ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 519.21+517.983+517.982.4

ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ, В РАСШИРЕНИИ КЛАССИФИКАЦИИ ГЕЛЬФАНДА—ШИЛОВА

И. В. Мельникова, В. А. Бовкун

Основным объектом исследования являются полугруппы операторов, соответствующие стохастическим процессам Леви. Изучена связь рассматриваемых полугрупп с псевдодифференциальными операторами (ΨD-операторами). На основе техники ΨD-операторов показано, что генераторы полугрупп являются операторами с ядрами, принадлежащими пространству медленно растущих распределений. Построена классификация задач Коши для уравнений с операторами из специального подкласса ΨD-операторов с полиномиально ограниченными символами. Построенная классификация является расширением классификации Гельфанда — Шилова для дифференциальных систем. В расширенной классификации задачи Коши с генераторами, отвечающими процессам Леви, являются корректными по Петровскому.

Ключевые слова: процесс Леви, переходная вероятность, полугруппа операторов, псевдо-дифференциальный оператор, формула Леви — Хинчина.

I. V. Melnikova, V. A. Bovkun. Semigroups of operators related to stochastic processes in an extension of the Gelfand–Shilov classification.

Semigroups of operators corresponding to stochastic Levy processes are considered, and their connection with pseudo-differential (ΨD) operators is studied. It is shown that the semigroup generators are ΨD-operators and operators with kernels from the space of slowly growing distributions. A classification of Cauchy problems is constructed for equations with operators from a special class of ΨD-operators with polynomially bounded symbols. The constructed classification extends the Gelfand–Shilov classification for differential systems. In the extended classification, Cauchy problems with generators corresponding to Levy processes are well-posed in the sense of Petrovskii.

Keywords: Levy process, transition probability, semigroup of operators, pseudo-differential operator, Levy–Khintchine formula.

MSC: 60G51, 60J35, 46F10, 47G30

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-74-87

Введение

Настоящая работа посвящена полугруппам операторов, важным как с точки зрения свойств генераторов из класса операторов, обобщающих дифференциальные и интегральные операторы, так и с точки зрения приложений. Изучаемые полугруппы описывают важные вероятностные характеристики случайных процессов Леви, задаваемые как функции от переходных вероятностей $P(0,x;t,B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская сигма-алгебра множеств в $\mathbb{R}^n$. Актуальность исследования полугрупп обусловлена тем, что процессы Леви дают возможность моделирования различных явлений с учетом непрерывных и скачкообразных случайных возмущений, возникающих в физике, экономике, социальных и биосистемах. Наряду с исследованием полугрупп важное место в работе уделено их генераторам, которые являются ΨD-операторами. Современная теория ΨD-операторов дает мощный аппарат исследования уравнений с частными производными и более общих уравнений, среди них уравнения для вероятностных характеристик процессов Леви (см. например, [1, гл. II, III; 2, разд. 5.6].

Работа состоит из трех разделов. В разд. 1 рассмотрены полугруппы операторов $U(t), t \geq 0$, связанные с базовыми случайными процессами — процессами сдвига, винеровским и Пуассона, простым и составным. Показано, что рассматриваемые полугруппы представимы в виде

$$U(t)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0,x;t,dy) = \langle f(\cdot), p(0,x;t,\cdot)\rangle \tag{0.1}$$

с плотностью переходной вероятности p, являющейся обобщенной функцией на C_0 — пространстве непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Такие полугруппы на пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$ измеримых ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций являются марковскими, т. е. для $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$ и $t \geq 0$ справедливы соотношения

$$f \geq 0 \Rightarrow U(t)f \geq 0; \quad f \leq 1 \Rightarrow U(t)f \leq 1; \quad U(t)1 = 1. \tag{0.2}$$

Если в дополнение к марковским свойствам полугруппа обладает свойством сильной непрерывности в пространстве $C_0(\mathbb{R}^n)$, то такие полугруппы называют *феллеровскими*.

В разд. 2 показано, что генераторы рассматриваемых полугрупп являются операторами с ядрами из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. Доказательство этого факта существенно опирается на свойство псевдодифференциальности генераторов (см., например, [2, теорема 3.3.3]). Для целостности изложения в доказательстве теоремы 1 приведена схема обоснования того, что генераторы рассматриваемых полугрупп являются ΨD-операторами, а сами полугруппы операторов — семействами ΨD-операторов с символами, зависящими от временного параметра t. Дана конструкция ядер для генераторов полугрупп, рассмотренных в разд. 1.

В разд. 3 на основе техники обобщенного преобразования Фурье, или техники характеристических функций в вероятностной терминологии, построено расширение классификации Гельфанда — Шилова [3] на случай уравнений с ΨD-операторами специального вида.

1. Полугруппы операторов, связанные с процессами Леви

Начнем с описания наиболее важных полугрупп операторов, связанных с базовыми процессами Леви — винеровским и Пуассона.

Определение [2, с. 43]. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Процессы Леви $\{X(t), t \geq 0\}$ — это случайные процессы, принимающие значения в измеримом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и удовлетворяющие следующим условиям:

- $X(0) = 0$ п.н.;
- имеют независимые приращения: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ независимы;
- однородны по времени: $\mathbb{P}((X(s+t) - X(s)) \in B)$, $s, t \geq 0$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, не зависит от s;
- стохастически непрерывны: для любого $\varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(\,|X(s+t) - X(s)| > \varepsilon\,) \to 0$ при $t \to 0$.

Для процессов Леви существует cadlag-модификация, траектории которой п.н. непрерывны справа и имеют конечные пределы слева (см., например, [4, с. 35]). В настоящей работе будем предполагать, что процесс Леви имеет траектории с указанным свойством.

Процессы Леви образуют подкласс феллеровских процессов (порождающих феллеровские полугруппы), которые в свою очередь образуют подкласс марковских процессов. Марковские процессы — это процессы $\{X(t), t \geq 0\}$, условные вероятности которых по алгебре $\mathcal{F}_s$ в момент времени $t \geq s$ зависят только от поведения процесса в момент s. Точнее, процесс $\{X(t), t \geq 0\}$, принимающий значения в измеримом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, является марковским, если для любых $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$ и $0 \leq s \leq t$ справедливо равенство [2, с. 83]

$$\mathbb{E}[f(X(t))|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X(t))|X(s)].$$

Ключевой характеристикой этих процессов является переходная вероятность $P(s,x;t,B) := \mathbb{P}(X(t) \in B | X(s) = x)$ — вероятность того, что в момент времени $t \geq s$ процесс находится в произвольной точке y множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, если в момент s он находился в положении x.

Для переходных вероятностей марковских процессов имеет место равенство Колмогорова — Чепмена (см., например, [5, с. 192])

$$P(s,x;t,B)=\int_{\mathbb{R}^n} P(s,x;r,dy)P(r,y;t,B), \quad 0\le s\le r\le t, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Для однородных по времени марковских процессов $P(s,x;t,B)=P(0,x;t-s,B)$. Тогда в силу теоремы Колмогорова (см., например, [5, с. 26]) однородный марковский процесс с точностью до распределения величины $X(0)$ определяется набором переходных вероятностей $P(0,x;\tau,B), \tau\ge 0$. Из этого факта следует, что для таких процессов наряду с переходной вероятностью ключевой характеристикой являются операторы $U(t)$ вида (0.1), которые ввиду уравнения Колмогорова — Чепмена обладают полугрупповым свойством

$$U(t+s)=U(t)U(s), \quad t,s\ge 0.$$

В дополнение к свойству однородности по времени процессы Леви обладают свойством однородности по пространству, т. е. переходная вероятность процесса Леви инвариантна относительно сдвига пространственных переменных (см., например, [6, гл. 2, разд. 10]):

$$P(s,x;t,B)=P(s,0;t,B-x), \quad 0\le s\le t, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Теперь переходим к описанию полугрупп, связанных с процессами сдвига, винеровским, пуассоновским и составным пуассоновским. Покажем, что эти полугруппы имеют близкие полугрупповые свойства, а именно, все они являются феллеровскими полугруппами. Однако эти полугруппы принципиально различаются с точки зрения приложений к моделированию случайных процессов и их вероятностных характеристик. Для наглядности будем рассматривать полугруппы, связанные с $\mathbb{R}$-значными процессами.

(i) Начнем с полугруппы операторов сдвига $U_1=\{U_1(t),t\ge 0\}$, связанной с процессом сдвига $X_1=\{X_1(t)=x+bt,t\ge 0\}$, $b\in\mathbb{R}$.

Процесс сдвига — детерминированный процесс. Для него имеют место свойства стохастической непрерывности, а также временной и пространственной однородности. Следовательно, справедливо равенство $P_1(0,x;t,(-\infty;y))=: P_1(0,x;t,y)=P_1(0,0;t,y-x)$ и X_1-x — это процесс Леви. На основе указанных свойств для процесса сдвига X_1 можно задать обобщенную плотность переходной вероятности[1] следующим образом:

$$p_1(0,x;t,y)=\delta_{x+bt}(y)=\delta(y-(x+bt)\,).$$

Тогда соответствующая процессу X_1 полугруппа сдвига имеет вид

$$U_1(t)f(x)=\langle f(\cdot),p_1(0,x;t,\cdot)\rangle=\langle f,\delta_{x+bt}\rangle=f(x+bt).$$

Эта полугруппа в силу соотношения $\|U_1(t)f-f\|_{C_0(\mathbb{R})} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, $f\in C_0(\mathbb{R})$, является сильно непрерывной на пространстве $C_0(\mathbb{R})$ и, следовательно, является феллеровской полугруппой.

Нетрудно проверить, что $u(x,t)=U_1(t)f(x)$ — значение функционала, зависящего от параметров $t\ge 0$ и $x\in\mathbb{R}$, — является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0, \quad u(x,0)=f(x).$$

[1]Функционал $p(0,x;t,\cdot)$ такой, что для любой функции $f\in C_0(\mathbb{R})$ справедливо равенство $\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy)=\langle f(\cdot),p(0,x;t,\cdot)\rangle$, будем называть *обобщенной плотностью переходной вероятности процесса* $\{X(t),t\ge 0\}$. В случае, когда переходная вероятность имеет производную в смысле Радона — Никодима, $p(0,x;t,\cdot)$ является регулярной обобщенной функцией.

Следовательно, генератором полугруппы U_1 является оператор дифференцирования первого порядка $A_1 = b\dfrac{\partial}{\partial x}$.

(ii) Рассмотрим полугруппу $U_2 = \{U_2(t), t \geq 0\}$, соответствующую винеровскому процессу $\{X_2(t), t \geq 0\}$ с плотностью переходной вероятности

$$p_2(0, x; t, y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a^2 t}}.$$

Тогда полугруппа U_2 задается следующим образом:

$$U_2(t)f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2a^2 t}} dy.$$

Эта полугруппа определена на пространстве $B_b(\mathbb{R})$, является сильно непрерывной на пространстве $C_0(\mathbb{R})$ и, следовательно, является феллеровской полугруппой. Как легко видеть, она однородна по времени и пространству и, значит, является полугруппой Леви. Более того, эта полугруппа сильно непрерывна на пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [7, разд. 4.6]).

Для U_2 функция $u(x,t) = U_2(t)f(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x,0) = f(x),$$

и генератором полугруппы U_2 является оператор $A_2 = \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

(iii) Рассмотрим процесс Пуассона $\{X(t), t \geq 0\}$ со скачками величины q, интенсивностью λ и $X(0) = 0$. Определим $X_3(t) = X(t) + x$. Такой процесс можно задать с помощью переходной вероятности

$$P_3(0, x; t, y) := P_3(0, x; t, (-\infty, y)) = \sum_{k=0}^{c_q} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где $c_q = c_q(x,y)$ равно целой части $\left[\dfrac{y-x}{q}\right]$ при $\left[\dfrac{y-x}{q}\right] \neq \dfrac{y-x}{q}$ и равно $\left(\dfrac{y-x}{q} - 1\right)$ — в противном случае. Тогда обобщенная плотность переходной вероятности определяется следующим образом:

$$p_3(0, x; t, y) = \sum_{k=0}^{c_q} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \delta_{x+kq}(y).$$

Для соответствующей процессу полугруппы получаем равенство

$$U_3(t)f(x) = \langle f(\cdot), p_3(0, x; t, \cdot)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} f(x + kq).$$

Полугруппа U_3 определена на пространстве $C_0(\mathbb{R})$, и по определению генератора для этой полугруппы получаем

$$A_3 f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[U_3(t) - I\right] f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[\langle f(y), \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \delta_{x+kq}(y)\rangle - f(x)\Big]$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[(e^{-\lambda t} - 1) f(x) + \lambda t e^{-\lambda t} f(x+q)\Big] = \lambda(f(x+q) - f(x)), \quad f \in C_0(\mathbb{R}).$$

Отсюда следует, что полугруппа U_3 является сильно непрерывной на пространстве $C_0(\mathbb{R})$ и что $u(x,t) = U_3(t)f(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda(u(x+q,t) - u(x,t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad u(x,0) = f(x).$$

Таким образом, в отличие от дифференциальных операторов A_1, A_2, генератором полугруппы U_3 является разностный оператор.

(iv) Рассмотрим полугруппу U_4, отвечающую процессу $X_4 = \{X_4(t), t \geq 0\}$, который определяется равенством $X_4(t) = x + X_\pi(t)$, где $X_\pi = \{X_\pi(t), t \geq 0\}$ — составной процесс Пуассона.

Пусть $\{z_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных $\mathbb{R}$-значных случайных величин с общим законом распределения μ_z и $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — стандартный процесс Пуассона с интенсивностью λ. Тогда $X_\pi(t) := z_1 + \ \ldots \ + z_{N(t)}$ и есть составной процесс Пуассона с интенсивностью λ.

В общем случае, не имея для такого процесса в явном виде ни плотности переходной вероятности, ни переходной вероятности для описания полугруппы, соответствующей X_4, мы используем технику (обобщенного) преобразования Фурье или, в вероятностной терминологии, технику характеристических функций.

Напомним используемые далее обозначения, связанные с характеристической функцией и преобразованием Фурье от меры μ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, от функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и от распределения $g \in S'(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}[\mu](\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\alpha,y)}\mu(dy) = \widehat{\mu}(\alpha), \quad \mathcal{F}^{-1}[\mu](\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,y)}\mu(dy),$$

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\alpha,y)}f(y)dy = \widehat{f}(\alpha), \quad \mathcal{F}^{-1}[f](\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,y)}f(y)dy,$$

$$\langle \varphi, \mathcal{F}g\rangle := (2\pi)^n\langle \mathcal{F}^{-1}\varphi, g\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Для характеристической функции случайной величины ξ, определяемой вероятностной мерой μ_ξ, будем использовать обозначение

$$\Phi_\xi(\alpha) := \mathbb{E}\big[e^{i(\alpha,\xi)}\big] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,y)}\mu_\xi(dy) = \widehat{\mu}_\xi(-\alpha). \tag{1.1}$$

Покажем, что для характеристической функции случайной величины $X_\pi(t)$ при каждом фиксированном $t \geq 0$ выполняется равенство

$$\Phi_{X_\pi(t)}(\alpha) = e^{t\lambda(\Phi_z(\alpha)-1)}. \tag{1.2}$$

Следуя [2, с. 27; 8, с. 22], для процесса X_π имеем

$$\Phi_{X_\pi(t)}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big(e^{i\alpha(z_1+\cdots+z_{N(t)})}\big|N(t)=k\big)\mathbb{P}(N(t)=k) = \sum_{k=0}^{\infty}\Phi_z^k(\alpha)\frac{(t\lambda)^k}{k!}e^{-t\lambda}$$
$$= e^{t\lambda(\Phi_z(\alpha)-1)} = e^{t\lambda(\widehat{\mu}_z(-\alpha)-1)}.$$

Таким образом, для любого $t \geq 0$ характеристическая функция случайной величины $X_\pi(t)$ выражается через интенсивность процесса N и через характеристическую функцию случайных величин z_k.

В силу равенства (1.2) и свойств случайных величин z_k получаем, что для любого $t \geq 0$ случайная величина $X_\pi(t)$ является безгранично делимой. Следовательно, процесс $X_\pi = X_4 - x$ (как и процессы $X_1 - x$, $X_2 - x$, $X_3 - x$) является процессом Леви.

Поскольку для процесса X_π имеем равенство $P_\pi(0,0;t,dy) = \mu_{X_\pi(t)}(dy)$, то, учитывая (1.1), (1.2), выводим следующее представление для переходной полугруппы процесса X_4:

$$\begin{aligned} U_4(t)f(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)P_4(0,x;t,dy) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y+x)P_\pi(0,0;t,dy) = \langle f(y+x), p_\pi(0,0;t,y)\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\langle f(y+x), \mathcal{F}[e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}](y)\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[f(y+x)](\sigma), e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}\rangle \\ &= \langle e^{-ix\sigma}\mathcal{F}^{-1}[f](\sigma), e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}\rangle = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\sigma)e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}](x), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

которое можно продолжить на пространство $C_0(\mathbb{R})$.

Для того чтобы получить представление генератора полугруппы U_4, воспользуемся связью полугрупп, отвечающих процессам Леви, и их генераторов с ΨD-операторами.

2. Генераторы как ΨD-операторы и операторы с ядрами

Псевдодифференциальным оператором (на классе функций f) называют оператор вида

$$Kf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x)} s(x,\alpha)\hat{f}(\alpha)d\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

где функция $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *символом ΨD-оператора.*

На классе функций $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ для операторов с локально ограниченными по x и полиномиально ограниченными по α символами имеем

$$Kf\,(x) = \mathcal{F}^{-1}[s(x,\cdot)\widehat{f}(\cdot)](x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Такие операторы обобщают дифференциальные операторы

$$K = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

с переменными ограниченными коэффициентами

$$Kf\,(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x}(i\alpha)^k\widehat{f}(\alpha)d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{n} a_k(x)e^{i\alpha x}(i\alpha)^k\widehat{f}(\alpha)d\alpha =: \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x}s(x,\alpha)\widehat{f}(\alpha)d\alpha,$$

где

$$s(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)(i\alpha)^k.$$

Отсюда следует, что генераторы полугрупп U_1 и U_2 как частный случай операторов (2.3) являются ΨD-операторами со степенными (по α) символами, но генераторы полугрупп U_3 и U_4 дифференциальными операторами не являются. Мы покажем, что операторы A_3 и A_4 тоже относятся к классу ΨD-операторов.

Более того, мы покажем, что генераторы полугрупп U, соответствующих сдвинутым на x процессам Леви, можно рассматривать как операторы с ядрами $\mathcal{K}$, действующими на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Согласно теореме Шварца о ядре (см., например, [9, с. 158]), существует взаимно-однозначное соответствие между непрерывными операторами

$$K : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}'(X) \tag{2.4}$$

и распределениями $\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(Y \times X)$. А именно, любому непрерывному оператору (2.4) соответствует единственное распределение

$$\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(Y \times X)\colon \langle\psi, K\varphi\rangle = \langle\varphi\otimes\psi, \mathcal{K}\rangle, \quad (\varphi\otimes\psi)\,(y,x) := \varphi(y)\psi(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}(Y), \quad \psi \in \mathcal{D}(X),$$

называемое *ядром оператора* K, и в обратную сторону по $\mathcal{K}$ определяется K. Отметим, что согласно [9] можно также рассматривать пары

$$K : \mathcal{S}(Y) \to \mathcal{S}'(X), \quad \mathcal{K} \in \mathcal{S}'(Y \times X).$$

В зависимости от специфики задач, решаемых с помощью ΨD-операторов, выделяют различные классы символов. В настоящей работе для определения генераторов полугрупп нам будет достаточно предполагать, что символ s принадлежит классу Хермандера [9, гл. VII]. В этом случае ΨD-оператор корректно определен на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и соответствующий $K : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Для символов, отвечающих самим полугруппам, следует использовать классы функций, зависящие от временного параметра.

Теорема. *Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — $\mathbb{R}^n$-значный процесс Леви и U — феллеровская полугруппа операторов, соответствующая процессу $X + x$. Тогда генератор полугруппы U является ΨD-оператором и оператором с ядром из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$.*

Доказательство. Сначала покажем, что полугруппа U, соответствующая процессу $\{X(t) + x, t \geq 0\}$, является ΨD-оператором на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, для этого используем формулу Леви — Хинчина. Поскольку $\{X(t), t \geq 0\}$ — процесс Леви со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$, для любого $t \geq 0$ характеристическая функция случайной величины $X(t)$ имеет вид $\Phi_{X(t)}(\alpha) = e^{t\eta(\alpha)}$, где $\eta = \eta(\alpha)$ определяется формулой Леви — Хинчина (см., например, [2, с. 45]):

$$\eta(\alpha) = i(b, \alpha) - \frac{1}{2}(\alpha\,, Q\alpha) + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(e^{i(\alpha,y)} - 1 - i(\alpha, y)\chi_{|y|\leq 1}(y)\right) \nu(dy), \quad \alpha \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

В этом равенстве $b \in \mathbb{R}^n$, Q — положительно определенная симметричная $n \times n$-матрица, ν — мера Леви на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тройка Леви (b, Q, ν) однозначно определяется процессом X. Кроме того, действительная часть функции η удовлетворяет неравенству

$$Re(\eta(\alpha)) \leq 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \tag{2.6}$$

и для модуля η имеет место полиномиальная оценка: $|\eta(\alpha)| \leq C(1 + |\alpha|)^2$ (см., например, [10, гл. XIII; 11, гл. III]).

Для произвольной $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ запишем представление переходной полугруппы через преобразование Фурье

$$U(t)f(x) = \mathbb{E}(f(X(t) + x)) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathbb{E}\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,\, x+X(t))}\hat{f}(\alpha)d\alpha\biggr), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда в силу теоремы Фубини имеем

$$U(t)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x)}\mathbb{E}(e^{i(\alpha,X(t))})\hat{f}(\alpha)d\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x)}e^{t\eta(\alpha)}\hat{f}(\alpha)d\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

Из этого представления следует, что полугруппа операторов, соответствующая процессу Леви, является псевдодифференциальным оператором с символом $s(x, \alpha) = e^{t\eta(\alpha)}$, ограниченным в силу оценки (2.6).

Далее, ввиду полученного для полугруппы представления (2.7) по определению генератора для произвольной $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} Af(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[U(t) - I\right]f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x)}\frac{e^{t\eta(\alpha)} - 1}{t}\hat{f}(\alpha)d\alpha \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x)}\eta(\alpha)\hat{f}(\alpha)d\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Исходя из полиномиальной оценки для функции η, приведенное равенство корректно определяет оператор A на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, и генератор является ΨD-оператором на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ с полиномиально ограниченным символом $s(x, \alpha) = \eta(\alpha)$.

Теперь с помощью представления генератора через символ покажем, что оператор A является оператором с ядром $\mathcal{K}$, действующим на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Чтобы установить связь между символом и ядром оператора, запишем представление для Af в несколько ином виде:

$$Af\,(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x)}\eta(\alpha)\widehat{f}(\alpha)d\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x)}\eta(\alpha)d\alpha\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\alpha,y)}f(y)dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathcal{K}(x,y)f(y)dy, \quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Ядро $\mathcal{K}$ здесь формально появилось как расходящийся интеграл

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x-y)}\eta(\alpha)d\alpha.$$

Придадим ядру $\mathcal{K}$ смысл, рассматривая его как распределение на основных функциях

$$\psi(x)\varphi(y)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n).$$

Учитывая равенство (2.2), имеем

$$\langle\psi(x)\varphi(y),\mathcal{K}(x,y)\rangle := \langle\psi(x),A\varphi(x)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)dx\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x)}\eta(\alpha)d\alpha\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\alpha,y)}\varphi(y)dy}$$

$$= \langle\psi(\cdot),\mathcal{F}^{-1}[\eta(\alpha)\hat{\varphi}(\alpha)](\cdot)\,\rangle.$$

Повторный интеграл в определении $\mathcal{K}$ сходится в силу гладкости функций ψ и φ, степенных оценок на символ η и поведения (прямого и обратного) преобразования Фурье от функций ψ и φ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, генератор A взаимно однозначно определяется ядром $\mathcal{K}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. □

Теперь покажем конструкцию ядер для генераторов $A_1 - A_4 : \mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, используя представление этих ΨD-операторов через символы, определяемые для каждого из них формулой (2.5).

Для генератора полугруппы U_1 с символом $s(\alpha) = \eta(\alpha) = ib\alpha$ получаем

$$\langle\psi(x)\varphi(y),\mathcal{K}_1(x,y)\rangle = \langle\psi,\mathcal{F}^{-1}[s(\alpha)]*\varphi\,\rangle = b\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(x)\varphi'(x)dx.$$

Для генератора полугруппы U_2 с символом $s(\alpha) = -\dfrac{a^2}{2}\alpha^2$

$$\langle\psi(x)\varphi(y),\,\mathcal{K}_2(x,y)\rangle = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(x)\varphi''(x)dx.$$

Для генератора полугруппы U_3 с символом $s(\alpha) = \lambda(e^{iq\alpha}-1)$ ядро определяется следующим образом:

$$\langle\psi(x)\varphi(y),\,\mathcal{K}_3(x,y)\rangle = \langle\psi,\,\mathcal{F}^{-1}[s(\alpha)]*\varphi\,\rangle$$

$$= \langle\psi(x),\,\lambda(\varphi(x+q)-\varphi(x))\rangle = \lambda\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(x)(\varphi(x+q)-\varphi(x))dx.$$

Для полугруппы, соответствующей процессу $\{X_4(t), t\geq 0\}$, сначала найдем генератор. Из представления (1.2) для характеристической функции $X_\pi(t), t\geq 0$ следует, что

$$\eta(\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}}\lambda(e^{i\alpha\beta}-1)\mu_z(d\beta).$$

Тогда, учитывая (2.8), с помощью теоремы Фубини и формул преобразования Фурье для $f \in \mathcal{S}$ получаем оператор

$$A_4 f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x}\int\limits_{\mathbb{R}}(e^{i\alpha\beta}-1)\lambda\mu_z(d\beta)\hat{f}(\alpha)d\alpha$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x}e^{i\alpha\beta}\hat{f}(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x}\hat{f}(\alpha)d\alpha\right)\lambda\mu_z(d\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}}\left(f(x+\beta)-f(x)\right)\lambda\mu_z(d\beta),$$

который можно продолжить на пространство $C_0(\mathbb{R})$. Отсюда для генератора полугруппы U_4, определяемого символом $s(\alpha) = \int_{\mathbb{R}}\lambda(e^{i\alpha\beta}-1)\mu_z(d\beta)$, получаем

$$\langle\psi(x)\varphi(y),\, \mathcal{K}_4(x,y)\rangle = \langle\psi,\, \mathcal{F}^{-1}[s(\alpha)\hat{\varphi}(\alpha)]\,\rangle = \left\langle\psi(x),\, \lambda\int\limits_{\mathbb{R}}[\varphi(x+\beta)-\varphi(x)]\mu_z(d\beta)\right\rangle$$

Для полугрупп $\{U_1(t), U_2(t), U_3(t), t \geq 0\}$ получаем ядра, зависящие от параметра t:

$$\delta_{x+bt}(y), \quad e^{-\frac{(x-y)^2}{2a^2 t}}, \quad \sum_{k=0}^{c_q}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\delta_{x+kq}(y).$$

Далее мы используем технику обобщенного преобразования Фурье и формулу Леви — Хинчина, чтобы расширить на некоторый класс ΨD-операторов классификацию Гельфанда — Шилова, построенную для линейных дифференциальных операторов.

3. Расширение классификации Гельфанда — Шилова на случай ΨD-операторов

Прежде чем переходить к построению классификации для задач с ΨD-операторами, имеющими полиномиально ограниченные символы, и выделить среди них задачи, связанные с процессами Леви, коротко рассмотрим "классическую" классификацию Гельфанда — Шилова.

Пусть задана дифференциальная задача Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \mathsf{A}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u(0,x) = f(x), \tag{3.1}$$

где

$$\mathsf{A}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big\{\mathsf{A}_{j,k}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big\}_{j,k=1}^m,$$

$\mathsf{A}_{j,k}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ — линейные дифференциальные операторы порядка, не превосходящего l. Решение задачи (3.1) при любых фиксированных $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$ является m-мерным вектором $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_m(t,x))$. Предложенный в [3] подход к решению этой задачи основан на применении к задаче (3.1) преобразования Фурье и решении преобразованной задачи Коши. При этом преобразование Фурье функции $f = (f_1, \ldots, f_m)$ определяется следующим образом:

$$\widetilde{f} = (\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_m), \quad \text{где} \quad \widetilde{f}_j(\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\alpha,x)}f_j(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, от задачи (3.1) переходим к преобразованной по Фурье задаче Коши, решение которой имеет вид $\widetilde{u}(t,\alpha) = e^{t\mathsf{A}(\alpha)}\widetilde{f}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, где $\mathsf{A}(\alpha)$ — оператор умножения на матрицу $\{\mathsf{A}_{j,k}(\alpha)\}_{j,k=1}^m$ с элементами, являющимися полиномами степени не выше l. Ключевую роль при исследовании свойств $\widetilde{u}$ — решения двойственной задачи — играют оператор $e^{t\mathsf{A}(\alpha)}$ и его расширение в комплексную плоскость $e^{t\mathsf{A}(\gamma)}$, $\gamma=\alpha+i\tau$, $\alpha,\tau\in\mathbb{R}^n$. На основе оценки

$$e^{t\Lambda(\gamma)}\le \left\|e^{t\mathsf{A}(\gamma)}\right\|_{\mathbb{R}^m}\le C(1+|\gamma|)^{l(m-1)}\cdot e^{t\Lambda(\gamma)},\quad t\ge 0,$$

классификация задачи, преобразованной по Фурье (а следовательно, и исходной), строится в работе [3] по поведению величины $\Lambda(\alpha)$, где $\Lambda(\gamma)=\max Re\,\lambda_k(\gamma)$, $\lambda_k(\gamma)$ — характеристические корни оператора $\mathsf{A}(\gamma)$.

Система (3.1) называется *корректной по Петровскому*, если существует константа $C>0$ такая, что $\Lambda(\alpha)\le C$, в частности, *параболической*, если

$$\exists\, C_1,h,C_2>0\colon \Lambda(\alpha)\le -C_1|\alpha|^h+C_2;$$

условно корректной, если

$$\exists\, C_1,C_2>0,\quad 0<h<1\colon \Lambda(\alpha)\le C_1|\alpha|^h+C_2;$$

некорректной, если выполняется оценка с приведенным порядком l_0 ($l_0\ge 1$):

$$\exists\, C_1,C_2>0\colon \Lambda(\alpha)\le C_1|\alpha|^{l_0}+C_2,$$

но не выполняются более сильные оценки.

В зависимости от типа, которому принадлежит система, определяется пространство основных и обобщенных функций, в которых корректна задача, преобразованная по Фурье. Далее, благодаря связи между найденными пространствами и пространствами их Фурье-образов, определяется пространство основных и обобщенных функций, в которых корректна исходная задача (см., например, [3; 12; 13]).

Переходим к задачам с операторами, принадлежащими некоторому специальному подклассу из пространства ΨD-операторов. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\Big(\mathsf{A}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)+\mathsf{K}\Big)u(t,x),\quad t\ge 0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad u(0,x)=f(x). \tag{3.2}$$

Здесь $\mathsf{A}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ — оператор, определенный в задаче (3.1), $\mathsf{K}=\{\mathsf{K}_{j,k}\}_{j,k=1}^m$, где $\mathsf{K}_{j,k}$ — ΨD-операторы, определяемые (согласно равенству (2.1)) символами

$$s_{j,k}(\alpha)=\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\Big(e^{i(\alpha,y)}-1-i(\alpha,y)\chi_{|y|\le 1}(y)\Big)\,\nu_{j,k}(dy),\quad j,k=1,\dots,m,\quad \alpha\in\mathbb{R}^n.$$

Относительно $\nu_{j,k}$ предполагаем, что при всех $j,k=1,\dots,m$ меры $\nu_{j,k}$ являются мерами Леви на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и, как было указано выше, $|s_{j,k}(\alpha)|\le C_{j,k}(1+|\alpha|)^2$. При таком определении операторы $\mathsf{K}_{j,k}$ имеют вид

$$\mathsf{K}_{j,k}f_k(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\big(f_k(x+y)-f_k(x)-(\nabla f_k(x),y)\chi_{|y|\le 1}(y)\big)\nu_{j,k}(dy),\quad j,k=1,\dots,m,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Далее от задачи (3.2) переходим к преобразованной по Фурье задаче. В силу линейности преобразования Фурье решение преобразованной задачи имеет вид $\widetilde{u}(t,\alpha)=e^{t(\mathsf{A}(\alpha)+\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha))}\widetilde{f}(\alpha)$, где $\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha)$ — оператор умножения на матрицу, элементами которой являются преобразования Фурье операторов $\mathsf{K}_{j,k}$, т.е. $\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha)=\{s_{j,k}(-\alpha)\}_{j,k=1}^m$. Отметим, что для функций $s_{j,k}(\alpha)$ и $s_{j,k}(-\alpha)$ как преобразований Фурье с аргументами, отличающимися знаками, имеют место одни и те же оценки $|s_{j,k}(-\alpha)|\le C_{j,k}(1+|\alpha|)^2$. Отсюда следует, что для нормы матрицы $\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha)$, рассматриваемой как линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^m$, справедлива оценка

$$\|\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha)\|^2_{\mathbb{R}^m}\le\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m|s_{j,k}(-\alpha)|^2\le C_{\mathsf{K}}^2(1+|\alpha|)^4,\quad C_{\mathsf{K}}>0,\quad \alpha\in\mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Из оценки (3.3) вытекает оценка для нормы оператора умножения на матричную экспоненту $e^{t\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha)}$:

$$\|e^{t\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha)}\|_{\mathbb{R}^m} = \Big\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \widetilde{\mathsf{K}}^j(\alpha) \Big\|_{\mathbb{R}^m} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \|\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha)\|^j_{\mathbb{R}^m} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} C^j_{\mathsf{K}} (1+|\alpha|)^{2j} = e^{C_{\mathsf{K}} t(1+|\alpha|)^2}, \quad t \geq 0.$$

Из этой оценки следуют оценки для операторов решения преобразованной по Фурье задачи (3.2) и возможность расширения классификации для указанного класса ΨD-операторов. Для задачи (3.2) возможны следующие случаи.

- Если оператор A задает параболическую задачу с параметром $h > 2$, то справедлива оценка

$$\big\|e^{t(\mathsf{A}(\alpha)+\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha))}\big\|_{\mathbb{R}^m} \leq C e^{t(-C_1|\alpha|^h + C_2 + C_{\mathsf{K}}(1+|\alpha|)^2)} \leq C e^{t(-C_4|\alpha|^{h-2}+C_5)}, \quad t \geq 0,$$

и такую задачу (3.2) следует называть *параболической.*

- Если оператор A задает параболическую задачу с параметром $h = 2$, то в зависимости от соотношений между константами C_1 и C_{K} задачу (3.2) следует называть *параболической* (при $C_1 > C_{\mathsf{K}}$) или *некорректной* при ($C_1 \leq C_{\mathsf{K}}$).

- Если оператор A задает параболическую задачу с параметром $h < 2$, то справедлива оценка

$$\big\|e^{t(\mathsf{A}(\alpha)+\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha))}\big\|_{\mathbb{R}^m} \leq C e^{t(-C_1|\alpha|^h + C_2 + C_{\mathsf{K}}(1+|\alpha|)^2)} \leq C e^{t(C_4|\alpha|^{2-h}+C_5)}, \quad t \geq 0,$$

и такую задачу (3.2) следует называть *условно корректной* (при $h > 1$) или *некорректной* (при $0 \leq h \leq 1$).

- Если оператор A задает некорректную систему с параметром l_0, то получаем оценку

$$\big\|e^{t(\mathsf{A}(\alpha)+\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha))}\big\|_{\mathbb{R}^m} \leq C e^{t(C_1|\alpha|^{l_0} + C_2 + C_{\mathsf{K}}(1+|\alpha|)^2)} \leq C e^{t(C_4|\alpha|^{r}+C_5)}, \quad t \geq 0,$$

где $r = \max\{l_0, 2\}$. Такую задачу (3.2) следует называть *некорректной.*

Теперь среди рассмотренных операторов

$$\mathsf{A}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \mathsf{K} \tag{3.4}$$

выделим операторы, связанные с генераторами процессов Леви. А именно, рассмотрим задачу Коши для уравнения с оператором (3.4) — генератором полугруппы, отвечающей процессу Леви, который определяется равенством

$$\Big(\mathsf{A}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \mathsf{K}\Big) f(x) = (b, \nabla f(x)) + \frac{1}{2} div(Q\nabla f(x))$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \big(f(x+y) - f(x) - (\nabla f(x), y)\chi_{|y|\leq 1}(y)\big)\nu(dy). \tag{3.5}$$

Предложение. *Задача Коши* (3.2) *с оператором* (3.4)*, определяемым равенством* (3.5)*, является корректной по Петровскому.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. От задачи (3.2) с оператором (3.5) переходим к преобразованной по Фурье задаче, свойства которой определяются поведением функции

$$F(\alpha) := \mathsf{A}(\alpha) + \widetilde{\mathsf{K}}(\alpha) = -i(b,\alpha) - \frac{1}{2}(\alpha\,, Q\alpha) + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} \Big(e^{-i(\alpha,y)} - 1 + i(\alpha,y)\chi_{|y|\leq 1}(y)\Big)\,\nu(dy).$$

Согласно формуле (2.5) полученная функция $F(\alpha)$ совпадает с функцией $\eta(-\alpha)$. Отсюда в силу оценки (2.6) получаем $\big|e^{t(\mathsf{A}(\alpha)+\widetilde{\mathsf{K}}(\alpha))}\big| \leq 1,\ t \geq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, задача Коши для уравнения с генератором полугруппы, отвечающей процессу Леви, является корректной по Петровскому. □

З а м е ч а н и е. Из теорем XIII.52 и XIII.53 [10] следуют два важных факта: $e^{tF(\alpha)}$ для каждого $t \geq 0$ является положительно определенной, в общем случае обобщенной функцией; полугруппа, порождаемая оператором (3.5), обладает свойством сохранения положительности (первое свойство в (0.2)). Тогда из теоремы Бохнера — Шварца [14, теорема IX.10] следует, что при построении решений в пространствах обобщенных функций для задач Коши с оператором (3.5) достаточно рассматривать эти задачи в пространстве медленно растущих распределений $\mathcal{S}'$. Это означает, что, в отличие от исходной классификации для задач с дифференциальными операторами, исследование выделенного класса задач при переходе к задачам, преобразованным по Фурье, не требует выхода в пространства обобщенных функций с комплексными аргументами. Это позволяет считать предложенное расширение классификации расширением классификации Гельфанда — Шилова.

В заключение раздела сравним рассмотренные полугруппы, отвечающие процессам Леви, с феллеровскими полугруппами, отвечающими феллеровским процессам более общим, чем процессы Леви. Напомним, что *феллеровские полугруппы* — это марковские полугруппы (свойства (0.2)), обладающие свойством сильной непрерывности на пространстве $C_0(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим их общие и различные свойства, на основе которых исследуем возможность расширения классификации для задач Коши с генераторами феллеровских полугрупп.

Начнем с того, что отметим важные специальные свойства, присущие генераторам феллеровских полугрупп. Из теоремы 3.6.6 [8] следует, что если оператор $A\colon C_0(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ является генератором феллеровской полугруппы, то

(i) A удовлетворяет принципу положительного максимума на $D(A)$, т. е. для любой $f \in D(A)$, удовлетворяющей условию $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = f(x_0) \geq 0$, справедливо неравенство $Af(x_0) \leq 0$;

(ii) A является диссипативным оператором, т. е. для любых $\lambda > 0$ и $f \in D(A)$ справедливо неравенство $\|(\lambda - A)f\| \geq \lambda\|f\|$[2].

Важность этих свойств оператора A с точки зрения свойств полугрупп, порождаемых случайными процессами, устанавливает теорема Хилле — Иосиды — Рэя, согласно которой линейный, замкнутый, плотно определенный оператор A порождает сильно непрерывную, сохраняющую положительность, сжимающую полугруппу, если и только если, A удовлетворяет принципу положительного максимума и $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$ (см., например, [2, теорема 3.5.1]).

Далее, поскольку генератор A феллеровской полугруппы удовлетворяет принципу положительного максимума, то при дополнительном условии $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset D(A)$ из теоремы Курержа [2, теорема 3.5.3] следует, что A имеет вид

$$Af(x) = c(x)f(x) + (b(x), \nabla f(x)) + \frac{1}{2}div\,(Q(x)\nabla f(x))$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{x\}} \big(f(y) - f(x) - \chi(x,y)\,(\nabla f(x), y-x)\big)\nu(x,dy), \tag{3.6}$$

где $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная неположительная функция, b — вектор с непрерывными координатами $b_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, матрица $Q(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ является симметричной и положительно определенной, $\nu(x,\cdot)$ — мера Леви, функция χ — локальная единица.

Таким образом, с помощью выделения такого свойства, как принцип положительного максимума, удается описать структуру генератора произвольной феллеровской полугруппы. Локальный характер данного свойства приводит к тому, что генератором является оператор с переменными коэффициентами в отличие от генератора полугруппы, порождаемой процессом Леви, являющегося оператором с постоянными коэффициентами. Расширение классификации Гельфанда — Шилова для задач с генераторами процессов Леви как раз и удалось построить

[2]В случае линейного оператора A из свойства диссипативности следует вложение $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$.

благодаря тому, что генераторы являются операторами с постоянными коэффициентами — это свойство позволило использовать технику преобразования Фурье. Соответствующие задачи в случае общих феллеровских процессов, генераторы которых имеют вид (3.6), а символы зависят от двух переменных, не вкладываются в классификацию Гельфанда — Шилова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трев Ф.** Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: в 2 т. Т. 1: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1984. 360 с.
2. **Applebaum D.** Levy processes and stochastic calculus. Cambridg: Cambridge University Press, 2009. 492 p. (Cambridge Studies in Advanced Math.; vol. 116). doi: 10.1017/CBO9780511809781 .
3. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958. 276 с.
4. **Böttcher B., Schilling R., Wang J.** Lévy matters *III*. Lévy-type processes: construction, approximation and sample path properties. Cham; Heidelberg; NY; Dordrecht; London: Springer, 2013. 199 p. doi: 10.1007/978-3-319-02684-8 .
5. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 408 с.
6. **Sato K.-I.** Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 536 p.
7. **Балакришнан А.В.** Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 383 с.
8. **Kolokoltsov V.N.** Markov processes, semigroups and generators. Berlin; NY: De Gruyter, 2011. 430 p. (De Gruyter Studies in Math.; vol. 38). doi: 10.1515/9783110250114 .
9. **Хермандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М: Мир, 1986. 464 с.
10. **Reed M., Simon B.** Methods of modern mathematical physics. Vol. 4: Analysis of operators. NY; London: Acad. Press, 1978. 325 p.
11. **Jacob N.** Pseudo-differential operators and Markov processes. Vol. 1. London: Imperial College Press, 2001. 493 p.
12. **Melnikova I.V.** Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions. NY: CRC Press, 2016. 306 p. doi: 10.1201/9781315372631 .
13. **Ануфриева У.А., Мельникова И.В.** Особенности и регуляризация некорректных задач Коши с дифференциальными операторами // Современная математика. Фундаментальные направления. 2005. Т. 14. С. 3–156.
14. **Reed M., Simon B.** Methods of modern mathematical physics. Vol. 2: Fourier analysis, self-adjointness. NY; London: Acad. Press, 1975. 384 p.

Поступила 27.02.2021
После доработки 1.09.2021
Принята к публикации 6.09.2021

Мельникова Ирина Валерьяновна
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры математического анализа
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: Irina.Melnikova@urfu.ru

Бовкун Вадим Андреевич
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры математического анализа
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: Vadim.Bovkun@urfu.ru

REFERENCES

1. Treves F. *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol.* 1*: Pseudodifferential operators*. Ser. University Series in Mathematics, NY: Springer US, 1980, 299 p. doi: 10.1007/978-1-4684-8780-0. Translated to Russian under the title *Vvedenie v teoriyu psevdodifferentsial'nykh operatorov i integral'nykh operatorov Fur'e*, vol. 1: *Psevdodifferentsial'nye operatory*, Moscow: Mir Publ, 1984, 360 p.
2. Applebaum D. *Levy processes and stochastic calculus*. Ser. Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 116. Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 492 p. doi: 10.1017/CBO9780511809781.
3. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Generalized functions, vol.* 3*: Theory of differential equations*. Providence: AMS Chelsea Publ., 1967, 222 p. ISBN: 978-1-4704-2661-3. Original Russian text published in Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Obobshchennye funktsii. Vypusk 3: Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1958, 276 p.
4. Böttcher B., Schilling R., Wang J. *Lévy matters* III. *Lévy-type processes: construction, approximation and sample path properties*. Cham; Heidelberg; NY; Dordrecht; London: Springer, 2013, 199 p. doi: 10.1007/978-3-319-02684-8.
5. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [Theory of stochastic processes]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 408 p. ISBN: 5-9221-0335-0.
6. Sato K.-I. *Levy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013, 536 p. ISBN: 9781107656499.
7. Balakrishnan A.V. *Applied functional analysis*. NY: Springer-Verlag, 1981, 373 p. ISBN: 0387905278. Original Russian text published in Balakrishnan A.V. *Prikladnoi funktsional'nyi analiz*, Moscow: Nauka Publ., 1980, 383 p.
8. Kolokoltsov V.N. *Markov processes, semigroups and generators*. Ser. De Gruyter Studies in Math., vol. 38, Berlin; NY: De Gruyter, 2011, 430 p. doi: 10.1515/9783110250114.
9. Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators* I. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2003, 440 p. doi: 10.1007/978-3-642-61497-2. Translated to Russian under the title *Analiz lineinykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T.* 1, Moscow: Mir Publ., 1986, 464 p.
10. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol.* 4*: Analysis of operators*. NY; London: Acad. Press, 1978, 325 p. ISBN: 9780080570457.
11. Jacob N. *Pseudo-differential operators and Markov processes. Vol.* 1. London: Imperial College Press, 2001, 493 p. ISBN: 9781783261345.
12. Melnikova I.V. *Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions.* NY: CRC Press, 2016, 306 p. doi: 10.1201/9781315372631.
13. Anufrieva U.A., Mel'nikova I.V. Peculiarities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators. *J. Math. Sci.*, 2008, vol. 148, no. 4, pp. 481–632. doi: 10.1007/s10958-008-0012-5.
14. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol.* 2 *: Fourier analysis, self-adjointness.* NY; London: Acad. Press, 1975, 384 p. ISBN: 0125850026.

Received February 27, 2021
Revised September 1, 2021
Accepted September 6, 2021

Irina V. Melnikova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: Irina.Melnikova@urfu.ru.

Vadim Andreevich Bovkun, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: Vadim.Bovkun@urfu.ru.

Cite this article as: I. V. Mel'nikova, V. A. Bovkun. Semigroups of operators related to stochastic processes in an extension of the Gelfand–Shilov classification, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 74–87.