2 \in W(2^{n-k}-1, 0)} \binom{H_n^{l_1}}{0} \dots \binom{H_n^{l_q}}{1} \dots \binom{H_n^{l_h}}{0},$$

где $H_n^{l_q}$ можно выразить следующим образом:

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{n-m}{v}\binom{n-m}{0} - |W(i_1 - 1, v)| \binom{n-k}{0} - \delta_{u,v}|W(i_2 - 1, 0)| - \delta_{u,v}\delta_{0,0}.$$

Следовательно,

$$e_n^r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \in W(2^{n-k}-1,u)} \left(\sum_{m=k}^{n} \binom{n-m}{v} - |W(i_1-1,v)| \right).$$

Заметим, что

$$\sum_{i_1 \in W(2^{n-k}-1,u)} |W(i_1-1,v)| + \sum_{i_1 \in W(2^{n-k}-1,v)} |W(i_1-1,u)| + \delta_{u,v}\binom{n-k}{u} = \binom{n-k}{u}\binom{n-k}{v},$$

поскольку суммы равны соответственно мощностям множеств

$$\{(\mu_1,\mu_2) \in \{0,\ldots,2^{n-k}-1\}^2 \mid \omega(\mu_1)=u;\ \omega(\mu_2)=v;\ \mu_1>\mu_2\},$$
$$\{(\mu_1,\mu_2) \in \{0,\ldots,2^{n-k}-1\}^2 \mid \omega(\mu_1)=u;\ \omega(\mu_2)=v;\ \mu_1<\mu_2\}$$

и выражения $\delta_{u,v}\binom{n-k}{u}$, $\binom{n-k}{u}\binom{n-k}{v}$ равны соответственно мощностям множеств

$$\{(\mu_1,\mu_2) \in \{0,\ldots,2^{n-k}-1\}^2 \mid \omega(\mu_1)=u;\ \omega(\mu_2)=v;\ \mu_1=\mu_2\},$$
$$\{(\mu_1,\mu_2) \in \{0,\ldots,2^{n-k}-1\}^2 \mid \omega(\mu_1)=u;\ \omega(\mu_2)=v\}.$$

Таким образом,

$$e_n^r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \in W(2^{n-k}-1,v)} |W(i_1-1,u)| + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \in W(2^{n-k}-1,u)} \sum_{m=k}^{n} \binom{n-m}{v} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{u}\binom{n-k}{v}.$$

Используя равенство (3.4) и формулу суммирования (3.6), преобразуем первую сумму:

$$\sum_{k_0=1}^{n} \sum_{i_1 \in W(2^{n-k_0}-1,v)} |W(i_1-1,u)| = \sum_{k_0=1}^{n} \sum_{i=0}^{u+v} \binom{n-k_0}{i} \sum_{k=1}^{v} \binom{i-k}{i-v}\binom{v-k}{i-u-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{u+v} \sum_{k_0=0}^{n-1} \binom{k_0}{i} \sum_{k=1}^{v} \binom{i-k}{i-v}\binom{v-k}{i-u-1} = \sum_{i=0}^{u+v} \binom{n}{i+1} \sum_{k=1}^{v} \binom{i-k}{i-v}\binom{v-k}{i-u-1}.$$

Теперь преобразуем вторую сумму:

$$\sum_{k_0=1}^{n} \sum_{i_1 \in W(2^{n-k_0}-1,u)} \sum_{k=k_0}^{n} \binom{n-k}{v} = \sum_{k_0=1}^{n} \binom{n-k_0}{u} \sum_{k=k_0}^{n} \binom{n-k}{v} = \sum_{k_0=0}^{n-1} \binom{k_0}{u} \sum_{k=n-k_0}^{n} \binom{n-k}{v}$$
$$= \sum_{k_0=0}^{n-1} \binom{k_0}{u} \sum_{k=0}^{k_0} \binom{k}{v} = \sum_{k_0=0}^{n-1} \binom{k_0}{u}\binom{k_0+1}{v+1} = \sum_{k_0=0}^{n-1} \binom{k_0}{u}\binom{k_0}{v+1} + \sum_{k_0=0}^{n-1} \binom{k_0}{u}\binom{k_0}{v}.$$

Наконец, преобразуем третью сумму:

$$\sum_{k_0=1}^{n} \binom{n-k_0}{u}\binom{n-k_0}{v} = \sum_{k_0=0}^{n-1} \binom{k_0}{u}\binom{k_0}{v}.$$

Комбинируя полученные результаты и принимая во внимание (4.3), выводим

$$f_n(u,v) = \sum_{i=0}^{u+v} \binom{n}{i+1} \sum_{k=1}^{v} \binom{i-k}{i-v}\binom{v-k}{i-u-1} + \sum_{i=0}^{u+v+1} \binom{n}{i+1}\binom{i}{v+1}\binom{v+1}{i-u}.$$

В первой сумме индекс i можно распространить до $u+v+1$, так как $\binom{v-k}{v}=0$ для любого k от 1 до v. Значит, получаем (4.12).

Перейдем к доказательству собирательной формулы. Поскольку $y \in C_G(\Gamma_2(G))$, тождество (1.3) принимает вид

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{2^{n-k}-1} [y, {}_{\omega(i)}x], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Условие $[\Gamma_2(G), \Gamma_2(G), \Gamma_2(G)] = 1$ означает, что при собирании коммутаторов $[y, {}_v x]$ по возрастанию веса возникнут только коммутаторы вида $[[y, {}_u x], [y, {}_v x]]$, где $n-1 \geqslant u > v \geqslant 1$. Согласно теореме 2 показатель степени коммутатора $[y, {}_{\omega(i)}x]$ в собирательной формуле Ф. Холла определяется по формуле $g_n(i,0) = \binom{n}{i+1}$. Таким образом, получаем (4.13).

Теорема доказана.

5. Показатели степеней коммутаторов по модулю простого n

Теперь, используя найденный в теоремах 2 и 4 холловский вид для показателей степеней $g_n(u,v)$ и $f_n(u,v)$, мы легко вычислим $g_p(u,v)$ и $f_p(u,v)$ по модулю простого числа p. Нам понадобятся известные свойства биномиальных коэффициентов, приведенные ниже.

Предложение. *Для любого простого p справедливы сравнения*

$$\binom{p}{u} \equiv 0 \pmod p, \; u \in \overline{1, p-1}; \quad \binom{p-1}{u} \equiv (-1)^u \pmod p, \; u \in \overline{0, p-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению имеем

$$\binom{p}{u} = \frac{1}{u!} \prod_{i=0}^{u-1} (p-i) = \frac{p(p-1)\dots(p-u+1)}{u!}.$$

Числитель полученной дроби делится на p, а знаменатель не делится. Далее, если $u \geqslant 1$, то

$$\binom{p-1}{u} = \frac{1}{u!} \prod_{i=0}^{u-1} (p-1-i) = \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-u)}{u!} \equiv \frac{(-1)^u u!}{u!} \pmod p.$$

При $u=0$ полученное сравнение очевидно.

Предложение доказано.

Теорема 5. *Пусть p — простое число, u, v — целые, и $w_1 = u+v+1-p$, $w_2 = u+v+2-p$. Тогда имеют место сравнения по модулю p:*

$$g_p(u,v) \equiv (-1)^u \binom{u}{w_1} \equiv (-1)^v \binom{v}{w_1}, \quad u, v \in \overline{0, p-1}, \; \text{где } u=0 \text{ при } v=0;$$

$$f_p(u,v) \equiv (-1)^v \left(-\binom{v+1}{w_2} + \binom{v}{w_2} \sum_{k=1}^{v} (-1)^k \binom{w_2}{k} \right), \quad p-1 \geqslant u > v \geqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду равенств (4.1) и (4.12) имеем

$$g_p(u,v) = \sum_{i=1}^{u+v+1} \binom{p}{i} \binom{i-1}{u} \binom{u}{i-v-1},$$

$$f_p(u,v) = \sum_{i=1}^{u+v+2} \binom{p}{i} \left(\binom{i-1}{v+1} \binom{v+1}{i-u-1} + \sum_{k=1}^{v} \binom{i-k-1}{i-v-1} \binom{v-k}{i-u-2} \right).$$

Рассмотрим $g_p(u,v)$. Если $u+v+1 \geqslant p$, то все слагаемые в сумме, кроме одного (при $i=p$), делятся на p, следовательно,

$$g_p(u,v) \equiv \binom{p-1}{u}\binom{u}{p-v-1} \equiv (-1)^u \binom{u}{u-(p-v-1)} \equiv (-1)^u \binom{u}{w_1} \pmod p.$$

Полученное сравнение по модулю p остается справедливым при $u+v+1 < p$, поскольку тогда $g_p(u,v)$ делится на p и $\binom{u}{w_1} = 0$, так как $w_1 < 0$. Свойство $g_p(u,v) = g_p(v,u)$ завершает доказательство теоремы для $g_p(u,v)$.

Рассмотрим $f_p(u,v)$. Если $u+v+2 \geqslant p$, то все слагаемые в сумме, кроме одного (при $i=p$), делятся на p, следовательно,

$$f_p(u,v) \equiv \binom{p-1}{v+1}\binom{v+1}{p-u-1} + \sum_{k=1}^{v}\binom{p-k-1}{p-v-1}\binom{v-k}{p-u-2} \pmod p.$$

Ввиду условия $1 \leqslant v+1 \leqslant p-1$ для первого слагаемого получаем

$$\binom{p-1}{v+1}\binom{v+1}{p-u-1} \equiv (-1)^{v+1}\binom{v+1}{v+1-(p-u-1)} \equiv (-1)^{v+1}\binom{v+1}{w_2} \pmod p.$$

Преобразуем слагаемые в сумме по k:

$$\binom{p-k-1}{p-v-1} \equiv \binom{p-k-1}{v-k} \equiv \frac{(p-(k+1))(p-(k+2))\dots(p-v)}{(v-k)!}$$

$$\equiv (-1)^{v-k}\frac{(k+1)(k+2)\dots v}{(v-k)!} \equiv (-1)^{v-k}\binom{v}{k} \pmod p,$$

далее,

$$\binom{v-k}{p-u-2} \equiv \binom{v-k}{v-k-(p-u-2)} \equiv \binom{v-k}{w_2-k} \pmod p.$$

Таким образом,

$$\binom{p-k-1}{p-v-1}\binom{v-k}{p-u-2} \equiv (-1)^{v-k}\binom{v}{k}\binom{v-k}{w_2-k} \equiv (-1)^{v-k}\frac{v!}{k!(v-k)!}\,\frac{(v-k)!}{(w_2-k)!(v-w_2)!}$$

$$\equiv (-1)^{v-k}\frac{v!}{w_2!(v-w_2)!}\,\frac{w_2!}{k!(w_2-k)!} \equiv (-1)^{v-k}\binom{v}{w_2}\binom{w_2}{k} \pmod p.$$

В итоге имеем

$$\sum_{k=1}^{v}\binom{p-k-1}{p-v-1}\binom{v-k}{p-u-2} \equiv (-1)^v\binom{v}{w_2}\sum_{k=1}^{v}(-1)^k\binom{w_2}{k} \pmod p.$$

Комбинируя результаты, получаем искомое выражение для $f_p(u,v)$ по модулю p. Для завершения доказательства остается заметить, что полученное соотношение останется справедливым при $u+v+2 < p$, поскольку тогда $f_p(u,v)$ делится на p и $\binom{v+1}{w_2} = \binom{v}{w_2} = 0$, так как $w_2 < 0$.

Теорема доказана.

Следствие 2. *В условиях предыдущей теоремы, если вес коммутатора $[y, {}_u x, {}_v y]$ равен p, то показатель его степени в собирательной формуле Холла для $(xy)^p$ сравним с $(-1)^u$ по модулю p. Аналогично если вес коммутатора $[[y, {}_u x], [y, {}_v x]]$ равен p, то показатель его степени сравним с $(-1)^u$ по модулю p.*

Автор благодарит своего научного руководителя профессора С. Г. Колесникова за чуткое внимание, проявленное к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hall P.** A contribution to the theory of groups of prime-power order // Proc. Lond. Math. Soc. 1934. Vol. s2-36, iss. 1. P. 29–95. doi: 10.1112/plms/s2-36.1.29 .
2. **Hall M., Jr.** The theory of groups. NY: The Macmillan Co., 1959. 434 p.
3. **Magnus W., Karras A., Solitar D.** Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations. NY: Interscience Publ., Wiley 1966. 444 p.
4. **Krause E.F.** On the collection process // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 15, no. 3. P. 497–504. doi: 10.2307/2034532 .
5. **Krause E.F.** Groups of exponent 8 satisfy the 14th Engel congruence // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 15, no. 3. P. 491–496. doi: 10.2307/2034531.
6. **Скопин А.И.** О собирательной формуле // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Т. 46. С. 59–63.
7. **Скопин А.И.** Тождество Якоби и собирательная формула Ф. Холла в трансметабелевых группах двух типов // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1989. Т. 175. С. 106–112.
8. **Скопин А.И.** Графическое построение собирательной формулы некоторых типов групп // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1991. Т. 191. С. 140–151.
9. **Скопин А.И., Тетерин Ю.Г.** Ускорение алгорифма построения собирательной формулы Ф. Холла // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 191. С. 106–112.
10. **Леонтьев В.М.** Комбинаторные вопросы, связанные с собирательным процессом Ф. Холла // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 873–889. doi: 10.33048/semi.2020.17.064 .
11. **Kolesnikov S.G., Leontiev V.M., Egorychev G.P.** Two collection formulas // J. Group Theory. 2020. Vol. 23, no. 4. P. 607–628. doi: 10.1515/jgth-2019-0074 .
12. **Колесников С.Г., Леонтьев В.М.** Об одном необходимом условии регулярности и его следствиях // Междунар. конф. “Мальцевские чтения”, посвящен. 70-летию акад. С.С. Гончарова (Новосибирск, 20–24 сентября 2021 г.): тез. докл. С. 96.

Поступила 16.09.2021
После доработки 22.11.2021
Принята к публикации 29.11.2021

Леонтьев Владимир Маркович
аспирант
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: v.m.leontiev@outlook.com

REFERENCES

1. Hall P. A contribution to the theory of groups of prime-power order. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1934, vol. s2-36, no. 1, pp. 29–95. doi: 10.1112/plms/s2-36.1.29 .
2. Hall M., Jr. *The theory of groups.* NY: The Macmillan Co., 1959, 434 p.
3. Magnus W., Karras A., Solitar D. *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations.* NY: Interscience Publ., Wiley, 1966, 444 p.
4. Krause E.F. On the collection process. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1964, vol. 15, no. 3, pp. 497–504. 10.2307/2034532 .
5. Krause E.F. Groups of exponent 8 satisfy the 14th Engel congruence. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1964, vol. 15, no. 3, pp. 491–496. doi: 10.2307/2034531 .
6. Skopin A.I. A collection formula. *J. Math. Sci.*, 1978, vol. 9, no. 3, pp. 337–341. doi: 10.1007/BF01085052 .
7. Skopin A.I. Jacobi identity and P. Hall's collection formula in two types of transmetabelian groups. *J. Math. Sci.*, 1991, vol. 57, no. 6, pp. 3507–3512. doi: 10.1007/BF01100121 .
8. Skopin A.I. A graphic construction of the collection formula for certain types of groups. *J. Math. Sci.*, 1993, vol. 63, no. 6, pp. 693–699. doi: 10.1007/BF01097984 .
9. Skopin A.I., Teterin Y.G. Speeding up an algorithm to construct the Hall collection formula. *J. Math. Sci.*, 1998, vol. 89, no. 2, pp. 1149–1153. doi: 10.1007/BF02355864 .

10. Leontiev V.M. Combinatorial problems connected with P. Hall's collection process. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, vol. 17, pp. 873–889 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2020.17.064 .
11. Kolesnikov S., Leontiev V., Egorychev G. Two collection formulas. *J. Group Theory*, 2020, vol. 23, no. 4, pp. 607–628. doi: 10.1515/jgth-2019-0074 .
12. Kolesnikov S.G., Leontiev V.M. On a necessary condition for the regularity and its consequences. In: *Abstr. Intern. conf. "Mal'tsev meeting", dedicated to the 70th anniversary of Academician S.S. Goncharov (Novosibirsk, September 20-24, 2021)*, 2021, p. 96 (in Russian).

Received September 16, 2021
Revised November 22, 2021
Accepted November 29, 2021

Funding Agency: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2022-876).

Vladimir Markovich Leontiev, doctoral student, Institute of Mathematics and Computer Science of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: v.m.leontiev@outlook.com .

Cite this article as: V. M. Leontiev. On the exponents of commutators from P. Hall's collection formula, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 182–198 .