

УДК 517.9

## ГРАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ<sup>1</sup>

А. И. Короткий, Ю. В. Стародубцева, И. А. Цепелев

Многие природные явления и процессы, такие как потоки лавы при экструзивном извержении вулканов, селевые потоки и оползни горных пород, снежные лавины могут иметь катастрофические последствия для жизни и деятельности человека и животных. Математическое моделирование подобных ситуаций представляет собой важную научную задачу. Все эти и многие другие явления и процессы могут быть представлены моделями гравитационного течения вязкой несжимаемой жидкости. Основными движущими силами в эволюции упомянутых потоков являются гравитационные силы, силы вязкого трения, силы межфазового взаимодействия. Для математического описания подобных процессов предлагаются математические модели движения двухфазной вязкой несжимаемой жидкости. Одну фазу такой жидкости представляет собой собственно вязкая несжимаемая жидкость (вязкая фаза), другую фазу — несжимаемая жидкость с малой плотностью и малой вязкостью, которую условно будем называть воздухом. Введение воздушной фазы позволяет несколько упростить математическую модель для общего потока жидкости и упростить для него граничные условия. Математическая модель включает в себя уравнение Навье — Стокса, уравнение несжимаемости, уравнение переноса вязкой фазы, а также соответствующие начальные и граничные условия. В работе изучаются такие математические модели. Установлена корректность соответствующих начально-краевых задач; для них доказаны теоремы о разрешимости в обобщенном (слабом) смысле. Исследована зависимость решения от исходных данных и некоторых параметров модели.

Ключевые слова: вязкость, вязкая жидкость, несжимаемая жидкость, многофазная жидкость, уравнение Навье — Стокса, уравнение переноса, обобщенное решение.

**A. I. Korotkii, Yu. V. Starodubtseva, I. A. Tsepelev. Gravitational flow of a two-phase viscous incompressible liquid.**

Many natural phenomena and processes, such as lava flows during extrusive eruptions of volcanoes, mudflows, rock landslides, and snow avalanches, can have catastrophic consequences for the life and activities of humans and animals. Mathematical modeling of such problems is an important scientific problem. All these and many other phenomena and processes can be represented by models of the gravitational flow of a viscous incompressible fluid. The main driving forces in the evolution of these flows are the forces of gravitation, viscous friction, and interphase interaction. For the mathematical description of such processes, we propose mathematical models of the motion of a two-phase viscous incompressible fluid. One phase of such a fluid is a viscous incompressible fluid (viscous phase) itself, and the other phase is an incompressible fluid with low density and low viscosity, which will be called air for convenience. The introduction of the air phase makes it possible to slightly simplify the mathematical model for the total fluid flow and simplify the boundary conditions for it. The mathematical model includes the Navier–Stokes equation, the incompressibility equation, the viscous phase transfer equation, and the corresponding initial and boundary value conditions. The introduced mathematical models are studied. It is established that the corresponding initial–boundary value problems are well-posed. Theorems on the solvability in the generalized (weak) sense are proved for initial–boundary value problems. The dependence of the solution on the initial data and some parameters of the model is investigated.

Keywords: viscosity, viscous liquid, incompressible liquid, multiphase liquid, Navier–Stokes equation, transfer equation, generalized solution.

MSC: 76D03, 76D05, 35Q30, 76T15

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-61-73

### Введение

Многофазный поток — это поток нескольких жидкостей. При этом одно и то же вещество, которое находится в разных агрегатных состояниях, может быть представлено многофазной

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft, Немецкое научно-исследовательское общество) в рамках научного проекта № 20-51-12002.

жидкостью. В многофазном потоке каждая жидкость может иметь свое собственное поле скоростей, или вся многофазная жидкость может иметь общее поле скоростей. Жидкости не смешиваются, но обладают некоторой областью взаимодействия и могут влиять друг на друга посредством межфазных сил, например, сил поверхностного натяжения, а также передачи энергии (массы) в зоне взаимодействия.

Сели и оползни, снежные лавины — распространенные явления в горах. Они вызывают громадные разрушения, сопровождаются человеческими жертвами и значительными материальными потерями. Чтобы бороться с селями и лавинами, необходимо их исследовать и уметь моделировать математическими методами. При геологических изысканиях и строительстве в лавиноопасных районах необходимо знать возможную скорость движения лавины, а также высоту ее фронта (см., например, [1]). В полной мере это относится и к потокам вулканической лавы (см., например, [2]).

Строительство крупных объектов часто сопровождается изменением рельефа местности, например, появлением котлованов, изменением русла рек и так далее. Последующие осадки могут привести к затоплению территорий, разрушению объектов инфраструктуры и значительным материальным затратам. Примером может служить территория Большого Сочи, где были построены олимпийские объекты [3].

Умение составить реальный прогноз событий математическими методами поможет правильно оценивать риски вмешательства человека в природу и разработать комплекс мер по предотвращению чрезвычайных ситуаций. Расходы на потери и ликвидацию последствий, связанных с потоками вулканической лавы, селями, снежными лавинами, могут намного превышать затраты на реализацию превентивных мер и организацию мероприятий по повышению осведомленности общественности (см. [4]). Человеческое сообщество должно быть готово к мониторингу таких природных явлений в реальном времени, а научные знания должны быть основой стратегий противостояния таким стихийным бедствиям.

Все вышеупомянутые природные явления и процессы могут быть представлены моделями течения многофазной вязкой несжимаемой жидкости, находящейся под воздействием гравитационной силы, сил вязкого трения и других сил. Для описания подобных процессов предлагаются математические модели движения двухфазной вязкой несжимаемой жидкости, которые включают в себя уравнение Навье — Стокса, уравнение несжимаемости, уравнение переноса, а также соответствующие начальные и граничные условия.

В данной работе исследуется корректность постановок начально-краевых задач для упомянутых выше моделей, вводится понятие обобщенного (слабого) решения соответствующей математической задачи, изучаются разрешимость задачи и зависимость решения задачи от исходных данных и параметров модели.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим для определенности процесс вытекания вязкой несжимаемой жидкости из вертикального канала (рис. 1). Опишем математическую модель рассматриваемого движения жидкости. В качестве основных уравнений состояния жидкости примем уравнения движения двухфазной вязкой жидкости. В модельной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (см. рис. 1) движение такой вязкой жидкости на промежутке времени  $t \in T = [t_0, \vartheta]$ , где  $t = t_0$  — начало времени наблюдения за процессом,  $t = \vartheta$  — конечный момент времени наблюдения за процессом, представляется уравнением Навье — Стокса и уравнением несжимаемости (неразрывности) (см. [5–10]):

$$L\mathbf{u} \equiv \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle (\rho\mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top)) = -\nabla p - \rho\mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  — декартовы координаты геометрической точки на плоскости;  $\mathbf{u} = (u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}))$  — скорость движения жидкости;  $\rho = \rho(t, x)$  — плотность;  $\mu = \mu(t, x)$  — вязкость;  $p = p(t, \mathbf{x})$  — давление;  $\mathbf{g} = (0, g)$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\nabla$  — вектор градиента,  $\top$  — символ, обозначающий транспонирование матрицы,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение векторов,  $\nabla \cdot$  — дивергенция вектора.

Модельные плотность и вязкость двухфазной среды определяются равенствами

$$\rho = \rho(t, \mathbf{x}) = \rho_L \alpha(t, \mathbf{x}) + \rho_A (1 - \alpha(t, \mathbf{x})) \quad \text{и} \quad \mu = \mu(t, \mathbf{x}) = \mu_L(\mathbf{x}) \alpha(t, \mathbf{x}) + \mu_A (1 - \alpha(t, \mathbf{x}))$$

соответственно, где  $\rho_A = \text{const}$  — плотность воздуха;  $\rho_L = \text{const}$  — плотность жидкости;  $\mu_A = \text{const}$  — вязкость воздуха и  $\mu_L = \mu_L(\mathbf{x})$  — вязкость жидкости. Функция  $\alpha = \alpha(t, \mathbf{x})$  характеризует местоположение жидкой фазы в области  $\Omega$ ; она принимает значение “единица”, если в момент времени  $t \in T$  точка  $\mathbf{x} \in \Omega$  принадлежит жидкости, и принимает значение “нуль”, если данная точка принадлежит воздушной фазе. Эта функция “переносится” со скоростью  $\mathbf{u}$  согласно уравнению адвекции (оно равносильно уравнению переноса плотности; см. [5;6]):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T, \quad (1.4)$$

$$\alpha(t_0, \mathbf{x}) = \alpha_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.5)$$

На границе модельной области задаются следующие граничные условия:

$$\Gamma_1: \mathbf{u} = -\varphi \mathbf{n}, \quad \alpha = 1, \quad t \in T; \quad (1.6)$$

$$\Gamma_2 \cup \Gamma_3: \mathbf{u} = 0, \quad t \in T; \quad (1.7)$$

$$\Gamma_4: \mathbf{u} = \psi \mathbf{n}, \quad t \in T, \quad \left( \int_{\Gamma_4} \psi d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \varphi d\Gamma \right). \quad (1.8)$$

Задача состоит в нахождении решения

$$(\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), p = p(t, \mathbf{x}), \alpha = \alpha(t, \mathbf{x})), \quad t \in T, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

начально-краевой задачи (1.1)–(1.8) с указанными выше начальными и граничными условиями (1.3), (1.5), (1.6)–(1.8). Величины  $\rho_A$ ,  $\rho_L$ ,  $\mu_A$ ,  $\mu_L$  считаются известными. Вычислению также подлежат модельные плотность и вязкость среды.

Система уравнений (1.1)–(1.8) имеет устойчивое решение, если произвольное по отношению к нему малое возмущение, возникнув в какой-либо момент, далее со временем убывает. В противном случае решение неустойчиво. Можно показать, что при малых числах Рейнольдса, когда вязкие силы играют преобладающую роль, гидродинамические решения устойчивы. Неустойчивость возникает при больших числах Рейнольдса, когда существенны инерционные

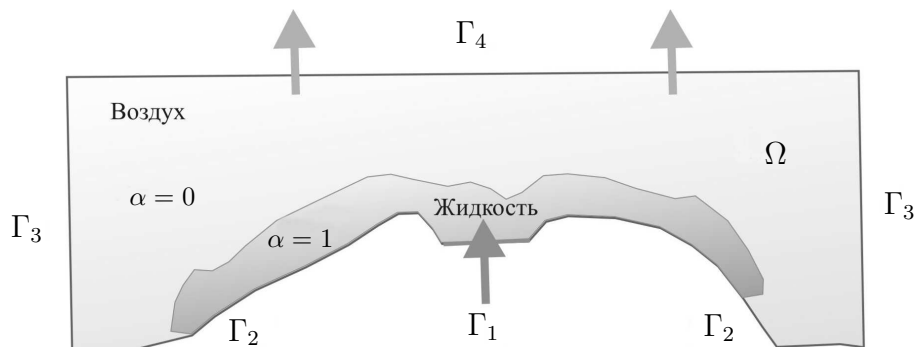


Рис. 1. Модельная область.

силы. Двухфазная жидкость также будет находиться в неустойчивом состоянии, если сверху находится более тяжелая жидкость. Такая система будет эволюционировать под действием силы тяжести. Ранее такие модели использовались при моделировании осадочных бассейнов. Процесс образования осадочного бассейна можно представить как результат погружения некоторого тела в очень вязкую жидкость (см. [11]). Экструзия минеральных солей на поверхность Земли и эволюция позднепермских солевых структур в Прикаспийском бассейне моделировались в [12].

Некоторые вопросы разрешимости в классическом или обобщенном смыслах близких по постановкам краевых задач исследовались в [10; 13–18].

Рассмотрим вопрос о разрешимости начально-краевой задачи (1.1)–(1.8) в обобщенном смысле и исследуем некоторые свойства этого решения. Сначала преобразуем исходную задачу к задаче с однородными граничными условиями следующим образом. Фиксируем какую-нибудь векторную функцию  $\eta \in W_2^1(T \times \Omega)^2 = \mathbf{W}_2^1(T \times \Omega)$ , удовлетворяющую граничным условиям из (1.6)–(1.8), а также условию несжимаемости  $\nabla \cdot \eta = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \in T$ . Условие существования такой функции назовем *условием продолжения*. Условие продолжения выполняется, например, при достаточно гладкой границе области  $\Omega$  и достаточно гладких скалярных функциях  $\varphi$  и  $\psi$ , удовлетворяющих соответственно на концах отрезков  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_4$  определенным условиям согласования (см. [10; 15; 16]). Ясно также, что если существует хотя бы одна такая функция продолжения, то их существует бесконечно много. Теперь решение исходной задачи будем искать в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \eta$ , где  $\mathbf{w}$  – новая искомая функция. Запишем начально-краевую задачу для  $\mathbf{w}$ :

$$L(\mathbf{w} + \eta) = -\nabla p - \rho \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha (\mathbf{w} + \eta)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \quad (1.11)$$

$$\Omega: \mathbf{w}(t_0, \cdot) = -\eta(t_0, \cdot), \quad \alpha(t_0, \cdot) = \alpha_0(\cdot); \quad (1.12)$$

$$\Gamma_1: \mathbf{w} = 0, \quad \alpha = 1, \quad t \in T; \quad (1.13)$$

$$\Gamma_2 \cup \Gamma_3: \mathbf{w} = 0, \quad t \in T; \quad (1.14)$$

$$\Gamma_4: \mathbf{w} = 0, \quad t \in T. \quad (1.15)$$

Отметим, что начально-краевая задача (1.9)–(1.15) содержит разрывные функции  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ , поэтому не может иметь классического (гладкого) решения. Это требует введения обобщенного решения.

Следуя [10; 13–18], введем понятие обобщенного решения начально-краевой задачи (1.9)–(1.15). Пусть  $\mathbf{J}(\Omega)$  ( $\mathbf{J}^1(\Omega)$ ) есть гильбертово пространство векторных функций, представляющее собой замыкание в норме пространства  $L_2(\Omega)^2 = \mathbf{L}_2(\Omega)$  ( $W_2^1(\Omega)^2 = \mathbf{W}_2^1(\Omega)$ ) множества всех гладких соленоидальных в  $\Omega$  функций с однородными граничными условиями из (1.13)–(1.15). Под обобщенным решением начально-краевой задачи (1.9)–(1.15) будем понимать тройку функций

$$(\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \alpha = \alpha(\mathbf{t}, \mathbf{x})), \quad t \in T, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

которые определяются как элементы функциональных пространств (см. [10; 13–18])

$$\mathbf{w} \in \mathbf{W}_2^{0,1}(T \times \Omega), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{L}_4(T \times \Omega), \quad \mathbf{w} \in C(T; \mathbf{L}_2(\Omega)), \quad \mathbf{w} \in L_\infty(T; \mathbf{J}(\Omega)) \cap L_2(T; \mathbf{J}^1(\Omega)),$$

$$p \in W_2^{0,1}(T \times \Omega), \quad \alpha \in L_\infty(T \times \Omega), \quad \alpha \in C(T; L_2(\Omega)),$$

и удовлетворяют следующим интегральным тождествам:

$$\int_T \int_\Omega \left[ \rho \left\langle (\mathbf{w} + \eta), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\rangle + \rho \left\langle \langle (\mathbf{w} + \eta), \nabla \rangle \mathbf{v}, (\mathbf{w} + \eta) \right\rangle \right] d\mathbf{x} dt$$

$$-2^{-1} \int_T \int_{\Omega} [\mu \langle (\nabla(\mathbf{w} + \eta) + \nabla(\mathbf{w} + \eta)^\top), (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top) \rangle + \rho \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle] d\mathbf{x} dt = 0 \quad (1.16)$$

(здесь  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^{1,1}(T \times \Omega)$ ,  $\mathbf{v} \in C^1(T; \mathbf{J}^1(\Omega))$  — любая пробная векторная функция такая, что  $\mathbf{v}(\vartheta, \cdot) = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0$  для  $t \in T$ , и удовлетворяющая однородным граничным условиям из (1.13)–(1.15));

$$\int_T \int_{\Omega} \alpha \left[ \frac{\partial \beta}{\partial t} + \langle \nabla \beta, \mathbf{w} \rangle + \langle \nabla \beta, \eta \rangle \right] d\mathbf{x} dt = 0 \quad (1.17)$$

(здесь  $\beta \in W_2^1(T \times \Omega)$ ,  $\beta \in C^1(T; W_2^1(\Omega))$  — любая пробная функция такая, что  $\beta(\vartheta, \mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  и  $\beta(t, \mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_2$ ,  $t \in T$ ).

Заметим, что в тождестве (1.16) отсутствует градиент давления. Это следует из того, что

$$\int_{\Omega} \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} p \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0.$$

Градиент давления  $\nabla p(t, \cdot)$  при каждом  $t \in T$  может быть однозначно найден из тождества (1.16) (см. [10; 13–15]) в силу того, что это тождество выполняется для всех пробных функций  $\mathbf{v}$  из указанного выше класса соленоидальных функций. Само давление  $p$  при каждом  $t \in T$  определяется по градиенту однозначно с точностью до произвольного слагаемого  $c(t)$ , не зависящего от  $\mathbf{x}$  (см. [10; 13–16]). Произвольные слагаемые  $c(t)$ ,  $t \in T$ , определяются из каких-либо дополнительных условий, на которых мы здесь останавливаться не будем, поскольку это не мешает однозначному определению искомой скорости в указанном классе функций. Таким образом, решение задачи фактически сводится к нахождению пары функций  $(\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \alpha = \alpha(t, \mathbf{x}))$ ,  $t \in T$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , удовлетворяющих интегральным тождествам (1.16) и (1.17) в указанных классах искомых и пробных функций. Эту пару функций далее и будем называть обобщенным решением краевой задачи (1.9)–(1.15).

## 2. Предварительные результаты

Пусть далее выполняются условия

$$\rho \in L_{\infty}(T \times \Omega): 0 < \rho_1 = \text{const} \leq \rho(t, \mathbf{x}) \leq \rho_2 = \text{const} < \infty, \quad (t, \mathbf{x}) \in T \times \Omega; \quad (2.1)$$

$$\mu \in L_{\infty}(T \times \Omega): 0 < \mu_1 = \text{const} \leq \mu(t, \mathbf{x}) \leq \mu_2 = \text{const} < \infty, \quad (t, \mathbf{x}) \in T \times \Omega. \quad (2.2)$$

Рассмотрим сначала отдельно начально-краевую задачу для уравнения переноса

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \langle \nabla \alpha, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T_*, \quad (2.3)$$

$$\alpha(t_*, \mathbf{x}) = \alpha_*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$\alpha(t, \mathbf{x}) = \tilde{\alpha}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad t \in T_*, \quad (2.5)$$

где  $T_* = [t_*, t^*]$  ( $-\infty < t_* < t^* < +\infty$ ) — произвольный отрезок времени,  $\mathbf{u}$ ,  $\alpha_*$ ,  $\tilde{\alpha}$  — некоторые заданные функции. Обобщенным решением задачи (2.3)–(2.5) назовем положительную функцию  $\alpha \in L_{\infty}(T_* \times \Omega) \cap C(T_*; L_2(\Omega))$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \alpha_*(\mathbf{x}) \beta(t_*, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{T_*} \int_{\Omega} \alpha \left[ \frac{\partial \beta}{\partial t} + \langle \nabla \beta, \mathbf{u} \rangle \right] d\mathbf{x} dt = \int_{T_*} \int_{\Gamma_1} \tilde{\alpha} \beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma dt \quad (2.6)$$

для любой пробной функции  $\beta \in W_2^1(T_* \times \Omega)$  такой, что  $\beta(t^*, \cdot) = 0$  и  $\beta = 0$  на  $T_* \times \Gamma_4$ .

**Лемма 1.** Пусть соленоидальная в  $\Omega$  векторная функция  $\mathbf{u} \in L_2(T_*; \mathbf{W}_2^1(\Omega))$  удовлетворяет граничным условиям

$$\mathbf{u} = -\varphi \mathbf{n}, \quad \varphi \geq 0 \text{ на } T_* \times \Gamma_1; \quad \mathbf{u} = 0 \text{ на } T_* \times (\Gamma_2 \cup \Gamma_3); \quad \mathbf{u} = \psi \mathbf{n}, \quad \psi \geq 0 \text{ на } T_* \times \Gamma_4.$$

Пусть положительные скалярные начальные и граничные данные принадлежат соответственно пространствам  $\alpha_* \in L_\infty(\Omega)$ ,  $\tilde{\alpha} \in L_\infty(T_* \times \Gamma_1)$ . Тогда начально-краевая задача (2.3)–(2.5) имеет единственное положительное обобщенное решение в смысле интегрального тождества (2.6). Кроме того, это решение принадлежит пространству  $C(T_*; L_q(\Omega))$  при любом  $q \in [1, \infty)$ .

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1 из [18, с. 41] (см. также [17, гл. 3, § 1–3]).  $\square$

Можно показать, что определение обобщенного решения задачи (2.3)–(2.5) в смысле интегрального тождества (2.6) равносильно определению обобщенного решения этой задачи в смысле интегрального тождества

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha(t_2, \mathbf{x}) \beta(t_2, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \alpha(t_1, \mathbf{x}) \beta(t_1, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \alpha \left[ \frac{\partial \beta}{\partial t} + \langle \nabla \beta, \mathbf{u} \rangle \right] \, d\mathbf{x} \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} \tilde{\alpha} \beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle \, d\Gamma \, dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

которое должно выполняться для любых моментов времени  $t_1 \in T_*$ ,  $t_2 \in [t_1, t^*]$  и любой пробной функции  $\beta \in W_2^1(T_* \times \Omega)$  такой, что  $\beta = 0$  на  $T_* \times \Gamma_4$  (см. [17, гл. 3, § 1, с. 110–111]). Из (2.7) следует, что функция

$$y = y(t) \equiv \int_{\Omega} \alpha(t, \mathbf{x}) \beta(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad t \in T_*,$$

абсолютно непрерывна на  $T_*$ , дифференцируема почти всюду на  $T_*$ , причем

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int_{\Omega} \alpha(t, \mathbf{x}) \left[ \frac{\partial \beta(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \langle \nabla \beta(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \rangle \right] \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_1} \tilde{\alpha}(t, \mathbf{x}) \beta(t, \mathbf{x}) \langle \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \rangle \, d\Gamma.$$

В условиях леммы 1 для любых  $t_1 \in T_*$  и  $t_2 \in [t_1, t^*]$  обобщенное решение начально-краевой задачи (2.3)–(2.5) удовлетворяет равенству (уравнению баланса)

$$\int_{\Omega} [\alpha(t_2, \cdot)^2 - \alpha(t_1, \cdot)^2] \, d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle \, d\Gamma \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} \alpha^2 \varphi \, d\Gamma \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_4} \alpha^2 \psi \, d\Gamma \, dt. \quad (2.8)$$

В частности, при условии  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = 0$  (это условие еще называют условием твердой стенки или условием непротекания) на  $T_* \times \Gamma$  имеем

$$\int_{\Omega} \alpha(t_2, \cdot)^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \alpha(t_1, \cdot)^2 \, d\mathbf{x}.$$

Сравнительно просто равенство (2.8) сначала устанавливается для классического решения задачи (2.3)–(2.5), затем обобщенное решение задачи (2.3)–(2.5) соответствующим образом аппроксимируется классическими решениями (см., например, обоснование леммы 1 в [18, с. 41–42]; потом в равенствах (2.8), записанных для классических решений, делается предельный переход, приводящий к равенству (2.8) для обобщенного решения.

Из (2.8) легко выводятся полезные неравенства

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [\alpha(t_2, \cdot)^2 - \alpha(t_1, \cdot)^2] d\mathbf{x} &\leq \int_{\Omega} [\alpha(t_2, \cdot)^2 - \alpha(t_1, \cdot)^2] d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_4} \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} \alpha^2 \varphi d\Gamma dt, \\
\max_{\tau \in [t_*, t]} \|\alpha(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \max_{\tau \in [t_*, t]} \|\alpha(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_{t_*}^t \int_{\Gamma_4} \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma d\tau \\
&\leq \|\alpha_*(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 - \int_{t_*}^t \int_{\Gamma_1} \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma d\tau \leq \|\alpha_*(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_{t_*}^t \int_{\Gamma_1} \alpha^2 \varphi d\Gamma d\tau \quad \forall t \in T_*. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь отдельно начально-краевую задачу для уравнения движения

$$L(\mathbf{w} + \eta) = -\nabla p - \rho \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T_*; \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T_*; \quad (2.11)$$

$$\Omega: \mathbf{w}(t_*, \cdot) = \mathbf{w}_*(\cdot); \quad (2.12)$$

$$\Gamma: \mathbf{w} = 0, \quad t \in T_*. \quad (2.13)$$

Под обобщенным решением начально-краевой задачи (2.10)–(2.13) будем понимать функцию

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(t, \mathbf{x}), \quad t \in T_*, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

принадлежащую функциональным пространствам (см. [10; 13–18])

$$\mathbf{w} \in \mathbf{W}_2^{0,1}(T_* \times \Omega), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{L}_4(T_* \times \Omega), \quad \mathbf{w} \in L_\infty(T_*; \mathbf{J}(\Omega)), \quad \mathbf{w} \in L_2(T_*; \mathbf{J}^1(\Omega))$$

и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned}
&\int_{T_*} \int_{\Omega} \left[ \rho \langle (\mathbf{w} + \eta), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \rangle + \rho \langle (\mathbf{w} + \eta), \nabla \mathbf{v}, (\mathbf{w} + \eta) \rangle \right] d\mathbf{x} dt \\
&- 2^{-1} \int_{T_*} \int_{\Omega} \left[ \mu \langle (\nabla(\mathbf{w} + \eta) + \nabla(\mathbf{w} + \eta)^\top), (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top) \rangle + \rho \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle \right] d\mathbf{x} dt \\
&+ \int_{\Omega} \rho(t_*, \mathbf{x}) (\mathbf{w}_*(\mathbf{x}) + \eta(t_*, \mathbf{x})) \mathbf{v}(t_*, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (2.14)
\end{aligned}$$

для любой пробной векторной функции  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(T_* \times \Omega)$  такой, что  $\mathbf{v}(t^*, \cdot) = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0$  для почти всех  $t \in T_*$ , и удовлетворяющей однородным граничным условиям (2.13).

Это определение обобщенного решения задачи (2.10)–(2.13) в смысле интегрального тождества (2.14) равносильно определению обобщенного решения этой задачи в смысле интегрального тождества

$$\int_{\Omega} \rho(t_2, \mathbf{x}) (\mathbf{w}(t_2, \mathbf{x}) + \eta(t_2, \mathbf{x})) \mathbf{v}(t_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho(t_1, \mathbf{x}) (\mathbf{w}(t_1, \mathbf{x}) + \eta(t_1, \mathbf{x})) \mathbf{v}(t_1, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[ \rho \left\langle (\mathbf{w} + \eta), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\rangle + \rho \left\langle \langle (\mathbf{w} + \eta), \nabla \rangle \mathbf{v}, (\mathbf{w} + \eta) \right\rangle \right] d\mathbf{x} dt \\
&- 2^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[ \mu \left\langle (\nabla(\mathbf{w} + \eta) + \nabla(\mathbf{w} + \eta)^{\top}), (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^{\top}) \right\rangle + \rho \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle \right] d\mathbf{x} dt, \quad (2.15)
\end{aligned}$$

которое должно выполняться для любых моментов времени  $t_1 \in T_*$ ,  $t_2 \in [t_1, t^*]$  и любой пробной векторной функции  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(T_* \times \Omega)$  такой, что  $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$  для почти всех  $t \in T_*$ , и удовлетворяющей однородным граничным условиям (2.13) (см. рассуждения в [17, гл. 3, § 1, с. 110–111]).

Из (2.15) следует, что функция

$$s = s(t) \equiv \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x})(\mathbf{w}(t, \mathbf{x}) + \eta(t, \mathbf{x}))\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad t \in T_*$$

абсолютно непрерывна на  $T_*$ , дифференцируема почти всюду на  $T_*$ , причем

$$\begin{aligned}
\frac{ds(t)}{dt} &= \int_{\Omega} \left[ \rho \left\langle (\mathbf{w} + \eta), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\rangle + \rho \left\langle \langle (\mathbf{w} + \eta), \nabla \rangle \mathbf{v}, (\mathbf{w} + \eta) \right\rangle \right] d\mathbf{x} \\
&- 2^{-1} \int_{\Omega} \left[ \mu \left\langle (\nabla(\mathbf{w} + \eta) + \nabla(\mathbf{w} + \eta)^{\top}), (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^{\top}) \right\rangle + \rho \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle \right] d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

**Лемма 2.** При выполнении условия продолжения, условий (2.1), (2.2), включения  $\mathbf{w}_* \in \mathbf{J}(\Omega)$  начально-краевая задача (2.10)–(2.13) имеет единственное обобщенное решение. Это решение непрерывно по  $t$  на отрезке  $T_*$  в слабой топологии  $\mathbf{L}_2(\Omega)$ . При любых  $t_1 \in T_*$ ,  $t_2 \in [t_1, t^*]$  оно удовлетворяет энергетическому равенству

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \rho(t_2, \cdot) \langle \mathbf{w}(t_2, \cdot) + \eta(t_2, \mathbf{x}), \mathbf{w}(t_2, \cdot) + \eta(t_2, \mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[ \mu \left\langle (\nabla(\mathbf{w} + \eta) + \nabla(\mathbf{w} + \eta)^{\top}), (\nabla(\mathbf{w} + \eta) + \nabla(\mathbf{w} + \eta)^{\top}) \right\rangle \right] d\mathbf{x} d\tau \\
&= \int_{\Omega} \rho(t_1, \cdot) \langle \mathbf{w}(t_1, \cdot) + \eta(t_1, \mathbf{x}), \mathbf{w}(t_1, \cdot) + \eta(t_1, \mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} - 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [\rho \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} + \eta \rangle] d\mathbf{x} d\tau \quad (2.16)
\end{aligned}$$

и энергетическому неравенству

$$\begin{aligned}
&\rho_1 \|\mathbf{u}(t_2, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 + \mu_1 \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}(\tau, \cdot)\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2 d\tau \\
&\leq \rho_2 \|\mathbf{u}(t_1, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 + \rho_2 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{R}^2} \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}(\tau, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} d\tau. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** существования обобщенного решения аналогично доказательству утверждения из [17, гл. 3; 18, с. 28–58; 10, гл. 6, § 7] и включает следующие этапы: 1) построение приближенного решения методом Галеркина; 2) установление некоторых априорных



оценок для этих приближений и доказательство компактности этих приближений в пространствах, которым может принадлежать возможное решение; 3) осуществление предельного перехода в интегральных тождествах, определяющих приближенные решения. Доказательство единственности обобщенного решения проводится обычным образом: составляется разность двух возможных решений, для разности выписывается подходящая априорная оценка, из которой следует, что разность должна быть равна нулю (см. схему рассуждений, например, в [10, гл. 6, § 2]). Слабая непрерывность обобщенного решения по  $t \in T_*$  в  $\mathbf{L}_2(\Omega)$  доказывается как в [10, гл. 6, § 7]. Энергетическое равенство (2.16) следует из определения решения (2.15) при  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \eta$  и применения формул интегрирования по частям. Неравенство (2.17) непосредственно следует из (2.16). Обоснование леммы завершено.  $\square$

Из энергетического неравенства (2.16) вытекает ряд полезных неравенств

$$\begin{aligned} \rho_1 \|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 &\leq \rho_2 \|\mathbf{u}(t_*, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 + \rho_2 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{R}^2}^2 (t - t_*) + \rho_2 \int_{t_*}^t \|\mathbf{u}(\tau, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 d\tau \\ &\leq \rho_2 \|\mathbf{u}(t_*, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 + \rho_2 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{R}^2}^2 (t^* - t_*) + \rho_2 \int_{t_*}^t \|\mathbf{u}(\tau, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 d\tau \leq C_1 + \rho_2 \int_{t_*}^t \|\mathbf{u}(\tau, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 d\tau, \end{aligned}$$

где

$$C_1 \equiv \rho_2 \|\mathbf{u}(t_*, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 + \rho_2 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{R}^2}^2 (t^* - t_*).$$

Из последнего неравенства в силу неравенства Грануола (см. [10, с. 183]) имеем

$$\max_{t \in T_*} \|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_1}{\rho_1} \left[ 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (t^* - t_*) \exp\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} (t^* - t_*)\right) \right] \equiv C_2. \quad (2.18)$$

Из неравенств (2.17) и (2.18) для любого  $t \in T_*$  получаем неравенство

$$\rho_1 \|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 + \mu_1 \int_{t_*}^t \|\mathbf{u}(\tau, \cdot)\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2 d\tau \leq C_1 + \rho_2 (t^* - t_*) \rho_1 C_2 \equiv C_3. \quad (2.19)$$

### 3. Основные результаты

Рассмотрим теперь общую начально-краевую задачу (1.9)–(1.15), где

$$\rho = \rho(\alpha) = \rho_L \alpha(t, \mathbf{x}) + \rho_A (1 - \alpha(t, \mathbf{x})), \quad (3.1)$$

$$\mu = \mu(t, \mathbf{x}; \alpha) = \mu_L(t, \mathbf{x}) \alpha(t, \mathbf{x}) + \mu_A (1 - \alpha(t, \mathbf{x})). \quad (3.2)$$

Определим последовательные приближения к решению задачи (1.9)–(1.15) следующим способом. Введем предварительно обозначения:  $\mathbf{w}[\alpha] = \mathbf{w}[t, \mathbf{x}; \alpha]$ ,  $t \in T$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  — решение задачи (2.10)–(2.13) с плотностью и вязкостью вида (3.1), (3.2),  $T_* = T$ ,  $\mathbf{w}_*(\cdot) = -\eta(t_0, \cdot)$ ;  $\alpha[\mathbf{u}] = \alpha[t, \mathbf{x}; \mathbf{u}]$ ,  $t \in T$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  — решение задачи (2.3)–(2.5) при  $T_* = T$ ,  $\alpha_* = 0$ ,  $\tilde{\alpha} = 1$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \eta$ .

Начальное приближение имеет вид  $\alpha^{(0)} = \alpha[\mathbf{u}_0] = \alpha[t, \mathbf{x}; \mathbf{u}_0]$ ,  $t \in T$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;  $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}[\alpha^{(0)}] = \mathbf{w}[t, \mathbf{x}; \alpha^{(0)}]$ ,  $t \in T$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Следующие приближения определяются по правилу  $\alpha^{(k+1)} = \alpha[\mathbf{u}^{(k)}]$ ,  $\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}[\alpha^{(k)}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Докажем, что последовательность приближений  $\{(\mathbf{w}^{(k)}, \alpha^{(k)})\}$  при  $k \rightarrow \infty$  сходится в некотором смысле к обобщенному решению начально-краевой задачи (1.9)–(1.15).

Фиксируем произвольный номер  $k \in \mathbf{N}$  и установим для  $\alpha^{(k)}$  подходящую оценку, вытекающую из (2.9),

$$\|\alpha^{(k)}\|_{L_2(T \times \Omega)}^2 \leq (\vartheta - t_0) \max_{t \in T} \|\alpha^{(k)}(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\vartheta - t_0) \left[ \|\alpha^{(k)}(t_0, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 - \int_{t_0}^{\vartheta} \int_{\Gamma} \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma dt \right] = -(\vartheta - t_0) \int_{t_0}^{\vartheta} \int_{\Gamma} \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma dt \\
&= (\vartheta - t_0) \int_{t_0}^{\vartheta} \int_{\Gamma_1} \alpha^2 \varphi d\Gamma dt - (\vartheta - t_0) \int_{t_0}^{\vartheta} \int_{\Gamma_4} \alpha^2 \psi d\Gamma dt \leq (\vartheta - t_0) \int_{t_0}^{\vartheta} \int_{\Gamma_1} \varphi d\Gamma dt \equiv C_4. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Из (2.19) следует оценка

$$\|\mathbf{u}^{(k)}\|_{L_2(T \times \Omega)}^2 + \int_{t_0}^{\vartheta} \|\mathbf{u}^{(k)}(\tau, \cdot)\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2 d\tau \leq C_3 (\rho_1^{-1} + \mu_1^{-1}) \equiv C_5. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) следует ограниченность последовательностей  $\{\alpha^{(k)}\}$  и  $\{\mathbf{w}^{(k)}\}$  в гильбертовых пространствах  $L_2(T \times \Omega)$  и  $\mathbf{W}_2^1(T \times \Omega)$  соответственно. Тогда из этих последовательностей можно выделить подпоследовательности  $\{\alpha^{(k_m)}\}$  и  $\{\mathbf{w}^{(k_m)}\}$ , сходящиеся при  $m \rightarrow \infty$  слабо в пространствах  $L_2(T \times \Omega)$  и  $\mathbf{W}_2^1(T \times \Omega)$  соответственно к некоторым элементам  $\alpha^{(*)} \in L_2(T \times \Omega)$  и  $\mathbf{w}^{(*)} \in \mathbf{W}_2^1(T \times \Omega)$ . Покажем, что на самом деле подпоследовательность  $\{\alpha^{(k_m)}\}$  сходится при  $m \rightarrow \infty$  сильно в пространстве  $L_2(T \times \Omega)$  к элементу  $\alpha^{(*)}$ . Запишем тождество (1.17) для  $\alpha = \alpha^{(k_m)}$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(k_m)}$  и перейдем в нем к пределу при  $m \rightarrow \infty$ . В пределе получим тождество (1.17) с  $\alpha = \alpha^{(*)}$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(*)}$ , т.е. получим равенство  $\alpha^{(*)} = \alpha[\mathbf{w}^{(*)}]$ . Из уравнения баланса (2.8) имеем

$$\int_{\Omega} [\alpha^{(k_m)}(t, \cdot)]^2 dx = \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_2} \varphi d\Gamma dt = \int_{\Omega} [\alpha^{(*)}(t, \cdot)]^2 dx,$$

откуда следует, что  $\|\alpha^{(k_m)}\|_{L_2(T \times \Omega)} \rightarrow \|\alpha^{(*)}\|_{L_2(T \times \Omega)}$ .

В гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость

$$\alpha^{(k_m)} \rightarrow \alpha^{(*)} \text{ сильно в } L_2(T \times \Omega).$$

Тогда из (3.1) и (3.2) имеем

$$\rho^{(k_m)} = \rho(\alpha^{(k_m)}) \rightarrow \rho^* = \rho(\alpha^{(*)}) \text{ сильно в } L_2(T \times \Omega),$$

$$\mu^{(k_m)} = \mu(\alpha^{(k_m)}) \rightarrow \mu^* = \mu(\alpha^{(*)}) \text{ сильно в } L_2(T \times \Omega).$$

Запишем интегральное тождество (1.16) для  $\rho = \rho^{(k_m)}$ ,  $\mu = \mu^{(k_m)}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(k_m)}$  и перейдем в нем к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , в пределе получим тождество (1.16) с  $\rho = \rho^*$ ,  $\mu = \mu^*$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(*)}$ . Таким образом, пара функций  $(\mathbf{w}^{(*)} = \mathbf{w}[\alpha^{(*)}], \alpha^{(*)} = \alpha[\mathbf{w}^{(*)}])$  образует обобщенное решение начально-краевой задачи (1.9)–(1.15). Из единственности обобщенного решения следует, что сама последовательность приближений  $\alpha^{(k+1)} = \alpha[\mathbf{u}^{(k)}]$ ,  $\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}[\alpha^{(k)}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  сходится к этому решению. Доказанные здесь утверждения сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 1.** При выполнении условия продолжения и условий (2.1), (2.2) начально-краевая задача (1.9)–(1.15) имеет единственное обобщенное решение  $(\mathbf{u}, \alpha)$ . Обобщенное решение принадлежит также пространству  $C(T; \mathbf{L}_2(\Omega)) \times C(T; L_2(\Omega))$ . Это решение при любых  $t_1 \in T$  и  $t_2 \in [t_1, \vartheta]$  удовлетворяет энергетическому равенству (2.16) и уравнению баланса (2.8).

**Доказательство** разрешимости задачи проведено выше методом последовательных приближений. Доказательство единственности обобщенного решения проводится обычным образом: составляется разность двух возможных решений, для разности из соответствующих интегральных тождеств выводятся подходящие априорные оценки, из которых следует,

что разность должна быть равна нулю (см. схему рассуждений, например, в [10, гл. 6, § 2]). Слабая непрерывность обобщенного решения по  $t \in T$  в  $\mathbf{L}_2(\Omega)$  доказывается, как в [10, гл. 6, § 7]. Энергетическое равенство (2.16) следует из определения решения (2.14) при  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \eta$  и применения формул интегрирования по частям. Уравнение баланса (2.8) непосредственно следует из определения решения (2.7). Основные этапы обоснования теоремы завершены.  $\square$

Далее, в приложениях, связанных с обратными задачами (см. [16; 19; 20]), будет полезно следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Обобщенное решение начально-краевой задачи (1.9)–(1.15) непрерывно зависит от коэффициента вязкости в следующем смысле: если последовательность допустимых коэффициентов вязкости  $\{\mu_k\} \subset U$ ,  $U = \{\mu \in L_\infty(T \times \Omega) : \mu(t, \mathbf{x}) \in [\mu_1, \mu_2], (t, \mathbf{x}) \in T \times \Omega\}$  сходится к допустимому коэффициенту  $\mu^* \in U$  в пространстве  $L_2(T \times \Omega)$ , то соответствующая последовательность обобщенных решений  $\{(\mathbf{w}_k, \alpha_k)\}$  сходится слабо в пространстве  $\mathbf{W}_2^{0,1}(T \times \Omega) \times L_2(T \times \Omega)$  и при каждом  $t \in T$  — слабо в пространстве  $\mathbf{L}_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$  к обобщенному решению  $(\mathbf{w}^*, \alpha^*)$ , соответствующему коэффициенту  $\mu^*$ .*

Доказательство теоремы следует из оценок (2.8), (2.19) в результате предельного перехода в интегральном тождестве, определяющем решение.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романова Д. И. Трехмерное моделирование схода лавинных потоков средствами пакета OpenFOAM // Тр. Ин-та системного программирования РАН. 2017. Т. 29, вып. 1. С. 85–100. doi: 10.15514/ISPRAS-2017-29(1)-6.
2. Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O., Korotkii A. Numerical modelling of fluid flow with rafts: An application to lava flows // J. Geodynamics. 2016. Vol. 97. P. 31–41. doi: 10.1016/j.jog.2016.02.010.
3. Мальнева И. В., Кононова Н. К., Крестин Б. М. Особенности развития опасных природных процессов на территории Большого Сочи в соответствии с современными изменениями климата // Устойчивое развитие горных территорий. 2016. Т. 8, № 1. С. 73–80. doi: 10.21117/1998-4502-2016-8-1-73-80.
4. Ismail-Zadeh A., Takeuchi K. Preventive disaster management of extreme natural events // Natural Hazards. 2007. Vol. 42, no. 3. P. 459–467. doi: 10.1007/s11069-006-9075-0.
5. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Prosperetti A., Tryggvason G. Computational methods for multiphase flow. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 470 p.
8. Kolev N. I. Multiphase flow dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 781 p.
9. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Часть 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
10. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
11. Исмаил-заде А. Т., Лобковский Л. И., Наймарк Б. М. Гидродинамическая модель формирования осадочного бассейна в результате образования и последующего фазового перехода магматической линзы в верхней мантии // Выч. сейсмология. Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. Вып. 26. С. 139–155.
12. Volozh Y. A., Talbot C. J., Ismail-Zadeh A. T. Salt structures and hydrocarbons in the Pricaspian basin // American Association of Petroleum Geologist Bulletin. 2003. Vol. 87, no. 2. P. 313–334.
13. Темам Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
14. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
15. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и практика. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.
16. Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 364 с.
17. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 320 с.

18. **Кажихов А. В.** Избранные труды. Математическая гидродинамика. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2008. 420 с.
19. **Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Schubert G., Tsepelev I.** Numerical techniques for solving the inverse retrospective problems of thermal evolution of the Earth interior // *Computers and Structures*. 2009. Vol. 87, iss. 11–12. P. 802–811. doi: 10.1016/j.compstruc.2009.01.005.
20. **Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Tsepelev I.** Data-driven numerical modelling in geodynamics: Methods and applications. Berlin: Springer Intern. Publ., 2016. 105 p. doi: 10.1007/978-3-319-27801-8.

Поступила 21.07.2021

После доработки 9.08.2021

Принята к публикации 13.09.2021

Короткий Александр Илларионович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Стародубцева Юлия Владимировна

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: starodubtsevayv@yandex.ru

Цепелев Игорь Анатольевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: tsepelev@imm.uran.ru

## REFERENCES

1. Romanova D.I. 3D avalanche flow modeling using OpenFOAM. *Proceedings of ISP RAS*, 2017, vol. 29, no. 1, pp. 85–100 (in Russian). doi: 10.15514/ISPRAS-2017-29(1)-6.
2. Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O., Korotkii A. Numerical modelling of fluid flow with rafts: An application to lava flows. *J. Geodynamics*, 2016, vol. 97, pp. 31–41. doi: 10.1016/j.jog.2016.02.010.
3. Malneva I.V., Kononova N.K., Krestin B.M. Features of development of hazardous natural processes on the greater Sochi territory in compliance with modern climate change. *Sustainable Development of Mountain Territories*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 73–80 (in Russian). doi: 10.21117/1998-4502-2016-8-1-73-80.
4. Ismail-Zadeh A., Takeuchi K. Preventive disaster management of extreme natural events. *Nat. Hazards*, 2007, vol. 42, no. 3, pp. 459–467. doi: 10.1007/s11069-006-9075-0.
5. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford: Clarendon Press, 1961, 652 p. ISBN: 048664071X.
6. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1987, 539 p. ISBN: 9781483161044. Original Russian text published in Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika*, Moscow: Nauka Publ., 1986, 736 p.
7. Prosperetti A., Tryggvason G. *Computational methods for multiphase flow*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 470 p. doi: 10.1017/CBO9780511607486.
8. Kolev N.I. *Multiphase flow dynamics*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011, 781 p. doi: 10.1007/978-3-642-21372-4.
9. Nigmatulin R.I. *Dynamics of multiphase media*. Part 1. NY: Hemisphere Pub. Corp., 1991, 532 p. ISBN: 0891163166. Original Russian text published in Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred*, Part 1, Moscow: Nauka Publ., 1987, 464 p.

10. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. NY: Gordon and Breach, 1987, 224 p. ISBN: 0677207603. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neshhimaemoi zhidkosti*, Moscow: Nauka Publ., 1970, 288 p.
11. Ismail-Zadeh A.T., Naimark B.M., Lobkovsky L.I. Hydrodynamics model of sedimentary basins formation based on development and subsequent phase transformation of a magmatic lens in the upper mantle. *Computational Seismology and Geodynamics*, 1996, vol. 3, pp. 42–53. doi: 10.1029/CS003p0042.
12. Volozh Y.A., Talbot C.J., Ismail-Zadeh A.T. Salt structures and hydrocarbons in the Pricaspian basin. *American Association of Petroleum Geologist Bulletin*, 2003, vol. 87, no. 2, pp. 313–334. doi: 10.1306/09060200896.
13. Temam R. *Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1979, 529 p. ISBN: 0444853073. Translated to Russian under the title *Uravneniya Nav'e-Stoksa: Teoriya i chislennyi analiz*, Moscow: Mir Publ., 1981, 408 p.
14. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some methods of solving non-linear boundary value problems]. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969, 554 p. Translated to Russian under the title *Nekotorye metody resheniya nelineinykh kraevykh zadach*, Moscow: Mir Publ., 1972, 587 p.
15. Fursikov A.V. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*. Providence: American Mathematical Soc., 1999, 305 p. ISBN: 082189790X. Original Russian text published in Fursikov A.V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya*, Novosibirsk: Nauchnaya Kniga Publ., 1999, 360 p.
16. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoi zhidkosti* [Analysis and optimization in viscous fluid dynamics]. Vladivostok: Dal'nauka, 2008, 365 p.
17. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*. Amsterdam: North-Holland, 1990, 309 p. doi:10.1016/s0168-2024(08)x7006-7. Original Russian text published in Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. *Kraevye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkosti*. Novosibirsk: Nauka Publ., 1983, 320 p.
18. Kazhikhov A.V. *Izbrannye trudy: Matematicheskaya gidrodinamika* [Selected works: Mathematical hydrodynamics]. Novosibirsk: Izd-vo Instituta Gidrodinamiki im. M.A. Lavrentjeva SO RAN, 2008, 420 p. ISBN: 978-5-94671-007-7.
19. Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Schubert G., Tsepelev I. Numerical techniques for solving the inverse retrospective problem of thermal evolution of the Earth interior. *Computers and Structures*, 2009, vol. 87, no. 11-12, pp. 802–811. doi: 10.1016/j.compstruc.2009.01.005.
20. Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Tsepelev I. *Data-driven numerical modelling in geodynamics: methods and applications*. Berlin: Springer Intern. Publ., 2016, 105 p. doi: 10.1007/978-3-319-27801-8.

Received July 21, 2021

Revised August 9, 2021

Accepted September 13, 2021

**Funding Agency:** This work was supported jointly by the Russian Foundation for Basic Research and the German Research Society (project no. 20-51-12002).

*Alexander Illarionovich Korotkii*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: korotkii@imm.uran.ru.

*Yulia Vladimirovna Starodubtseva*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: starodubtsevayv@yandex.ru.

*Igor Anatolievich Tsepelev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tsepelev@imm.uran.ru.

Cite this article as: I. A. Tsepelev, A. I. Korotkii, Yu. V. Starodubtseva. Gravitational flow of a two-phase viscous incompressible liquid, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 61–73.