ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 517.925

АСИМПТОТИКА ДИНАМИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИИ СЕДЛО-УЗЕЛ ДЛЯ МОДЕЛИ ЯДЕРНЫХ СПИНОВ В АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ[1]

Л. А. Калякин

Рассматривается система двух нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. Система соответствует одной из моделей ядерных спинов в антиферромагнетике. При записи в медленном времени уравнения содержат малый параметр при производных. В главных членах асимптотики по малому параметру задача сводится к системе алгебраических уравнений. Их корни зависят от медленного времени. Исследуются решения, асимптотика которых перестраивается с одного корня на другой. Такая перестройка случается при подходящем изменении коэффициентов исходных уравнений и идентифицируется с динамической бифуркацией седло-узел. Вблизи момента перехода (бифуркации) возникает узкий переходной слой, где решение быстро меняется. Основные результаты связаны с построением асимптотики по малому параметру в этом слое. Для построения асимптотики применяется метод согласования с использованием трех масштабов.

Ключевые слова: равновесие, динамическая бифуркация, малый параметр, асимптотика.

L. A. Kalyakin. Asymptotics of a dynamic saddle-node bifurcation for the nuclear spin model in an antiferromagnet.

A system of two nonlinear differential equations with slowly varying coefficients is considered. The system corresponds to one of the models of nuclear spins in antiferromagnets. When written in slow time, the equations contain a small parameter at the derivatives. In the leading terms of the asymptotics with respect to the small parameter, the problem is reduced to a system of algebraic equations. Their roots depend on the slow time. We study solutions whose asymptotics is restructured from one root to another. Such restructuring occurs under a suitable change in the coefficients of the original equations and is identified with a dynamic saddle-node bifurcation. A narrow transition layer appears near the moment of transition (bifurcation), where the solution changes rapidly. The main results are related to the construction of the asymptotics with respect to the small parameter in this layer. To construct the asymptotics, the matching method using three scales is used.

Keywords: equilibrium, dynamic bifurcation, small parameter, asymptotics.

MSC: 34C23, 34D20

DOI 10.21538/0134-4889-2022-28-1-111-126

1. Введение

Исходный объект — система двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром ε при производных

$$\varepsilon\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z,\psi;\mathbf{a}) \\ g(z,\psi;\mathbf{a}) \end{pmatrix}, \quad \tau\in\mathbb{R}^1, \quad 0<\varepsilon\ll 1. \tag{1.1}$$

Правые части уравнений зависят от трехмерного параметра $\mathbf{a}=(A,B,\Lambda)\in\mathbb{R}^3$ и определяются формулами

$$\begin{gathered} f(z,\psi;\mathbf{a}) = B(1-z^2) - A\sqrt{1-z^2}\sin\psi, \\ g(z,\psi;\mathbf{a}) = \Lambda - z + A\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\psi, \quad -1<z<1, \quad 0\le\psi<2\pi. \end{gathered} \tag{1.2}$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 20-11-19995).

В некоторых разделах будет использоваться более короткая форма записи

$$\varepsilon\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{a}), \quad \tau\in\mathbb{R}^1, \quad 0<\varepsilon\ll 1, \tag{1.3}$$

с использованием вектор-столбцов $\mathbf{x} = (z,\psi)^\top$, $\mathbf{f} = (f,g)^\top$.

Уравнения (1.1) с правыми частями (1.2) представляют собой модель для ядерных спинов в антиферромагнетике [1], записанную в цилиндричесих координатах z,ψ. Детальный переход к уравнениям в форме (1.1), (1.2) приведен в [2]; там же проанализировано общее решение в автономном случае, когда $A,B,\Lambda = \mathrm{const}$. Известно, что структура решений, в частности неподвижные точки (равновесия), определяемые из уравнений

$$f\equiv B(1-z^2) - A\sqrt{1-z^2}\sin\psi = 0, \quad g\equiv \Lambda - z + A\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\psi = 0, \tag{1.4}$$

зависит от параметров A,B,Λ. Множество параметров, при которых меняется число равновесий, образует (бифуркационную) поверхность в $\mathbb{R}^3$, которую обозначим через S. При наличии релаксации, когда $B>0$, почти все решения дифференциальных уравнений быстро стабилизируются к устойчивым равновесиям типа фокус либо узел. В зависимости от знака Λ это происходит на верхней $0<z<1$ либо нижней $-1<z<0$ полусфере [2]. Для определенности рассматривается случай $\Lambda>0$, когда устойчивые равновесия случаются в области с $z\in(0,1)$.

В задаче о динамической бифуркации коэффициенты берутся зависящими от времени:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau) \;\Leftrightarrow\; A = A(\tau), \quad B = B(\tau), \quad \Lambda = \Lambda(\tau), \quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

В таком случае для уравнений (1.1), (1.2) как модели ферромагнетика параметр ε представляет собой отношение скорости изменения характерных параметров к частоте ферромагнитного резонанса. Его малость означает медленное изменение этих параметров, переменная τ интерпретируется как медленное время. Соответственно $t=\tau/\varepsilon$ есть быстрое время. Функции $A,B,\Lambda(\tau)$ предполагаются гладкими по τ (бесконечно дифференцируемыми) и $B,\Lambda>0$. Соотношения (1.5) определяют в трехмерном пространстве $(A,B,\Lambda)\in\mathbb{R}^3$ линию $\mathcal{L}$-деформации параметров.

В неавтономном случае уравнения (1.1), (1.2) не имеют неподвижных точек. Корни функциональных уравнений (1.4) зависят от медленного времени, обозначим их через $\mathbf{X}(\tau) = (Z(\tau),\Psi(\tau))^\top$. Эти вектор-функции используются для описания асимптотики решений $z,\psi(\tau;\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. В общей ситуации такая асимптотика не будет равномерной по τ из-за смены корней при переходе параметров через бифуркационную поверхность. Численные эксперименты с уравнениями типа (1.1), (1.2) при малых ε обнаруживают решения с узкими переходными слоями, которые возникают вблизи моментов бифуркации (см., например, [3; 4]). В данной работе выполняется аналитическое исследование таких решений. Основной ее результат — построение асимптотического решения в переходном слое.

Предлагаемые конструкции можно перенести на общие системы типа (1.3) при определенных ограничениях, которые обеспечивают бифуркацию седло-узел. Мы ограничиваемся системой (1.1), (1.2) из интереса к конкретной задаче магнитодинамики.

Уравнения с малым параметром при производных принято называть сингулярно возмущенными. Асимптотические методы для таких систем хорошо разработаны [5; 6]. При наличии диссипации (в данном случае при $B>0$) главную роль играют функциональные уравнения (1.4). Получаемые асимптотики $\mathbf{x}(\tau;\varepsilon) = \mathbf{X}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ при выборе разных корней соответствуют разным изолированным решениям. Часть таких исключительных решений, которые соответствуют устойчивым равновесиям, являются аттракторами для почти всех других решений. Быстрый выход на такую асимптотику обнаруживается методом погранслойных функций [5].

Надо иметь в виду, что пригодность столь простой асимптотики ограничена по времени. Ограничения связаны с разрывом, который возникает при смене корня $\mathbf{X}(\tau)$ в момент бифуркации. Поскольку решения дифференциальных уравнений являются гладкими функциями, то разрыв указывает на более сложную структуру асимптотики вблизи момента бифуркации. Именно здесь обнаруживаются переходные слои с быстрой перестройкой решения. На этом этапе в асимптотических конструкциях следует использовать метод согласования [6]. Имеется много работ для задач с такой динамической бифуркацией (см. обзор [7]). Известны результаты о бифуркациях типа седло-центр, которые случаются в бездиссипативных системах (например, [8; 9]). В рассматриваемой задаче присутствует диссипация с коэффициентом $B > 0$. При построении асимптотики это приводит к динамической бифуркации седло-узел. Простейшая система такого типа рассматривалась в [4; 10].

Следует упомянуть ряд близких задач. По структуре получаемых асимптотик похожими выглядят контрастные структуры [5; 11], в которых также возникают внутренние переходные слои. Однако их появление обязано специфике краевых условий, а не динамическим бифуркациям. Рассматриваемое здесь явление быстрой перестройки решения ближе к релаксационным колебаниям [12] и к проблемам, исследуемым в работах [13; 14]. Близость проявляется в использовании уравнения Риккати на начальном этапе переходного слоя.

2. Ограничения на исходные данные

В данном разделе выявляются характерные константы, которые определяют структуру асимптотики в переходном слое. При этом используются результаты, полученные в [2].

Вне переходного слоя главные члены асимптотики решения определяются корнями функциональных уравнений (1.4) $\mathbf{X} = (Z, \Psi)^\top$. Для компоненты Z получается алгебраическое уравнение четвертой степени

$$P(Z; \mathbf{a}) \equiv (1 - Z^2)[B^2Z^2 + (\Lambda - Z)^2] - A^2Z^2 = 0. \tag{2.1}$$

Компонента $\Psi \in [0.2\pi)$ восстанавливается однозначно из (1.4).

Определяемые таким образом корни зависят от трехмерного параметра $\mathbf{a} = (A, B, \Lambda)$. В пространстве параметров при $B, \Lambda > 0$ имеется область $D_3 \subset \mathbb{R}^3$, ограниченная бифуркационной поверхностью S, такая что для значений $\mathbf{a} \in D_3$ уравнение (2.1) имеет три различных корня $0 < Z_-(\mathbf{a}) < Z_s(\mathbf{a}) < Z_+(\mathbf{a}) < 1$. Два из них, $Z_\pm(\mathbf{a})$, соответствуют устойчивым равновесиям. При $\mathbf{a} \in S$ корни кратные. Условие трехкратного корня определяет на бифуркационной поверхности линию вырождения; такой случай здесь не рассматривается. На бо̀льшей части поверхности S двукратным становится один из корней $Z_-(\mathbf{a}) < Z_+(\mathbf{a})$. При этом вторая производная полинома в кратном корне имеет вполне определенный знак:

$$P''_{zz}(Z_-(\mathbf{a}); \mathbf{a}) < 0, \quad P''_{zz}(Z_+(\mathbf{a}); \mathbf{a}) > 0, \quad \mathbf{a} \in S.$$

Этот свойство усматривается из графика исследуемого полинома четвертой степени.

Решение, которое анализируется в следующих разделах, выделяется заданием главного члена асимптотики при $\tau < 0$. В качестве его берется один из корней, $Z(\tau) = Z_\pm(\mathbf{a}),\ \mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau)$, соответствующий устойчивому равновесию замороженной системы. При подходящей деформации параметров $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau)$ в момент $\tau = 0$ корень становится двукратным. При $\tau > 0$ асимптотика решения быстро перестраивается на другой корень, соответствующий оставшемуся устойчивому равновесию.

Условия, которые обеспечивают такую перестройку, накладываются на вектор-функцию $\mathbf{a}(\tau)$ и ее производную в точке $\tau = 0$. Эти условия соответствуют пересечению бифуркационной поверхности S линией деформации $\mathcal{L}$ в ситуации общего положения: 1) линия $\mathcal{L}$ в момент $\tau = 0$ пересекает бифуркационную поверхность на гладкой ее части (вне линии вырождения); 2) это пересечение трансверсально. Анализ выполняется на конечном промежутке времени $\tau \in [-\delta, \delta]$ с единственным моментом бифуркации $\tau = 0$.

Ниже приводится формальное описание введенных ограничений. Из исходных функций $A(\tau), B(\tau), \Lambda(\tau)$ и их производных в точке бифуркации $\tau = 0$ формируются две константы μ, ν, которые определяют структуру конструируемых асимптотик. В этих формулах используется координата неподвижной точки $Z(\tau) = Z(\mathbf{a}(\tau))$. Ввиду уравнения (2.1) величину $Z \in (0,1)$ можно рассматривать в качестве параметра вместо одного из заданных A, B, Λ.

Специфика задачи позволяет полностью описать бифуркационную поверхность в терминах введенного выше полинома P. Однако для использования в асимптотических конструкциях более удобным оказывается описание в терминах исходной системы, как это делается в общем случае [15]. Главную роль здесь играет матрица Якоби с определителем $\Delta(z,\psi;\mathbf{a}) = \det \partial(f,g)/\partial(z,\psi)$.

Для производных в неподвижной точке $z = Z(\mathbf{a}),\ \psi = \Psi(\mathbf{a})$ введем следующие обозначения:

$$f_{i,j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^{ij} f}{\partial z^i\, \partial \psi^j}, \quad g_{i,j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^{ij} g}{\partial z^i\, \partial \psi^j} \ \text{ при } \ z = Z(\mathbf{a}), \quad \psi = \Psi(\mathbf{a}).$$

Все эти величины представляют собой функции от $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$; матрица Якоби в точке равновесия записывается в виде

$$\mathcal{M}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f_{10}(\mathbf{a}) & f_{01}(\mathbf{a}) \\ g_{10}(\mathbf{a}) & g_{01}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3.$$

В рассматриваемой задаче эту матрицу можно представить через корень алгебраического уравнения $Z(\mathbf{a})$:

$$\mathcal{M}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -BZ & (\Lambda - Z)(1 - Z^2)/Z \\ -1 - (\Lambda - Z)\frac{1}{(1-Z^2)Z} & -BZ \end{pmatrix}\Big|_{Z=Z(\mathbf{a})}. \tag{2.2}$$

Выражения для собственных значений

$$\lambda_{\pm}(\mathbf{a}) = -BZ \pm \frac{1}{Z}\sqrt{(\Lambda - Z)(Z^3 - \Lambda)}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \tag{2.3}$$

определяют тип неподвижной точки. Устойчивое равновесие вблизи бифуркации будет узлом [15].

Условие кратности неподвижной точки записывается как

$$\det \mathcal{M}(\mathbf{a}) = 0. \tag{2.4}$$

Это уравнение определяет в пространстве параметров бифуркационную поверхность $\mathbf{a} = (A, B, \Lambda) \in S \subset \mathbb{R}^3$. Условие (2.4) можно привести к виду

$$B^2 Z^4 - (\Lambda - Z)(Z^3 - \Lambda) = 0. \tag{2.5}$$

С учетом (1.4) данное соотношение эквивалентно требованию кратности корня алгебраического уравнения (2.1) в форме $P'_z(Z;\mathbf{a}) = 0$. В таком случае соотношения (1.4), (2.5) справедливо рассматривать как параметрическое задание бифуркационной поверхности с параметром $Z \in (0,1)$.

На бифуркационной поверхности одно из собственных значений матрицы Якоби обращается в нуль $\lambda_+(\mathbf{a}) = 0,\ \mathbf{a} \in S$. В дальнейшем будут использоваться соответствующие собственные векторы — левый и правый: $\mathbf{L}\,\mathcal{M}(\mathbf{a}) = 0,\ \mathcal{M}(\mathbf{a})\,\mathbf{R} = 0$. Их можно представить в виде строки и столбца через исходные параметры:

$$\mathbf{L} = (-g_{01}, f_{01}) \equiv (BZ, (\Lambda - Z)(1 - Z^2)/Z), \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} f_{01} \\ -f_{10} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (\Lambda - Z)(1 - Z^2)/Z \\ BZ \end{pmatrix}.$$

Для произведения векторов с учетом (2.4) получаем

$$\mathbf{LR} = \lambda f_{01} = B(\Lambda - Z)(1 - Z^2), \quad \lambda = \lambda_-(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in S. \tag{2.6}$$

Ненулевое собственное значение совпадает со следом матрицы:

$$\lambda(\mathbf{a}) \equiv f_{10} + g_{01} = -2BZ < 0, \quad \mathbf{a} \in S.$$

Отрицательность λ обеспечивает устойчивость кратной неподвижной точки в узловом секторе [15].

Первое ограничение на рассматриваемые точки бифуркации $\mathbf{a} \in S$ состоит в требовании невырожденности:

$$\mu \equiv \begin{vmatrix} f_z & f_\psi \\ \Delta_z & \Delta_\psi \end{vmatrix}_{z=Z(\mathbf{a}),\ \psi=\Psi(\mathbf{a})} \neq 0, \quad \mathbf{a} \in S. \tag{2.7}$$

К этому соотношению в форме

$$\mu \equiv f_{10}(g_{10}\, f_{02} - f_{10}\, g_{02}) - 2f_{10}(g_{01}\, f_{11} - f_{01}\, g_{11}) + f_{01}(g_{01}\, f_{20} - f_{01}\, g_{20}) \neq 0$$

редуцируется условие, приведенное в [15, с. 197]. Оно гарантирует для неподвижной точки кратность 2. Константа $\mu = \mu(\mathbf{a})$ выписывается в терминах корня алгебраического уравнения:

$$\mu = \frac{A^2}{1-Z^2}[Z^3 + 3Z - 4\Lambda] = [B^2 Z^2 + (\Lambda - Z)^2][Z^3 + 3Z - 4\Lambda].$$

В такой форме требование $\mu \neq 0$ эквивалентно условию двукратности корня алгебраического уравнения: $P''(Z(\mathbf{a})) \neq 0,\ \mathbf{a} \in S$ [2].

З а м е ч а н и е 1. Знак константы $\mu = \mu(\mathbf{a})$ совпадает со знаком второй производной полинома $P(Z; \mathbf{a})$ и определяется положением кратного корня: $\mu < 0$ при $Z = Z_-(\mathbf{a})$ и $\mu > 0$ при $Z = Z_+(\mathbf{a})$.

Второе ограничение касается условия трансверсальности линии деформации $\mathcal{L}$ к поверхности S. В пространстве параметров $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ введем пару 3-мерных векторов

$$f_{\mathbf{a}} = \partial_{\mathbf{a}} f(z, \psi; \mathbf{a}) \equiv (-\sqrt{1-z^2}\sin\psi, 1 - z^2, 0), \quad g_{\mathbf{a}} = \partial_{\mathbf{a}} g(z, \psi; \mathbf{a}) \equiv \Big(\frac{z\cos\psi}{\sqrt{1-z^2}}, 0, 1\Big).$$

Они представляют собой градиенты функций $f, g(z, \psi; \mathbf{a})$ по переменной $\mathbf{a}$. Эти векторы, вычисленные в неподвижной точке

$$f_{\mathbf{a}} = \Big(-\frac{B}{A}(1-Z^2), 1 - Z^2, 0\Big), \quad g_{\mathbf{a}} = \Big(-\frac{\Lambda - Z}{A}, 0, 1\Big), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3,$$

можно объединить в матрицу размером 2×3

$$\partial_{\mathbf{a}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{B}{A}(1-Z^2) & 1-Z^2 & 0 \\ -\dfrac{\Lambda - Z}{A} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3.$$

Произведение вектор-строки $\mathbf{L} = (-g_{01}(\mathbf{a}), f_{01}(\mathbf{a})),\ \mathbf{a} \in S$, на эту матрицу дает трехмерный вектор, определенный на бифуркационной поверхности

$$\mathbf{n_a} = L\, \partial_{\mathbf{a}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \in S. \tag{2.8}$$

Вектор $\mathbf{n_a}$ оказывается направленным по нормали и позволяет выписать условие трансверсальности в подходящей форме.

Лемма 1. *Пусть в точке* $\mathbf{a} \in S$ *выполнены условия невырожденности* (2.7). *Тогда поверхность* S *в этой точке гладкая и вектор* $\mathbf{n_a}$ *направлен по нормали к ней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим пару уравнений $g(z,\psi;\mathbf{a})=0$ и $\Delta(z,\psi;\mathbf{a})=0$. При $\mathbf{a}\in S$ они имеют решение, соответствующее неподвижной точке $z=Z(\mathbf{a}),\ \psi=\Psi(\mathbf{a})$. В силу свойства невырожденности (2.7) это решение продолжается в окрестность поверхности S в виде $z=\hat z(\mathbf{a}),\ \psi=\hat\psi(\mathbf{a})$. На таком решении определена скалярная функция (на основе первой компоненты) $F(\mathbf{a})\equiv f(\hat z(\mathbf{a}),\hat\psi(\mathbf{a}));\mathbf{a})$. Поверхность уровня $F(\mathbf{a})=0$, которая получается при $\mathbf{a}\in S$, совпадает с бифуркационной поверхностью. Вектор градиента $\partial_{\mathbf{a}}F(\mathbf{a})$ ортогонален к поверхности уровня и вычисляется по формуле $\partial_{\mathbf{a}}F(\mathbf{a})=\partial_z f\partial_{\mathbf{a}}\hat z(\mathbf{a})+\partial_\psi f\partial_{\mathbf{a}}\hat\psi(\mathbf{a})+\partial_{\mathbf{a}}f,\ \mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$. Учтем, что тождество $g(\hat z(\mathbf{a}),\hat\psi(\mathbf{a});\mathbf{a})\equiv 0$ при дифференцировании дает соотношение

$$\partial_z g\partial_{\mathbf{a}}\hat z(\mathbf{a})+\partial_\psi g\partial_{\mathbf{a}}\hat\psi(\mathbf{a})+\partial_{\mathbf{a}}g\equiv 0,\quad \mathbf{a}\in\mathbb{R}^3.$$

Комбинируя эти равенства, имеем

$$g_{01}\partial_{\mathbf{a}}F(\mathbf{a})=[g_{01}\partial_z f-f_{01}\partial_z g]\partial_{\mathbf{a}}\hat z(\mathbf{a})+[g_{01}\partial_\psi f-f_{01}\partial_\psi g]\partial_{\mathbf{a}}\hat\psi(\mathbf{a})+g_{01}\partial_{\mathbf{a}}f-f_{01}\partial_{\mathbf{a}}g.$$

На бифуркационной поверхности $\mathbf{a}\in S$ в первом слагаемом получается определитель матрицы Якоби $\Delta(\mathbf{a})=0$ в качестве множителя; во втором слагаемом множитель тождественно равен нулю при $\mathbf{a}\in S$. Поэтому $g_{01}\partial_{\mathbf{a}}F(\mathbf{a})=g_{01}\partial_{\mathbf{a}}f-f_{01}\partial_{\mathbf{a}}g=-\mathbf{n}_{\mathbf{a}},\ \mathbf{a}\in S$.

Величина $g_{01}=BZ\neq 0$ не обращается в нуль. Таким образом, градиент определен и поверхность будет гладкой. Вектор $\mathbf{n}_{\mathbf{a}}$ отличается от градиента $\partial_{\mathbf{a}}F(\mathbf{a})$ ненулевым множителем и, следовательно, ортогонален к бифуркационной поверхности. □

Производная $\mathbf{a}'(\tau)$ определяет вектор, касательный к линии $\mathcal{L}$ — деформации параметров. Пусть в момент $\tau=0$ линия $\mathcal{L}$ пересекает поверхность S.

Следствие 1. *Условие трансверсальности гладкой линии $\mathcal{L}$ к бифуркационной поверхности S состоит в неравенстве нулю скалярного произведения*

$$\nu\equiv(\mathbf{n}_{\mathbf{a}},\mathbf{a}'(0))\neq 0,\quad \mathbf{a}(0)\in S. \tag{2.9}$$

Отметим, что градиент к поверхности S можно вычислить другим способом через $\partial_{\mathbf{a}}P(Z;\mathbf{a})$ из уравнения (2.1) с учетом кратности корня $P'_z(Z;\mathbf{a})=0$. Прямые вычисления в (2.8) дают связь между разными формулами[2]:

$$\mathbf{n}_{\mathbf{a}}=\frac{1}{Z}(-AZ^2,(1-Z^2)Z^2,(1-Z^2)(\Lambda-Z))=\frac{1}{2Z}\partial_{\mathbf{a}}P(Z;\mathbf{a}).$$

Таким образом, имеет место

Следствие 2. *Константа ν вычисляется через производную полинома*

$$\nu=\frac{1}{2z}\partial_\tau P(z;\mathbf{a}(\tau))|_{z=Z(\boldsymbol{a}(0)),\tau=0},\quad \mathbf{a}(0)\in S.$$

При переходе параметра $\mathbf{a}(\tau)$ через поверхность S бифуркация случается с одним из двух корней $Z_\pm(\mathbf{a})$. Как замечено выше, корни идентифицируются знаком константы $\mu=\mu(\mathbf{a})$. Следующее утверждение дает формальное *условие бифуркации корня.*

Лемма 2. *Для заданного корня $Z(\tau)=Z(\mathbf{a}(\tau))$ при выходе параметра $\mathbf{a}(\tau)$ на поверхность S бифуркация случается при условии, что константы μ и ν, вычисленные в точке бифуркации, имеют разные знаки: $\mu\nu<0$.*

[2]Использование формулы (2.8) связано с конструкцией асимптотики.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производная $\partial_\tau P(z;\mathbf{a}(\tau))$ определяет направление движения графика полинома P как функции от z при изменении параметра τ. В частности, знак константы ν определяет выход из области трехзначности корня либо вход в нее при переходе через бифуркационную поверхность. Для ме́ньшего кратного корня $Z_-(\mathbf{a}(\tau))$ выход случается при условии $\nu > 0$. Для бо́льшего кратного корня $Z_+(\mathbf{a}(\tau))$ выход случается при условии $\nu < 0$. Связь корней со знаком константы μ приводит к утверждению леммы. □

Асимптотическое решение, конструируемое разд. 3, определяется однозначно. Оно представляет асимптотику двухпараметрического семейства точных решений, которые отличаются начальным погранслоем вблизи левого края $\tau \approx -\delta < 0$. Решение задачи о начальном погранслое известно [5] и здесь не обсуждается. *Основное внимание уделяется построению главных членов асимптотики в переходном слое вблизи точки* $\tau = 0$. Формулы с бесконечными рядами даны только для ориентировки в структуре старших поправок. Их детальный анализ не содержит принципиальной новизны и здесь не приводится.

3. Внешнее асимптотическое решение

В этом разделе строится асимптотическое решение при $\varepsilon \to 0$ для значений $\tau < 0$ и исследуется структура асимптотики на подходе к критическому моменту $\tau \to -0$.

3.1. Формализм асимптотического решения

Исходные уравнения (1.1), записанные в медленном времени τ, содержат малые множители при производных. Асимптотическое решение, называемое внешним (см. [6]), строится в виде рядов по степеням малого параметра

$$\mathbf{x}(\tau;\varepsilon) = \mathbf{X}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{x}_k(\tau), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

с главным членом, который при $\tau < 0$ соответствует устойчивому равновесию замороженной системы:

$$\mathbf{X}(\tau) = \begin{pmatrix} Z(\mathbf{a}) \\ \Psi(\mathbf{a}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (A(\tau), B(\tau), \Lambda(\tau)), \quad \tau < 0.$$

Старшие поправки находятся однозначно из системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{M}\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k,$$

которые получаются из (1.1) приравниванием выражений при одинаковых степенях ε^k. Здесь через $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\tau)$ обозначена матрица Якоби при значениях параметра на линии $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{M}(\tau) = \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,\psi)}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\tau),\mathbf{a}=\mathbf{a}(\tau)}.$$

Ее определитель (якобиан) $\det \mathcal{M} = \Delta(\tau)$ обращается в нуль при $\tau = 0$. Векторы правых частей выписываются по рекуррентным формулам через предыдущие приближения

$$\mathbf{f}_k = \frac{d\mathbf{x}_{k-1}}{d\tau} + \tilde{\mathbf{f}}_{k-1}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{a}).$$

Например, на первом шаге этот вектор состоит только из производных $\mathbf{f}_1 = \mathbf{X}'(\tau)$.

Вся конструкция основана на выборе корня алгебраического уравнения для главного члена асимптотического решения. Промежуток по τ существования гладкого корня зависит от положения линии $\mathcal{L}$ в пространстве параметров. Если линия $\mathcal{L}$ не пересекает бифуркационную поверхность S, то асимптотическое решение с главным членом $\mathbf{X}(\tau) = Z(\mathbf{a}(\tau)), \Psi(\mathbf{a}(\tau)))^\top$ определяется при всех τ. Если кривая $\mathcal{L}$ пересекает бифуркационную поверхность с потерей корня, то решение в форме (3.1) определено до момента бифуркации.

3.2. Структура главного члена асимптотики

Вблизи момента бифуркации главный член асимптотики $\mathbf{X}(\tau)$ имеет слабую особенность в виде квадратного корня. Ситуация схожа с поведением корня уравнения $x^2 + \tau = 0$ при $\tau \to -0$. Этот факт известен в общем случае. Ниже приводится вычисление коэффициентов асимптотики для рассматриваемой задачи.

Лемма 3. *Пусть линия $\mathcal{L}$ деформации параметров $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau)$ в момент $\tau = 0$ пересекает трансверсально бифуркационную поверхность S и для рассматриваемого корня $Z(\mathbf{a})$ при $\tau = 0$ выполнено условие бифуркации $\mu\nu < 0$. Тогда главный член асимптотического решения* (3.1) *имеет разложение по полуцелым степеням*

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}(0) + \sqrt{-\tau}\,\mathbf{p}_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(-\tau)^{k/2}\mathbf{p}_k, \quad \tau \to -0, \tag{3.2}$$

с постоянными коэффициентами $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^2$. Коэффициент при первой поправке $\mathbf{p}_1 = c\,\mathbf{R}$ выражается через собственный вектор $\mathbf{R} = (f_{01}, -f_{10})^\top$ с множителем $c = (\operatorname{sign}\mu)\sqrt{2\nu/\mu f_{01}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит в построении асимптотики решения функционального уравнения (1.4), которое запишем в векторной форме $\mathbf{f}(\mathbf{X}(\tau); \mathbf{a}(\tau)) = 0$. Сюда подставляется искомая асимптотика по дробным степеням (3.2). Известные функции раскладываются в асимптотические ряды. В частности,

$$\mathbf{a}(\tau) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{a}_k\tau^k, \quad \tau \to 0, \quad \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n.$$

Затем приравниваются выражения при одинаковых степенях $(-\tau)^{k/2}$. Это приводит к рекуррентной системе соотношений, из которых определяются вектор-коэффициенты $\mathbf{p}_k$.

Главный член соответствует выбранной кратной наподвижной точке. Для первой поправки получается однородная система алгебраических уравнений

$$\mathcal{M}_0\mathbf{p}_1 = 0,$$

с матрицей $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(0)$. Определитель этой матрицы обращается в нуль. Поэтому решение находится через правый собственный вектор

$$\mathbf{p}_1 = c\,\mathbf{R} \equiv c\begin{pmatrix} f_{01} \\ -f_{10} \end{pmatrix}$$

с точностью до множителя $c = \mathrm{const}$. Эта константа входит в правую часть на следующем шаге $k = 2$ и выводится из условия разрешимости.

Если учесть $(\sqrt{-\tau})^2 = -\tau > 0$, то для $\mathbf{p}_2$ получается уравнение

$$\mathcal{M}_0\mathbf{p}_2 = -c^2\mathcal{M}_1\mathbf{R}\mathbf{R} + \partial_{\mathbf{a}}\mathbf{f}\,\mathbf{a}'(0).$$

Вектор $\mathcal{M}_1\mathbf{R}\mathbf{R}$ представляет собой второй коэффициент в разложении Тейлора для $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ (в квадратичном слагаемом при $\sqrt{-\tau} \to 0$). В рассматриваемой кратной неподвижной точке

$$\mathcal{M}_1\mathbf{R}\mathbf{R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{20}f_{01}^2 - 2f_{11}f_{10}f_{01} + f_{02}f_{10}^2 \\ g_{20}f_{01}^2 - 2g_{11}f_{10}f_{01} + g_{02}f_{10}^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь структура множителей, квадратичных по первым производным, обязана специфике первой поправки $\mathbf{p}_1$, которая выражается через вектор $\mathbf{R}$.

Второе слагаемое в правой части происходит из разложения $\mathbf{f}$ по параметру $\mathbf{a}$:

$$\partial_{\mathbf{a}}\mathbf{f}\,\mathbf{a}'(0) = \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x};\mathbf{a})\,\mathbf{a}'(0) \\ \partial_{\mathbf{a}} g(\mathbf{x};\mathbf{a})\,\mathbf{a}'(0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 \in S.$$

Условие разрешимости неоднородной системы с матрицей $\mathcal{M}_0$ состоит в ортогональности правой части к левому собственному вектору $\mathbf{L} = (g_{01}, -f_{01})$. Это требование приводит к квадратному уравнению для константы c. Поскольку в силу (2.7),(2.9) имеют место равенства

$$\mathbf{L}\mathcal{M}_1\mathbf{R}\mathbf{R} = -\frac{1}{2} f_{10}\mu, \quad \mathbf{L}\partial_{\mathbf{a}}\mathbf{f}\,\mathbf{a}'(0) = -\nu,$$

то уравнение для c имеет вид

$$c^2 = \frac{\mathbf{L}\partial_{\mathbf{a}}\mathbf{f}\,\mathbf{a}'(0)}{\mathbf{L}\mathcal{M}_1\mathbf{R}\mathbf{R}} = \frac{2\nu}{\mu f_{01}}. \tag{3.3}$$

Здесь $f_{01} = (\Lambda - Z)(1 - Z^2)/Z$ Заметим, что из соотношения (2.5) с учетом $0 < Z < 1$ следует $(\Lambda - Z) < 0$. В таком случае $f_{01} < 0$ и при условиях леммы правая часть $\nu/2\mu f_{01} > 0$ будет положительная, а для c существуют два корня $c = \pm\sqrt{\nu/2\mu f_{01}}$.

Два значения константы c в асимптотике (3.2) соответствуют двум корням алгебраического уравнения (2.1), которые сливаются в кратную точку при $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$. Один из корней замороженной системы соответствует рассматриваемому устойчивому узлу, другой — седлу. Выбор знака c делается на основе анализа устойчивости. Для этого вычисляется асимптотика собственных значений матрицы Якоби при подходе к кратному равновесию. Из двух возможных корней для c выбирается тот, который для первой поправки в ростке неподвижной точки определяет ветвь, соответствующую узлу, а не седлу.

Для этого надо проверить, что собственное значение $\lambda_+(\mathbf{a})$, которое обращается в нуль при $\tau = 0$, будет отрицательно при $\tau < 0$. Формулу для собственного значения приведем к форме $\lambda_+(\mathbf{a}(\tau)) = Z[-B + \sqrt{(\Lambda - Z)(Z^3 - \Lambda)/Z^4}]$. Затем воспользуемся вычисленной выше асимптотикой для первой компоненты

$$Z = Z(\mathbf{a}_0) + \sqrt{-\tau}\, c\, f_{01} + \mathcal{O}(\tau), \quad \tau \to -0.$$

Поскольку $\lambda_+(\mathbf{a}(0)) = 0$, а параметры $B, \Lambda(\tau)$ гладкие при $\tau \to -0$, то асимптотика $\lambda_+(\mathbf{a}(\tau)) = \lambda_1\sqrt{-\tau} + \mathcal{O}(\tau),\ \tau \to -0$, в главном члене определяется производной по Z подкоренного выражения:

$$\operatorname{sign}\lambda_1 = \operatorname{sign}\big[\, c\, f_{01}\frac{d}{dZ}(\Lambda - Z)(Z^3 - \Lambda)/Z^4\big] = \operatorname{sign}\big[c\, f_{01}(4\Lambda - 3Z - z^3)/Z^5\big].$$

Учтем, что в кратном корне $Z = Z(\mathbf{a}_0)$ имеет место соотношение

$$(4\Lambda - 3Z - z^3) = \frac{Z^2}{2}P'' - P - \frac{5(B^2+1)}{B^2}P' = \frac{Z^2}{2}P''.$$

Так что

$$\operatorname{sign}(4\Lambda - 3Z - z^3) = \operatorname{sign} P'' = \operatorname{sign}\mu\,.$$

Поскольку $f_{01} < 0$, то $\lambda_1 < 0$ при выборе знака $\operatorname{sign} c = \operatorname{sign}\mu$. Тем самым окончательно установлена первая поправка $\mathbf{p}_1$.

Вектор-коэффициент $\mathbf{p}_2$ во второй поправке вычисляется с точностью до множителя при решении однородной системы. Этот множитель определяется однозначно на следующем шаге. На общем шаге доказательство — по индукции. □

На рассматриваемом корне $Z(\tau) = Z(\mathbf{a}(\tau))$ вронскиан связан с собственным значением $\lambda_+(\tau)$, как видно из формул (2.2),(2.3), соотношением

$$\Delta(\tau) = (BZ^2)^2 - (BZ^2 + \lambda_+)^2.$$

Это позволяет выписать асимптотику вронскиана

$$\Delta(\tau) = -BZ^2\lambda_1\sqrt{-\tau} + \mathcal{O}(\tau), \quad \tau \to -0, \quad \lambda_1 = \mathrm{const} < 0.$$

3.3. Особенности старших поправок

В старших поправках асимптотического решения (3.1) порядок особенности в точке $\tau = 0$ нарастает на $3/2$ на каждом шаге. Усиление особенности обязано нулю определителя $\Delta(\tau) \approx \sqrt{-\tau}$, $\tau \to -0$, и наличию производной в правых частях алгебраических уравнений. К таким же особенностям приводят и нелинейности в $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$.

Лемма 4. *В асимптотическом решении* (3.1) *коэффициенты имеют степенные особенности вблизи критического момента, порядок которых растет с номером*:

$$\mathbf{x}_k(\tau) = \tau^{(1-3k)/2}[\hat{\mathbf{x}}_k + o(1)], \quad \tau \to -0, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathrm{const} \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поправки в асимптотическом решении находятся из решения линейной алгебраической системы с матрицей $\mathcal{M}(\tau)$, определитель которой имеет нуль порядка $\tau^{1/2}$ при $\tau \to -0$. Вектор правых частей содержит производную от предыдущего приближения. Поэтому на каждом шаге порядок особенности при $\tau \to -0$ увеличивается на $3/2$. Например, правая часть на первом шаге $\mathbf{f}_1$ содержит особенность в виде

$$\mathbf{f}_1(\tau) = -\frac{1}{2}(-\tau)^{-1/2}\mathbf{p}_1[1 + \mathcal{O}(\sqrt{-\tau})], \quad \tau \to -0, \quad \mathbf{p}_1 = -\frac{1}{2}(-\tau)^{-1/2}c\begin{pmatrix} f_{01} \\ -f_{10} \end{pmatrix}.$$

Поэтому для поправки с учетом нуля определителя получается асимптотика $\mathbf{x}_1(\tau) = \tau^{-1}\hat{\mathbf{p}}_1[1 + \mathcal{O}(\sqrt{-\tau})]$, $\tau \to -0$, с ненулевым коэффициентом $\hat{\mathbf{p}}_1$. На общем шаге асимптотика (3.2) строится по индукции. □

Вывод 1. *Ряд* (3.1) *будет асимптотическим при* $\varepsilon \to 0$ *только в области* $\varepsilon^{2/3} \ll -\tau < \delta$. *Асимптотическое решение в форме* (3.1) *не дотягивается до критического момента* $\tau = 0$.

4. Начальный этап перестройки. Слой Риккати

В этом разделе строится асимптотика решения при $\varepsilon \to 0$ для значений τ вблизи критического момента $\tau = 0$. Формальные построения похожи на предыдущие. Отличие заключается в том, что вместо квадратного (алгебраического) уравнения появляется (дифференциальное) уравнение Риккати.

4.1. Формализм асимптотического решения

Структура особенностей в асимптотическом решении (3.1) указывает подходящие масштабы переменных на следующем этапе. Вводится промежуточная независимая переменная $\theta = \varepsilon^{-2/3}\tau$ — быстрая по отношению к τ, но медленная по отношению к быстрому времени: $\theta = \varepsilon^{1/3}t$. В решении выделяется главный член асимптотики посредством замены искомых функций $\mathbf{x}(\tau; \varepsilon) = \mathbf{X}(0) + \varepsilon^{1/3}\tilde{\mathbf{x}}(\theta; \varepsilon)$. Исходные уравнения (1.1) переходят в уравнения для вектор-функции $\tilde{\mathbf{x}}(\theta; \varepsilon)$

$$\varepsilon^{2/3}\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\theta} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \theta; \varepsilon), \quad \overline{\chi} \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \mathbb{R}^1. \tag{4.4}$$

Вектор правой части определяется через компоненты (1.2)

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \theta; \varepsilon) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(0) + \varepsilon^{1/3}\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{a}), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\varepsilon^{2/3}\theta).$$

Уравнения рассматриваются на полуоси $-\infty < \theta < \theta_*$. Верхняя граница θ_* будет указана в подразд. 4.2.

Так как $\mathbf{X}(\tau)$ — корень функционального уравнения (1.4), то $\mathbf{F}(\overline{\chi},\theta;\varepsilon)|_{\varepsilon=0}=\mathbf{f}(\mathbf{X}(0);\mathbf{a}_0)=0$, $\mathbf{a}_0=\mathbf{a}(0)$. Следовательно, правая часть имеет разложение Тейлора по дробным степеням в виде

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}},\theta;\varepsilon)=\varepsilon^{1/3}\mathcal{M}_0\tilde{\mathbf{x}}+\varepsilon^{2/3}[\mathcal{M}_1\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}+\theta\partial_{\mathbf{a}}\mathbf{f}\,\mathbf{a}'(0)]+\mathcal{O}(\varepsilon),\quad \varepsilon^{1/3}\to 0.$$

В таком случае асимптотическое решение уравнения (4.4) сводится к решению алгебраической системы с постоянной матрицей Якоби $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}(0)$, которая имеет нулевой определитель.

Асимптотическое решение строится в виде ряда по дробным степеням:

$$\tilde{\mathbf{x}}(\theta;\varepsilon)=\mathcal{X}(\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k/3}\mathcal{X}_{k+1}(\theta). \tag{4.5}$$

Для главного слагаемого получается однородная система $\mathcal{M}_0\mathcal{X}=0$. Ее решение выписывается через правый собственный вектор

$$\mathcal{X}(\theta)=C(\theta)\mathbf{R},\quad \mathbf{R}=\begin{pmatrix} f_{01}\\ -f_{10}\end{pmatrix}.$$

с точностью до скалярного множителя $C(\theta)$. Эта функция обнаруживается на следующем шаге в правой части уравнения для второй поправки:

$$\mathcal{M}_0\mathcal{X}_2(\theta)=\mathbf{F}_2(\theta); \tag{4.6}$$

$$\mathbf{F}_2=\frac{dC}{d\theta}\mathbf{R}-C^2\mathcal{M}_1\mathbf{R}\mathbf{R}-\theta\,\partial_{\mathbf{a}}\mathbf{f}\,\mathbf{A}'(0),\quad \mathbf{a}=\mathbf{a}_0\in S.$$

Условие разрешимости неоднородной системы с нулевым определителем состоит в ортогональности правой части к левому собственному вектору $\mathbf{L}=(g_{10},-f_{10})$. Такое требование приводит к дифференциальному уравнению на функцию $C(\theta)$

$$\frac{dC}{d\theta}\,\mathbf{L}\mathbf{R}=C^2\mathbf{L}\mathcal{M}_1\mathbf{R}\mathbf{R}+\theta\,\mathbf{L}\partial_{\mathbf{a}}\mathbf{f}\,\mathbf{a}'(0).$$

Это уравнение Риккати, коэффициенты которого выражаются через исходные данные по формулам (2.6),(2.7),(2.9)

$$f_{10}\lambda\,\frac{dC}{d\theta}=-\frac{1}{2}f_{10}\mu\,C^2-\nu\,\theta. \tag{4.7}$$

Отметим, что правая часть здесь соответствует алгебраическому уравнению (3.3) для константы c. Дифференциальное уравнение дополняется условием на бесконечности из соображений согласования с внешним асимптотическим решением

$$C(\theta)=c\sqrt{-\theta}[1+o(1)],\quad \theta\to-\infty;\quad c=-\mathrm{sign}(\mu)\sqrt{\frac{2\nu}{\mu f_{10}}}. \tag{4.8}$$

После нахождения функции $C(\theta)$ система (4.6) для $\mathcal{X}_2(\theta)$ разрешима. Ее решение определяется с точностью до решения однородной системы $C_2(\theta)\mathbf{R}$. Скалярная функция $C_2(\theta)$ находится на следующем шаге из требования разрешимости системы для $\mathcal{X}_3(\theta)$. Для $C_2(\theta)$ получается линеаризованное неоднородное уравнение Риккати. Такая процедура выполняется для всех поправок $\mathcal{X}_{k+1}(\theta)$.

4.2. Свойства решения Риккати

Уравнение Риккати (4.7) играет принципиальную роль во всей конструкции. Его решение описывает начальный этап динамической бифуркации седло-узел при потере устойчивости. Уравнение (4.7) можно привести к стандартной форме с единичными коэффициентами, используя масштабные преобразования. Мы этого не делаем, чтобы более отчетливо показать связь исходных данных с особенностями рассматриваемого решения. Приведем полученные ранее результаты [4, леммы 3.1, 3.2].

Лемма 5. *Для уравнения Риккати* (4.7) *с условием согласования* (4.8) *существует единственное решение.*

Лемма 6. *Решение уравнения Риккати, выделенное условием согласования* (4.8), *является гладким на полуоси:* $C_0(\theta) \in C^\infty(-\infty, \theta_*)$, $\theta_* = \text{const} > 0$, *на границе которой в точке* θ_* *имеет полюс первого порядка. Асимптотика вблизи полюса*

$$C(\theta) = (\theta_* - \theta)^{-1}\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}(\theta_* - \theta)^n \alpha_n, \quad \theta \to \theta_* - 0 \ \ (\alpha_n = \text{const}),$$

$$\alpha = -2\lambda/\mu = 4BZ/[B^2Z^2 + (\Lambda - Z)^2][Z^3 + 3Z - 4\Lambda].$$

Для решения, фиксированного асимптотикой при $\theta \to -\infty$, положение полюса не вычисляется аналитически. Характер зависимости полюса от исходных параметров можно извлечь из масштабных преобразований:

$$\theta_* = \theta_0\Big(\frac{2\lambda^2 f_{01}}{\mu\nu}\Big)^{1/3} = \theta_0\Big(\frac{8B^2Z(\Lambda - Z)(1 - Z^2)^2}{A^2(Z^3 + 3Z - 4\Lambda)} \cdot \frac{1}{\nu}\Big)^{1/3}.$$

Здесь $\theta_0 \approx 2$ — абсолютная константа, ее приближенное значение устанавливается из численных экспериментов с уравнением Риккати при единичных коэффициентах [16]. Величина ν характеризует скорость изменения исходных параметров в момент бифуркации; выражение для нее приведено в (2.9).

4.3. Свойства поправок

Поправки в асимптотическом решении (4.5) определяются из линейных уравнений и выписываются в явном виде через интегралы [4]. Для коэффициентов $\mathcal{X}_{k+1}(\theta)$ на каждом шаге решается алгебраическая система уравнений, в правых частях которой присутствуют производные предыдущего приближения. Поэтому порядок особенности в этих функциях растет с ростом номера, что накладывает ограничения на область пригодности асимптотического решения (4.5). Это обычная ситуация в задачах с бисингулярным возмущением [6], полностью аналогичная той, что исследована для похожих задач в [4; 10]. Поэтому мы приведем формулировки утверждений без их детального доказательства.

Лемма 7. *Коэффициенты в асимптотическом решении* (4.5) *определяются однозначно при условии согласования с внешним разложением. Они имеют асимптотику со степенным ростом на бесконечности*:

$$\mathcal{X}_{k+1}(\theta) = \mathcal{O}((-\theta)^{k+1/2}), \quad \theta \to -\infty, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Рост коэффициентов $\mathcal{R}_k(\theta)$ накладывает ограничения на область пригодности асимптотического решения в форме (4.5).

Вывод 2. *На левой полуоси* $\theta \le 0$ *ряд* (4.5) *представляет асимптотическое решение уравнения* (4.4) *при* $(-\theta) \ll \varepsilon^{-1/3}$.

Лемма 8. *Коэффициенты в асимптотическом решении* (4.5) *имеют асимптотику вблизи полюса*

$$\overline{\chi}_{k+1}(\theta) = (\theta_* - \theta)^{-k-1} P_k(\ln(\theta_* - \theta)[1 + o(1)], \quad \theta \to \theta_* - 0,$$

где P_k *— полиномы от логарифмов степени* k.

Из-за роста порядка особенностей вблизи полюса возникают ограничения на область пригодности асимптотического решения в форме ряда (4.5).

Вывод 3. *На правой полуоси* $\theta \ge 0$ *ряд* (4.5) *представляет асимптотическое решение уравнения* (4.4) *при условии* $\varepsilon^{1/3}(\theta_* - \theta)^{-1}|\ln(\theta_* - \theta)| \ll 1$.

5. Этап быстрой перестройки

Использование уравнения Риккати позволяет продвинуться в построении асимптотического решения за точку бифуркации $\tau = 0$. Однако это продвижение не велико и не дотягивается до полюса: $\tau \ll \varepsilon^{1/3}\theta_*$. В данном разделе строится асимптотика решения при $\varepsilon \to 0$ для значений θ вблизи полюса $\theta = \theta_*$. На этом, основном этапе, переходного слоя решение выходит на внешнюю асимптотику с главным членом $\mathbf{X}(\mathbf{a}(\tau)),\ \tau > 0$.

Формализм

Структура особенностей вблизи полюса указывает масштабы, которые подходят для построения асимптотического решения на следующем этапе. Быстрая переменная вводится как растяжение в окрестности полюса θ_* по формуле

$$\eta = (\theta - \theta_*)\varepsilon^{-1/3} + \sigma(\varepsilon). \tag{5.9}$$

Эта переменная соответствует быстрому времени $t = \tau/\varepsilon$ со сдвигом: $\eta = t - \theta_*\varepsilon^{-1/3} + \sigma(\varepsilon)$. Существенная часть сдвига имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/3})$ и определяется положением полюса в решении Риккати. Дополнительный сдвиг $\sigma(\varepsilon)$ подлежит вычислению в ходе асимптотических конструкций. В наивном подходе его следовало бы взять равным нулю. Однако при построении асимптотики выясняется, что сдвиг существенно зависит от малого параметра $\sigma(\varepsilon) \approx \ln\varepsilon$ и в более простой форме асимптотического решения не существует [4]. Отметим, что логарифмические сдвиги в фазе часто встречаются в асимптотиках для нелинейных уравнений.

Асимптотическое решение строится в виде ряда по дробным степеням:

$$\mathbf{x}(\tau;\varepsilon) = \mathcal{Y}(\eta) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/3}\mathcal{Y}_k(\eta,\varepsilon).$$

Исходные уравнения, записанные в быстром времени η, содержат малый параметр только в коэффициентах $\mathbf{a}(\tau) = \{A(\tau), B(\tau), \Lambda(\tau)\}$. Медленная переменная τ, от которой зависят эти коэффициенты, теперь имеет более сложную связь с быстрой переменной: $\tau = \varepsilon\eta + \varepsilon^{2/3}\theta_* + \varepsilon\sigma(\varepsilon)$, так что $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\varepsilon\eta + \varepsilon^{2/3}\theta_* + \varepsilon\sigma(\varepsilon))$.

В главном члене асимптотики при $\varepsilon \to 0$ получается автономная система

$$\frac{d\mathcal{Y}}{d\eta} = \mathbf{f}(\mathcal{Y};\mathbf{a}_0), \quad \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^2, \quad \tau \in \mathbb{R}^1 \tag{5.10}$$

с $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(0)$, которая представляет собой частный случай исходных уравнений (1.1). Дифференциальные уравнения дополняются условиями на бесконечности из соображений согласования с решением в слое Риккати вблизи полюса. В главных членах асимптотики условия соответствуют выходу траектории из неподвижной точки[3]:

$$\mathcal{Y} \to \mathbf{X}(0) \ \text{ при } \eta \to -\infty. \tag{5.11}$$

Утверждение 1. *Пусть линия $\mathcal{L}$ деформации параметров $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau)$ в момент $\tau = 0$ пересекает трансверсально бифуркационную поверхность S и для рассматриваемого корня $Z(\mathbf{a})$ при $\tau = 0$ выполнено условие бифуркации $\mu\nu < 0$. Тогда для автономной системы* (5.10) *существует единственная фазовая траектория с условием* (5.11).

Доказательство. Точка $\mathbf{X}(0)$ является сложным равновесием типа седло-устойчивый узел для системы (5.10). В этом случае существует единственная выходящая фазовая траектория [15, с. 165]. □

[3]Термины “выходит” и “входит” означают неограниченное приближение траектории при $\eta \to -\infty$ и при $\eta \to +\infty$ соответственно [15].

Условия (5.11) определяют лишь фазовую траекторию автономных уравнений, а решение определяется с точностью до сдвига по независимой переменной η. Для выделения единственного решения нужна более детальная асимптотика на бесконечности. Подходящее условие можно получить из требования согласования при учете первых двух поправок в слое Риккати, как это сделано в [4]. Именно согласование приводит к появлению логарифмов $\ln\varepsilon$ в сдвиге фазы $\sigma(\varepsilon)$. В этой работе мы ограничимся выделением фазовой траектории, не уточняя краевое условие (5.11).

З а м е ч а н и е 2. Уравнения (5.10) с быстрой переменной $\eta = t$ можно использовать для описания начального погранслоя, следуя [5]. Погранслойные функции дают асимптотику решений, которые в момент $t = 0$ стартуют вдали от точки бифуркации и при $\eta \to \infty$ быстро выходят на устойчивое равновесие автономной системы. В рассматриваемой задаче траектория решения проходит вблизи точки бифуркации. Асимптотика решения идентифицируется исходя из требования согласования с асимптотикой в слое Риккати. Это приводит, во-первых, к сдвигу фазы (в быстрой переменной η). Во-вторых, к постановке задачи в форме (5.11) с асимптотикой на минус бесконечности.

6. Заключение

На основе полученных результатов можно дать описание главного члена асимптотического решения для уравнений (1.1). Надо иметь в виду, что на разных промежутках времени асимптотика дается разными формулами. Границы промежутков также описываются асимптотическими соотношениями. От выбора границ зависят оценки остаточных членов, как это всегда бывает в методе согласования [6]. Результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть линия $\mathcal{L}$ деформации параметров $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau)$ в момент $\tau = 0$ пересекает трансверсально бифуркационную поверхность S и для рассматриваемого корня $\mathbf{X}(\tau)$ при $\tau = 0$ выполнено условие бифуркации $\mu\nu < 0$. Тогда для системы* (1.1) *существует асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ решение с внутренним переходным слоем, которое в главных членах описывается решениями модельных задач, разными на разных интервалах*:

$$\mathbf{x}(t;\varepsilon) = \begin{cases} \mathbf{X}(\tau)[1 + o(1)] & \textit{при} \;\; \delta > -\tau \gg \varepsilon^{2/3}; \\ \mathbf{X}(0) + \varepsilon^{1/3}\mathcal{X}(\theta)[1 + o(1)], & -\theta \ll \varepsilon^{-1/3}, \quad (\theta_* - \theta)/|\ln(\theta_* - \theta)| \gg \varepsilon^{1/3}; \\ \mathcal{Y}(\eta)[1 + o(1)] & \textit{при} \;\; |\eta| \ll \varepsilon^{-1/3}. \end{cases}$$

Здесь независымые переменные связаны соотношениями $\tau = \varepsilon t,\ \theta = \tau\varepsilon^{-2/3}, \eta = (\theta - \theta_*)\varepsilon^{-1/3} + \sigma(\varepsilon)$; константа $\theta_* > 0$ — полюс решения Риккати (4.7)*. Области пригодности перекрываются, и тем самым асимптотика решения представлена на всем промежутке $-\delta \le \tau \le \delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конструкция формального асимптотического решения приведена выше. Обоснование асимптотики с оценкой остаточных членов можно выполнить способом, указанным в [12]; его детальное изложение выходит за рамки этой статьи. □

Важным результатом данной работы является формула (5.9), в которой определен сдвиг по независимой переменной. Сдвиг определяет положение переходного слоя. В медленном масштабе слой сдвинут от момента бифуркации $\tau = 0$ на величину $\theta_*\varepsilon^{2/3} + \mathcal{O}(\varepsilon\ln\varepsilon)$. Сдвиг интерпретируется, как затягивание потери устойчивости решения при бифуркации типа седло-узел. Похожие эффекты с затягиванием устойчивости известны в других системах с динамической бифуркацией [7; 17; 18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борич М.А., Буньков Ю.М., Куркин М.И., Танкеев А.П.** Ядерная магнитная релаксация, наведенная релаксацией электронных спинов // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т. 105, вып. 1. С. 23–27. doi: 10.7868/S0370274X17010052 .
2. **Kalyakin L.A.** Analysis of a mathematical model for nuclear spins in an antiferromagnet // Russian J. Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, no. 2. P. 217–234. doi: 10.20537/nd180206 .
3. **Калякин Л.А.** Асимптотика решения системы уравнений Ландау — Лифшица при динамической бифуркации седло-узел // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 2. С. 56–81.
4. **Калякин Л. А.** Асимптотика решения дифференциального уравнения при динамической бифуркации типа седло-узел // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 9. С. 59–74. doi: 10.1134/S0044466919090102 .
5. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 207 с.
6. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
7. **Berglund N.** Dynamic bifurcations: hysteresis, s caling laws and feedback control [e-resource]. 1999. 12 p. URL: https://arxiv.org/pdf/chao-dyn/9912008.pdf .
8. **Kiselev O.M.** Hard Loss of Stability in Painleve-2 Equation // J. Nonlinear Math. Phys. 2001. Vol. 8, no. 1. P. 65–95. doi: 10.2991/jnmp.2001.8.1.8 .
9. **Diminnie D.C., Haberman R.** Slow passage through homoclinic orbits for the unfolding of a saddle-center bifurcation and the change in the adiabatic invariant // Physica D. 2002. Vol. 162, no. 1-2. P. 34–52. doi: 10.1016/s0167-2789(01)00373-6 .
10. **Сулейманов Б. И.** Некоторые типичные особенности движения с торможением в случае плавной неоднородности // Доклады АН. 2006. Т. 407, №4. С. 460–462.
11. **Бутузов В.Ф.** О контрастных структурах с многозонным внутренним слоем // Моделирование и анализ информ. систем. 2017. Т. 24, №3. С. 288–308. doi: 10.18255/1818-1015-2017-3-288-308 .
12. **Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.** Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Наука, 1995. 336 с.
13. **Lebovitz N.R. and Schaar R.J.** Exchange of stabilities in autonomous systems // Stud. Appl. Math. 1975. Vol. 54, no. 3. P 229–260. doi: 10.1002/sapm1975543229 .
14. **Lebovitz N.R. and Schaar R.J.** Exchange of stabilities in autonomous systems-II. Vertical bifurcation // Stud. Appl. Math. 1977. Vol. 56. P. 1–50. doi: 10.1002/sapm19775611 .
15. **Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.
16. **Орлов В. Н.** Критерий существования подвижных особых точек решений дифференциального уравнения Риккати // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. №6/1(46). С. 64–69.
17. **Нейштадт А. И.** О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, №2. С. 226–233.
18. **Baer S. M., Erneux T., and. Rinzel J** The slow passage through a Hopf bifurcation: Delay, memory effects, and resonance // SIAM J. Appl. Math. 1989. Vol. 49, no. 1. P. 55–71. doi: 10.1137/0149003 .

Поступила 10.11.2021
После доработки 24.11.2021
Принята к публикации 29.11.2021

Калякин Леонид Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УфИЦ РАН
г. Уфа
e-mail: klenru@mail.ru

REFERENCES

1. Borich M.A., Bunkov Y.M., Kurkin M.I., Tankeyev A.P. Nuclear magnetic relaxation induced by the relaxation of electron spins. *Jetp Lett.*, 2017, vol. 105, no. 1, pp. 21–25. doi: 10.1134/S002136401701009X .
2. Kalyakin L.A. Analysis of a mathematical model for nuclear spins in an antiferromagnet. *Nelin. Dinam.*, 2018, vol. 14, no. 2, pp. 217–234. doi: 10.20537/nd180206 .
3. Kalyakin L.A. Asymptotics of the solution for the system of Landau–Lifsitz equations under saddle-node dynamical bifurcation. *Algebra i Analiz*, 2021, vol. 33, no. 2, pp. 56–81 (in Russian).
4. Kalyakin L.A. Asymptotics of the solution of a differential equation in a saddle–node bifurcation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 9, pp. 1454–1469. doi: 10.1134/S0965542519090100 .
5. Vassilyeva A.B., Butuzov V.F. *Asymptoticheckie razlozhenya reshenyi singul'arno vozmutshennykh uravnenyi* [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka Publ., 1990, 207 p.
6. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence: American Mathematical Society, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5 . Original Russian text published in Il'in A.M. *Soglasovanie asimtoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1989, 336 p.
7. Berglund N. Dynamic bifurcations: hysteresis, scaling laws and feedback control. 1999. 12 p. Available on: https://arxiv.org/pdf/chao-dyn/9912008.pdf .
8. Kiselev O.M. Hard loss of stability in Painleve-2 equation. *J. Nonlinear Math. Physics*, 2001, vol. 8, no. 1, pp. 65–95. doi: 10.2991/jnmp.2001.8.1.8 .
9. Diminnie D., Haberman H. Slow passage through homoclinic orbits for the unfolding of a saddle-center bifurcation and the change in the adiabatic invariant. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2002, vol. 162, no. 1-2, pp. 34–52. doi: 10.1016/S0167-2789(01)00373-6 .
10. Suleimanov B.I. On some typical features of motion with damping in the case of smooth inhomogeneity. *Dokl. Math.*, 2006, vol. 73, no. 2, pp. 299–301. doi: 10.1134/S1064562406020384 .
11. Butuzov V.F. On contrast structures with a multizonal interior layer. *Model. Anal. Inform. Syst.*, 2017, vol. 24, no. 3, pp. 288–308 (in Russian). doi: 10.18255/1818-1015-2017-3-288-308 .
12. Mishchenko E.F., Kolesov Yu.S., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. *Periodicheskie dvizheniya i bifurkatsionnye protsessy v singulyarno vozmushchennykh sistemakh* [Periodic movements and bifurcation processes in singularly perturbed systems]. Moscow: Nauka Publ., 1995, 336 p. ISBN: 5-02-015129-7 .
13. Lebovitz N.R., Schaar R.J. Exchange of stabilities in autonomous systems. *Studies Appl. Math.*, 1975, vol. 54, no. 3, pp. 229–260. doi: 10.1002/sapm1975543229 .
14. Lebovitz N.R., Schaar R.J. Exchange of stabilities in autonomous systems—II. Vertical bifurcation. *Studies Appl. Math.*, 1977, vol. 56, no. 1, pp. 1–50. doi: 10.1002/sapm19775611 .
15. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Methods and techniques of a qualitative study of dynamic systems on the plane]. Moscow: Nauka Publ., 1990, 488 p.
16. Orlov V.N. Criterion for the existence of mobile singular points of solutions of the differential equation Riccati. *Vestn. SamGU — Estestv. ser.*, 2006, vol. 46, no. 6-1, pp. 64–69.
17. Neishtadt A.I. Persistence of stability loss for dynamical bifurcations. II. *Differ. Equ.*, 1988, vol. 24, no. 2, pp. 171–176.
18. Baer S.M., Erneux T., Rinzel J. The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects, and resonance. *SIAM J. Appl. Math.*, 2006, vol. 49, no. 1, pp. 55–71. doi: 10.1137/0149003 .

Received November 10, 2021
Revised November 24, 2021
Accepted November 29, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 20-11-19995).

Leonid Anatol'evich Kalyakin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics of Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia, e-mail: klenru@mail.ru .

Cite this article as: L. A. Kalyakin. Asymptotics of a dynamic saddle-node bifurcation for the nuclear spin model in an antiferromagnet, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 111–126 .