ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 517.518.45

ПОРЯДКОВЫЕ ОЦЕНКИ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА СУММ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

Н. Ю. Антонов, А. Н. Лукоянов

В работе рассматривается задача о порядковых оценках норм частичных сумм тригонометрических рядов Фурье как операторов из пространств Орлича $L^{\varphi}_{2\pi}$ в пространство 2π-периодических непрерывных функций $C_{2\pi}$. Установлено, что для произвольной порождающей класс Орлича функции φ справедлива оценка

$$||S_n(f)||_{C_{2\pi}} \leq C\varphi^{-1}(n)\ln(n+1)||f||_{L^{\varphi}_{2\pi}}, \qquad (*)$$

где $f \in L^{\varphi}_{2\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ — n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f, а константа $C > 0$ не зависит от f и от n. Кроме того, показано, что если функция φ удовлетворяет Δ_2-условию, то оценка $(*)$ может быть улучшена. А именно, справедливо неравенство

$$||S_n(f)||_{C_{2\pi}} \leq C\varphi^{-1}(n)||f||_{L^{\varphi}_{2\pi}}, \qquad f \in L^{\varphi}_{2\pi},\ n \in \mathbb{N},\ C = C(\varphi). \qquad (**)$$

Далее в работе строятся контрпримеры, показывающие, что если φ удовлетворяет Δ_2-условию, то на пространстве $L^{\varphi}_{2\pi}$ оценка $(**)$ является не улучшаемой по порядку, а если φ удовлетворяет Δ^2-условию, то на пространстве $L^{\varphi}_{2\pi}$ не улучшаемой по порядку будет оценка $(*)$.

Ключевые слова: ряд Фурье, пространства Орлича, константы Лебега.

N. Yu. Antonov, A. N. Lukoyanov. Order estimates for Lebesgue constants of Fourier sums in Orlicz spaces.

We consider the problem of order estimates for partial sums of trigonometric Fourier series as operators from Orlicz spaces $L^{\varphi}_{2\pi}$ to the space of 2π-periodic continuous functions $C_{2\pi}$. It is established that an arbitrary function φ generating an Orlicz class satisfies the estimate

$$||S_n(f)||_{C_{2\pi}} \leq C\varphi^{-1}(n)\ln(n+1)||f||_{L^{\varphi}_{2\pi}}, \qquad (*)$$

where $f \in L^{\varphi}_{2\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ is the nth partial sum of the trigonometric Fourier series of f, and the constant $C > 0$ is independent of f and n. In addition, it is shown that if the function φ satisfies the Δ_2-condition, then the estimate can be improved. More exactly,

$$||S_n(f)||_{C_{2\pi}} \leq C\varphi^{-1}(n)||f||_{L^{\varphi}_{2\pi}}, \qquad f \in L^{\varphi}_{2\pi},\ n \in \mathbb{N},\ C = C(\varphi). \qquad (**)$$

Counterexamples are constructed, which show that if φ satisfies the Δ_2-condition, then estimate $(**)$ is unimprovable in order on the space $L^{\varphi}_{2\pi}$ and, if φ satisfies the Δ^2-condition, then estimate $(*)$ is unimprovable in order on the space $L^{\varphi}_{2\pi}$.

Keywords: Fourier series, Orlicz space, Lebesgue constants.

MSC: 42A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-35-47

Введение

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Обозначим через $L^p_{2\pi}$ линейное нормированное пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\|_{L^p_{2\pi}} = \|f\|_p = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty_{2\pi}} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|, \qquad p = \infty.$$

Пусть $f \in L_{2\pi}$. Сопоставим функции f ее тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{0.1}$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются стандартным образом (см., например, [1, гл. 1, § 4; 2, гл. 1, п. 4]). Через $S_n(f,x)$ обозначим значение n-й частичной суммы ряда (0.1) в точке x:

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В теории рядов Фурье важной задачей является нахождение порядковой оценки нормы оператора взятия частичной суммы тригонометрического ряда Фурье, действующего из различных банаховых функциональных пространств в пространство непрерывных 2π-периодических функций $C_{2\pi}$ с нормой $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$. А именно, требуется найти такую величину $C(n)$, $n \in \mathbb{N}$, что для любых f из F и любых действительных x выполняется неравенство

$$|S_n(f,x)| \leqslant C(n)\|f\|_F,$$

где F — некоторое фиксированное банахово функциональное пространство. Особый интерес представляют оценки, имеющие точный (неулучшаемый) порядок по n, т. е. оценки с такими последовательностями величин $C(n)$, для которых справедливо следующее свойство:

$$\forall \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \colon \lambda_n > 0,\ \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \exists f \in F \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad S_n(f,x) \neq O(\lambda_n C(n)).$$

В случае, когда $F = C_{2\pi}$, Лебегом (см., например, [2, т. 1, гл. 2, п. 12]) была установлена справедливость логарифмической оценки для величин $C(n)$:

$$\exists K > 0 \quad \forall f \in C_{2\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|S_n(f)\|_{C_{2\pi}} \leqslant K \ln(n+1)\|f\|_{C_{2\pi}}.$$

Для $F = L^p_{2\pi}$, $1 \leqslant p < \infty$, как нетрудно проверить, можно взять $C(n)$, растущими по порядку как $n^{1/p}$:

$$\exists K = K_p > 0 \quad \forall f \in L^p_{2\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|S_n(f)\|_{C_{2\pi}} \leqslant K_p\, n^{1/p}\|f\|_p.$$

Причем в обоих случаях полученные оценки не улучшаемы по порядку.

В настоящей работе в качестве пространства F рассматривается естественное обобщение пространства $L^p_{2\pi}$, $1 < p < \infty$, — пространство Орлича $L^\varphi_{2\pi}$, построенное по произвольной N-функции φ. Ниже мы приведем необходимые сведения из теории N-функций и пространств Орлича и затем получим оценку сверху для величин $C(n)$ в случае $L^\varphi_{2\pi}$ для произвольной N-функции φ (теорема 1). Далее докажем (теорема 2), что эту оценку можно улучшить, если ограничиться функциями φ из класса Δ_2. Наконец, покажем неулучшаемость общей оценки из теоремы 1 для класса Δ^2 и оценки из теоремы 2 для класса Δ_2 (теоремы 3 и 4 соответственно). Определения классов Δ_2 и Δ^2 даны в следующем разделе.

1. Необходимые определения и вспомогательные утверждения

Напомним, что функция $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для любой пары $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ и числа $\alpha \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$\varphi(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leqslant \alpha\varphi(u_1) + (1-\alpha)\varphi(u_2).$$

Для выпуклой на $\mathbb{R}$ функции имеют место следующие известные свойства (см., например, [3, гл. 1, § 1, п. 2]):

1. В каждой точке u существуют правая производная $\varphi'_+(u)$ и левая производная $\varphi'_-(u)$, причем $\varphi'_-(u) \leqslant \varphi'_+(u)$.

2. $\varphi'_+(u)$ является неубывающей непрерывной справа функцией, $\varphi'_-(u)$ является неубывающей непрерывной слева функцией.

3. Почти всюду справедливо равенство $\varphi'_-(u) = \varphi'_+(u)$, т. е. почти всюду существует производная $\varphi'(u)$.

4. $\varphi(u)$ абсолютно непрерывна, и как следствие справедливо представление

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \int\limits_0^u \varphi'(t)dt.$$

Непрерывная выпуклая функция $\varphi(u)$ называется N-*функцией*, если она четна и обладает двумя предельными свойствами

$$\lim_{u\to 0} \frac{\varphi(u)}{u} = 0, \qquad \lim_{u\to +\infty} \frac{\varphi(u)}{u} = +\infty.$$

Любая N-функция φ представима в виде

$$\varphi(u) = \int\limits_0^{|u|} \varphi'_+(t)dt,$$

причем $\varphi'_+(t) > 0$ при $t > 0$, $\varphi'_+(0) = 0$, $\varphi'_+(\infty) = \infty$. Более того, имеет место следующее эквивалентное определение [3, гл. 1, § 1, п. 3]: функция $\varphi(u)$ называется N-*функцией*, если она допускает представление

$$\varphi(u) = \int\limits_0^{|u|} p(t)dt,$$

где $p(t)$ — положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \geqslant 0$ неубывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$p(0) = 0, \quad p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty.$$

Как следует из определений, N-функции выпуклые, непрерывные, четные, равны нулю в нуле и возрастают при положительных значениях аргумента. Примерами N-функций являются $|u|^p/p,\ p > 1,\ e^{|u|} - |u| - 1$.

Функция $q(s)$, определяемая равенством

$$q(s) = \sup_{p(t)\leqslant s} t,$$

называется *правой обратной к функции* $p(t)$.

Пусть функция $p(t)$ удовлетворяет свойствам, указанным в определениях N-функций, функция $q(s)$ — правая обратная к $p(t)$. Тогда функция

$$\overline{\varphi}(v) = \int\limits_0^{|v|} q(s)ds$$

называется *дополнительной к* N-*функции* $\varphi(u)$.

Так как $q(s)$ обладает теми же свойствами, что и $p(t)$, то $\overline{\varphi}(v)$ является N-функцией, и, соответственно, $q(s) = \overline{\varphi}'_+(s)$ почти всюду. Очевидно, что $\varphi(u)$ является дополнительной к $\overline{\varphi}(v)$.

Для дополнительных друг к другу N-функций справедливо неравенство Юнга [3, гл. 1, § 2, п. 2]

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad uv \leqslant \varphi(u) + \overline{\varphi}(v).$$

Равенство в нем достигается при $u = q(|v|)\operatorname{sign} v$ или $v = p(|u|)\operatorname{sign} u$, и, таким образом,

$$|u|p(|u|) = \varphi(u) + \overline{\varphi}(p(|u|)), \tag{1.1}$$

$$|v|q(|v|) = \overline{\varphi}(v) + \varphi(q(|v|)).$$

Также нам понадобится неравенство для обратных функций [3, гл. 1, § 2, п. 2]

$$\forall u > 0 \quad u < \varphi^{-1}(u) \cdot \overline{\varphi}^{\,-1}(u) \leqslant 2u. \tag{1.2}$$

Для дальнейшего изложения выделим два класса N-функций на основании того, как рост функций на бесконечности соотносится с ростом степенных функций.

Говорят, что N-функция φ удовлетворяет Δ_2-условию (принадлежит классу Δ_2), если

$$\exists k > 0 \quad \exists u_0 \geqslant 0 \quad \forall u \geqslant u_0 \quad \varphi(2u) \leqslant k\varphi(u).$$

Такому условию удовлетворяет, к примеру, функция $|u|^p/p,\ p > 1$, и не удовлетворяет функция $e^{|u|} - |u| - 1$. N-функции, удовлетворяющие Δ_2-условию, растут не быстрее степенных.

Говорят, что N-функция φ удовлетворяет Δ^2-условию (принадлежит классу Δ^2), если

$$\exists k > 1 \quad \exists u_0 \geqslant 0 \quad \forall u \geqslant u_0 \quad \varphi^2(u) \leqslant \varphi(ku).$$

Примером такой функции является $e^{|u|} - |u| - 1$ и не является $|u|^p/p,\ p > 1$. Каждая N-функция, удовлетворяющая Δ^2-условию, при больших значениях аргумента растет быстрее, чем функция e^{u^α} при некотором $\alpha > 0$.

Пусть φ — N-функция. *Классом Орлича* $\varphi(L)_{2\pi}$ называется множество измеримых 2π-периодических функций u, для которых

$$p(u;\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u(t))dt < \infty.$$

Пусть φ и $\overline{\varphi}$ — взаимно дополнительные друг к другу N-функции. *Пространством Орлича* $L^\varphi_{2\pi}$ назовем совокупность измеримых 2π-периодических функций u, удовлетворяющих условию

$$(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t)dt < \infty$$

при всех $v \in \overline{\varphi}(L)_{2\pi}$.

На пространстве Орлича можно определить две эквивалентные нормы

$$\|u\|_\varphi = \sup_{p(v;\overline{\varphi})\leqslant 1} \Big| \int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t)dt \Big|,$$

$$\|u\|_{(\varphi)} = \inf\Big\{k > 0\colon\ p\Big(\frac{u}{k};\varphi\Big) \leqslant 1\Big\},$$

где $\|u\|_\varphi$ называется *нормой Орлича*, а $\|u\|_{(\varphi)}$ — *нормой Люксембурга*. Отметим, что если $\varphi(u) = |u|^p/p$, $p > 1$, то норма Орлича в пространстве $L^\varphi_{2\pi}$ отличается от обычной интегральной

нормы пространства $L^p_{2\pi}$ постоянным множителем.
Известно, что
$$L^\infty_{2\pi} \subset \varphi(L)_{2\pi} \subset L^\varphi_{2\pi} \subset L_{2\pi}, \tag{1.3}$$
причем $\varphi(L)_{2\pi}$ совпадает с $L^\varphi_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет Δ_2-условию [3, гл. 2, § 9, п. 5].

Для нормы Орлича справедливо представление [3, гл. 2, § 10, п. 7]
$$\|u\|_\varphi = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\Bigl(1 + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(ku(t))dt\Bigr). \tag{1.4}$$
Более того, если найдется такое положительное число k^*, что
$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi}(\varphi'_+(k^*|u(t)|))dt = 1$$
$\bigl($это равенство в силу (1.1) эквивалентно равенству $k^*\int_{-\pi}^{\pi}|u(t)|\varphi'_+(k^*|u(t)|)dt - \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(k^*u(t))dt=1\bigr)$, то инфимум в (1.4) будет достигаться при $k = k^*$. В частности, если $\varphi'_+(u)$ непрерывна, то число k^* может быть указано для любой ограниченной функции u.

В дальнейшем нам понадобится представление для нормы Орлича характеристической функции $\chi_e(t)$ измеримого подмножества $e \subset [0, 2\pi)$ [3, гл. 2, § 9, п. 3]:
$$\|\chi_e\|_\varphi = \operatorname{mes} e \cdot \overline{\varphi}^{\,-1}\Bigl(\frac{1}{\operatorname{mes} e}\Bigr). \tag{1.5}$$
Если φ и $\overline{\varphi}$ — взаимно дополнительные друг к другу N-функции, то для пары пространств $L^\varphi_{2\pi}$ и $L^{\overline{\varphi}}_{2\pi}$ справедливо неравенство Гельдера [3, гл. 2, § 9, п. 4]:
$$\forall u \in L^\varphi_{2\pi} \quad \forall v \in L^{\overline{\varphi}}_{2\pi} \quad |(u, v)| \leqslant \|u\|_\varphi \, \|v\|_{\overline{\varphi}}. \tag{1.6}$$
Нам понадобятся следующие утверждения о свойствах N-функций из классов Δ_2 и Δ^2.

Лемма 1 [3, гл. 1, § 4, п. 3; 4, гл. 2, п. 2.3]. *Если N-функция φ удовлетворяет Δ_2-условию, то существуют такие постоянные $\alpha > 1$ и $v_0 \geqslant 0$, что при $v \geqslant v_0$ выполняется неравенство*
$$\frac{v\overline{\varphi}'_+(v)}{\overline{\varphi}(v)} > \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \tag{1.7}$$

Лемма 2. *N-функция φ удовлетворяет Δ^2-условию тогда и только тогда, когда*
$$\exists C > 1 \quad \exists v_0 \geqslant 0 \quad \forall v \geqslant v_0 \quad \varphi^{-1}(v^2) \leqslant C\varphi^{-1}(v). \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ удовлетворяет Δ^2-условию. Тогда существуют константы $k > 1$ и $u_0 \geqslant 0$ такие, что
$$\varphi^2(u) \leqslant \varphi(ku), \quad u \geqslant u_0.$$
Выберем $v_0 \geqslant 0$ из условия $\varphi^{-1}(v_0) \geqslant u_0$ и положим $u = \varphi^{-1}(v)$. В силу возрастания $\varphi^{-1}(v)$ при $v \geqslant 0$ имеем
$$\varphi^2(\varphi^{-1}(v)) \leqslant \varphi(k\varphi^{-1}(v)) \implies v^2 \leqslant \varphi(k\varphi^{-1}(v)) \implies \varphi^{-1}(v^2) \leqslant k\varphi^{-1}(v), \text{ если } v \geqslant v_0.$$
Пусть теперь для φ справедливо (1.8). Тогда в силу возрастания $\varphi(u)$ при $u \geqslant 0$
$$\varphi^{-1}(v^2) \leqslant C\varphi^{-1}(v) \implies v^2 \leqslant \varphi(C\varphi^{-1}(v)), \quad v \geqslant v_0.$$

Выберем u_0 таким, что $\varphi(u_0) \geqslant v_0$, и положим $v = \varphi(u)$. Получим

$$\varphi^2(u) \leqslant \varphi(Cu), \quad u \geqslant u_0.$$

Лемма доказана.

Далее мы также будем пользоваться тем фактом, что для n-й частичной суммы $S_n(f,x)$ тригонометрического ряда Фурье любой функции $f \in L_{2\pi}$ справедливо [1, гл. 1, § 32] интегральное представление

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt + o(1), \quad n \to \infty, \tag{1.9}$$

где $o(1)$ равномерно по всем $x \in [-\pi,\pi]$, а $D_n(t)$ — ядро Дирихле, определяемое формулой

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left((n+1/2)\,x\right)}{2\sin\left(x/2\right)}.$$

2. Оценки сверху

Получим порядковую оценку сверху для константы Лебега частичной суммы ряда Фурье для функций из пространства Орлича $L^{\varphi}_{2\pi}$, построенного по произвольной N-функции φ.

Теорема 1. *Пусть φ — произвольная N-функция. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для любой функции $f \in L^{\varphi}_{2\pi}$ и любого натурального числа n справедливо неравенство*

$$\|S_n(f)\|_{C_{2\pi}} \leqslant C\,\varphi^{-1}(n)\ln(n+1)\|f\|_{\varphi}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся неравенством Гельдера (1.6)

$$|S_n(f,x)| = \frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt\Big| \leqslant \frac{1}{\pi}\|f\|_{\varphi}\,\|D_n\|_{\overline{\varphi}}.$$

Оценим норму ядра Дирихле. Имеем

$$\|D_n\|_{\overline{\varphi}} = \sup_{p(v;\varphi)\leqslant 1}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)v(t)dt\Big| = 2\sup_{\substack{p(v;\varphi)\leqslant 1\\ v\text{-четная}}}\Big|\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)v(t)dt\Big|$$

$$\leqslant 2\sup_{p(v;\varphi)\leqslant 1}\Big|\int\limits_{0}^{1/n} D_n(t)v(t)dt\Big| + 2\sup_{p(v;\varphi)\leqslant 1}\Big|\int\limits_{1/n}^{\pi} D_n(t)v(t)dt\Big| = 2\big\|D_n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}\big\|_{\overline{\varphi}} + 2\big\|D_n\chi_{[\frac{1}{n},\pi]}\big\|_{\overline{\varphi}}.$$

Воспользовавшись значением нормы характеристической функции (1.5), для первого слагаемого в правой части получим

$$2\big\|D_n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}\big\|_{\overline{\varphi}} = 2\sup_{p(v;\varphi)\leqslant 1}\Big|\int\limits_{0}^{1/n} D_n(t)v(t)dt\Big| \leqslant 2\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\sup_{p(v;\varphi)\leqslant 1}\int\limits_{0}^{1/n}|v(t)|dt$$

$$= 2\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\|\chi_{[0,\frac{1}{n}]}\|_{\overline{\varphi}} = 2\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{n}\varphi^{-1}(n) \leqslant C_1\,\varphi^{-1}(n)$$

и для второго слагаемого соответственно

$$2\big\|D_n\chi_{[\frac{1}{n},\pi]}\|_{\overline{\varphi}} \leqslant 2\Big\|\frac{\pi}{2t}\chi_{[\frac{1}{n},\pi]}\Big\|_{\overline{\varphi}} = \pi\Big\|\frac{1}{t}\chi_{[\frac{1}{n},\pi]}\Big\|_{\overline{\varphi}}.$$

Исходя из представления (1.4) и выпуклости $\overline{\varphi}$, имеем

$$\Big\|\frac{1}{t}\chi_{[\frac{1}{n},\pi]}\Big\|_{\overline{\varphi}} = \inf_{k>0}\ \frac{1}{k}\Big(1+\int\limits_{1/n}^{\pi}\overline{\varphi}\Big(\frac{k}{t}\Big)dt\Big)$$

$$\leqslant \frac{n}{\overline{\varphi}^{\,-1}(n)}\bigg(1+\int\limits_{1/n}^{\pi}\overline{\varphi}\Big(\frac{\overline{\varphi}^{\,-1}(n)}{nt}\Big)dt\bigg) \leqslant \frac{n}{\overline{\varphi}^{\,-1}(n)}\Bigg(1+\int\limits_{1/n}^{\pi}\frac{\overline{\varphi}\Big(\overline{\varphi}^{\,-1}(n)\Big)}{nt}dt\Bigg)$$

$$= \frac{n}{\overline{\varphi}^{\,-1}(n)}\Big(1+\int\limits_{1/n}^{\pi}\frac{1}{t}dt\Big) = \frac{n}{\overline{\varphi}^{\,-1}(n)}\big(1+\ln n\pi\big) \leqslant C_2\ \varphi^{-1}(n)\ln{(n+1)},$$

так как $\dfrac{n}{\overline{\varphi}^{\,-1}(n)} < \varphi^{-1}(n)$ в силу (1.2). В итоге

$$\|D_n\|_{\overline{\varphi}} \leqslant C_1\ \varphi^{-1}(n) + \pi C_2\ \varphi^{-1}(n)\ln{(n+1)} \leqslant C\ \varphi^{-1}(n)\ln{(n+1)},$$

откуда вытекает (2.1).

Теорема доказана.

Покажем теперь, что в случае, когда N-функция φ удовлетворяет Δ_2-условию, оценка (2.1) может быть улучшена.

Теорема 2. *Пусть N-функция φ удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда существует константа $C>0$ такая, что для любой функции $f\in L^{\varphi}_{2\pi}$ и любого натурального числа n справедливо неравенство*

$$\|S_n(f)\|_{C_{2\pi}} \leqslant C\ \varphi^{-1}(n)\|f\|_{\varphi}. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть N-функция φ удовлетворяет Δ_2-условию. Положим

$$k = \frac{\overline{\varphi}^{\,-1}(n)}{n}.$$

Тогда при достаточно больших n справедливо двойное неравенство $1/n \leqslant k/v_0 \leqslant \pi$, где v_0 — из формулировки леммы 1. Отсюда, воспользовавшись леммой 1, получим

$$\int\limits_{1/n}^{\pi}\bigg(\frac{k}{t}\,\overline{\varphi}'_{+}\Big(\frac{k}{t}\Big)-\overline{\varphi}\Big(\frac{k}{t}\Big)\bigg)dt > \frac{1}{\alpha-1}\int\limits_{1/n}^{k/v_0}\overline{\varphi}\Big(\frac{k}{t}\Big)dt.$$

С другой стороны, при помощи метода интегрирования по частям имеем

$$\int\limits_{1/n}^{\pi}\bigg(\frac{k}{t}\,\overline{\varphi}'_{+}\Big(\frac{k}{t}\Big)-\overline{\varphi}\Big(\frac{k}{t}\Big)\bigg)dt = \int\limits_{k/\pi}^{kn}\Big(z\overline{\varphi}'_{+}(z)-\overline{\varphi}(z)\Big)\frac{k}{z^2}dz$$

$$= k\int\limits_{k/\pi}^{kn}\frac{1}{z}d\,\overline{\varphi}(z) - k\int\limits_{k/\pi}^{kn}\frac{\overline{\varphi}(z)}{z^2}dz = k\frac{\overline{\varphi}(z)}{z}\Big|_{k/\pi}^{kn} = \frac{\overline{\varphi}(kn)}{n} - \pi\,\overline{\varphi}\Big(\frac{k}{\pi}\Big) \leqslant \frac{\overline{\varphi}(kn)}{n} = 1,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{1/n}^{k/v_0} \overline{\varphi}\Big(\frac{k}{t}\Big)dt < \alpha - 1,$$

откуда

$$\Big\|\frac{1}{t}\chi_{[\frac{1}{n},\pi]}\Big\|_{\overline{\varphi}} \leqslant \frac{1}{k}\Bigg(1 + \int\limits_{1/n}^{k/v_0} \overline{\varphi}\Big(\frac{k}{t}\Big)dt + \int\limits_{k/v_0}^{\pi} \overline{\varphi}\Big(\frac{k}{t}\Big)dt\Bigg) \leqslant \frac{1}{k}\Big(\alpha + \overline{\varphi}(v_0)\Big(\pi - \frac{k}{v_0}\Big)\Big) \leqslant C\,\frac{1}{k} < C\varphi^{-1}(n).$$

Теорема доказана.

3. Оценки снизу

Покажем, что оценка (2.1) из теоремы 1 в случае, когда N-функция φ удовлетворяет Δ^2-условию, является неулучшаемой.

Теорема 3. *Пусть N-функция φ удовлетворяет Δ^2-условию, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда существует функция $f \in L_{2\pi}^{\varphi}$ такая, что*

$$S_n(f,0) \neq O(\lambda_n \varphi^{-1}(n)\ln n) \quad \textit{при} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конструкция построенной ниже функции f идейно основана на примере Лебега непрерывной функции, ряд Фурье которой не является всюду сходящимся [1, гл. 1, § 46].

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная, сколь угодно медленно стремящаяся к нулю с ростом n последовательность положительных чисел. Достаточно рассмотреть $\{\lambda_n\}$ невозрастающие и такие, что $\lambda_n \geqslant \dfrac{1}{\varphi^{-1}(n)}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\begin{aligned} &a_k = 2^{2^k}, \quad k \geqslant 1,\\ &\gamma_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k \geqslant 1,\\ &c_k = \varphi^{-1}(a_{k-1})\,\gamma_k, \quad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

Заметим, что $a_k = a_{k-1}^2$ при всех $k \geqslant 2$.

Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, свойства которой мы уточним позднее. Построим функцию

$$f(x) = \begin{cases} c_{n_k}\sin a_{n_k}x, & x \in \Big(\dfrac{\pi}{a_{n_k}}, \dfrac{\pi}{a_{n_k-1}}\Big],\ k \geqslant 1,\\[2ex] 0, & x \in [0,\pi] \setminus \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\pi}{a_{n_k}}, \frac{\pi}{a_{n_k-1}}\Big], \end{cases} \tag{3.2}$$

и доопределим ее четно и 2π-периодично на всю действительную ось.

Для интеграла $p(f;\varphi)$ справедлива оценка

$$p(f;\varphi) = 2\int\limits_0^{\pi} \varphi(f(t))dt = 2\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\pi/a_{n_k}}^{\pi/(a_{n_k-1})} \varphi(c_{n_k}|\sin a_{n_k}t|)dt \leqslant 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(c_{n_k})}{a_{n_k-1}}.$$

Тогда, если $\{n_k\}$ такая, что

$$\gamma_{n_k} \leqslant 1, \quad k \geqslant 1, \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{n_k} < \infty, \tag{3.4}$$

то

$$\frac{\varphi(c_{n_k})}{a_{n_k-1}} = \frac{\varphi(\varphi^{-1}(a_{n_k-1})\ \gamma_{n_k})}{a_{n_k-1}} \leqslant \gamma_{n_k},$$

и по признаку сравнения получим, что

$$p(f;\varphi) < \infty,$$

т. е. $f \in \varphi(L)_{2\pi}$, а значит, $f \in L^{\varphi}_{2\pi}$ в силу (1.3).

Из представления (1.9) имеем

$$S_{a_{n_k}}(f,0) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)\,\frac{\sin a_{n_k} t}{t}\,dt + o(1), \quad k \longrightarrow \infty.$$

Обозначим

$$J_{n_k} = \int\limits_0^{\pi} f(t)\,\frac{\sin a_{n_k} t}{t}\,dt,$$

тогда

$$J_{n_k} = \Bigg(\int\limits_0^{\pi/a_{n_k}} + \int\limits_{\pi/a_{n_k}}^{\pi/(a_{n_k-1})} + \int\limits_{\pi/(a_{n_k-1})}^{\pi}\Bigg) f(t)\frac{\sin a_{n_k} t}{t}\,dt = J^1_{n_k} + J^2_{n_k} + J^3_{n_k}.$$

Оценим по отдельности каждый интеграл в правой части

$$|J^1_{n_k}| \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} \int\limits_{\pi/a_{n_j}}^{\pi/(a_{n_j-1})} c_{n_j} |\sin a_{n_j} t|\ \frac{|\sin a_{n_k} t|}{t}\,dt \leqslant \pi \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{c_{n_j}}{a_{n_j-1}}\,a_{n_k}.$$

Так как

$$\frac{c_{n_k}}{a_{n_k-1}} = \frac{\varphi^{-1}(a_{n_k-1})\ \gamma_{n_k}}{a_{n_k-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

то при фиксированных $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ можно выбрать n_k столь большим, чтобы

$$\frac{\varphi^{-1}(a_{n_k-1})\ \gamma_{n_k}}{a_{n_k-1}} < \frac{1}{a_{n_{k-1}}k^2}, \tag{3.5}$$

откуда

$$|J^1_{n_k}| \leqslant \pi \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{a_{n_k}}{a_{n_{j-1}} j^2} < \pi \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Согласно (3.2) для $J^3_{n_k}$ имеем

$$|J^3_{n_k}| = \Bigg|\int\limits_{\pi/(a_{n_k-1})}^{\pi} f(t)\frac{\sin a_{n_k} t}{t}dt\Bigg| = \Bigg|\int\limits_{\pi/(a_{n_{k-1}})}^{\pi} f(t)\frac{\sin a_{n_k} t}{t}dt\Bigg|.$$

При фиксированных $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ в силу теоремы Римана о коэффициентах Фурье (см., например, [1, гл. 1, § 19] или [2, т. 1, гл. 2, теорема 4.4]) можно подобрать такое большое n_k, чтобы

$$\left| \int\limits_{\pi/(a_{n_{k-1}})}^{\pi} f(t)\frac{\sin a_{n_k} t}{t} dt \right| < \frac{1}{k}, \tag{3.6}$$

и как следствие

$$|J^3_{n_k}| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Наконец,

$$J^2_{n_k} = \int\limits_{\pi/a_{n_k}}^{\pi/(a_{n_k-1})} c_{n_k}\frac{\sin^2 a_{n_k} t}{t} dt = \frac{c_{n_k}}{2} \int\limits_{\pi/a_{n_k}}^{\pi/(a_{n_k-1})} \frac{1-\cos 2a_{n_k} t}{t} dt$$
$$= \frac{c_{n_k}}{2} \int\limits_{\pi/a_{n_k}}^{\pi/(a_{n_k-1})} \frac{dt}{t} - \frac{c_{n_k}}{2} \int\limits_{\pi/a_{n_k}}^{\pi/(a_{n_k-1})} \frac{\cos 2a_{n_k} t}{t} dt = \frac{c_{n_k}}{2} J^{2,1}_{n_k} - \frac{c_{n_k}}{2} J^{2,2}_{n_k}.$$

Для интегралов в правой части получим

$$J^{2,1}_{n_k} = \int\limits_{\pi/a_{n_k}}^{\pi/(a_{n_k-1})} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{a_{n_k}}{a_{n_k-1}}\right) = \ln(a_{n_k-1}),$$
$$|J^{2,2}_{n_k}| = \left| \int\limits_{\pi/a_{n_k}}^{\pi/(a_{n_k-1})} \frac{\cos 2a_{n_k} t}{t} dt \right| = \frac{a_{n_k}}{\pi} \left| \int\limits_{\pi/a_{n_k}}^{\xi} \cos 2a_{n_k} t dt \right| \leqslant \frac{a_{n_k}}{\pi} \frac{1}{a_{n_k}} = \frac{1}{\pi},$$

где $\xi \in \left(\dfrac{\pi}{a_{n_k}}, \dfrac{\pi}{a_{n_k-1}}\right)$.

В итоге

$$J^2_{n_k} \geqslant \frac{c_{n_k}}{2} J^{2,1}_{n_k} - \frac{c_{n_k}}{2}|J^{2,2}_{n_k}| \geqslant \frac{c_{n_k}}{2}\ln(a_{n_k-1}) - \frac{c_{n_k}}{2\pi} \geqslant C'\, c_{n_k}\ln(a_{n_k-1}),$$

где $C' > 0$ — некоторая константа.

Таким образом, если мы по индукции выберем последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям (3.3)–(3.6), то

$$|J_{n_k}| \geqslant |J^2_{n_k}| - |J^3_{n_k}| - |J^1_{n_k}| \geqslant C'\, c_{n_k}\ln(a_{n_k-1}) + o(1), \quad k \longrightarrow \infty.$$

В силу выбора $\{a_{n_k}\}$, невозрастания $\{\lambda_n\}$ и леммы 2 получим

$$\frac{|S_{a_{n_k}}(f,0)|}{\lambda_{a_{n_k}}\varphi^{-1}(a_{n_k})\ln a_{n_k}} \geqslant \frac{|S_{a_{n_k}}(f,0)|}{\lambda_{n_k}\varphi^{-1}(a_{n_k})\ln a_{n_k}} \geqslant \frac{C'\, c_{n_k}\ln(a_{n_k-1}) + o(1)}{\lambda_{n_k} C\, \varphi^{-1}(a_{n_k-1})\, 2\ln(a_{n_k-1})} \geqslant C''\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n_k}}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

а значит,

$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{|S_n(f,0)|}{\lambda_n\, \varphi^{-1}(n)\ln n} = \infty,$$

что и дает (3.1).

Теорема доказана.

Покажем теперь, что полученная в теореме 2 для N-функций φ из класса Δ_2 оценка (2.2) является неулучшаемой.

Теорема 4. *Пусть N-функция φ удовлетворяет Δ_2-условию, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Тогда существует функция $F \in L_{2\pi}^{\varphi}$ такая, что*

$$\sup_{n\geqslant 1} \frac{|S_n(F,0)|}{\lambda_n \varphi^{-1}(n)} = \infty. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности будем считать, что $\{\lambda_n\}$ невозрастающая и $\lambda_n \geqslant \dfrac{1}{\varphi^{-1}(n)}$ для всех натуральных n.

Рассмотрим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}(2^n)\sqrt{\lambda}_n, & x \in \Big(\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}\Big]; \\ 0, & x \in [0,\pi] \setminus \Big(\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}\Big], \end{cases} \tag{3.8}$$

и доопределим их четно и 2π-периодически на всю ось.

Выберем возрастающую последовательность $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\lambda_{n_i} \leqslant 1, \quad i \geqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda}_{n_i} < \infty.$$

Заметим, что

$$\forall x \in [0,\pi] \quad f_{n_i}(x) f_{n_j}(x) = 0, \quad i \neq j. \tag{3.9}$$

Положим

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x).$$

Используя последовательно (3.9) и теорему Леви [5, гл. 5, § 5, п. 5] для функциональных рядов, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(F(t))dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(t)\Big)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(f_{n_i}(t))dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(f_{n_i}(t))\,dt \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda}_{n_i} < \infty.$$

Таким образом, функция F будет принадлежать классу $\varphi(L)_{2\pi}$.

Зафиксируем $k > 0$. Тогда

$$|S_{2^{n_k}}(F,0)| = \Big|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t) D_{2^{n_k}}(t)\,dt\Big| = \Big|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(t)\Big) D_{2^{n_k}}(t)\,dt\Big|$$

$$\geqslant \Big|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\sum_{i=k}^{\infty} f_{n_i}(t)\Big) D_{2^{n_k}}(t)\,dt\Big| - \Big|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\sum_{i=1}^{k-1} f_{n_i}(t)\Big) D_{2^{n_k}}(t)\,dt\Big|.$$

Если $0 \leqslant l \leqslant n$ и $0 \leqslant t \leqslant 1/n$, то

$$0 \leqslant lt \leqslant 1 < \frac{\pi}{3} \implies \cos(lt) > \cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2} \implies D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{n} \cos(lt) > \frac{1}{2} + \frac{n}{2} > \frac{n}{2},$$

а значит,

$$\Big|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\sum_{i=k}^{\infty} f_{n_i}(t)\Big) D_{2^{n_k}}(t)\,dt\Big| \geqslant \Big|\frac{2}{\pi}\int_{1/2^{n_k+1}}^{1/2^{n_k}} f_{n_k}(t) D_{2^{n_k}}(t)\,dt\Big|$$

$$> \frac{2}{\pi}\varphi^{-1}(2^{n_k})\sqrt{\lambda}_{n_k} \frac{2^{n_k}}{2} \frac{1}{2^{n_k+1}} = \frac{1}{2\pi}\varphi^{-1}(2^{n_k})\sqrt{\lambda}_{n_k}.$$

С другой стороны,

$$\left|\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Bigl(\sum_{i=1}^{k-1} f_{n_i}(t)\Bigr)D_{2^{n_k}}(t)\,dt\right| = \left|\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{1/2^{(n_i+1)}}^{1/2^{n_i}} f_{n_i}(t)D_{2^{n_k}}(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{k-1}\varphi^{-1}(2^{n_i})\sqrt{\lambda_{n_i}}\left|\int\limits_{1/2^{n_i+1}}^{1/2^{n_i}}\frac{\sin\Bigl((2^{n_k}+\frac{1}{2})t\Bigr)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt\right|$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{k-1}\varphi^{-1}(2^{n_i})\sqrt{\lambda_{n_i}}\frac{1}{2\sin\Bigl(\frac{1}{2(2^{n_i+1})}\Bigr)}\left|\int\limits_{1/2^{n_i+1}}^{\xi}\sin\Bigl(\Bigl(2^{n_k}+\frac{1}{2}\Bigr)t\Bigr)\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{k-1}\varphi^{-1}(2^{n_i})\sqrt{\lambda_{n_i}}\frac{\pi 2^{n_i+1}}{2}\frac{2}{2^{n_k}+\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \varphi^{-1}(2^{n_{k-1}})2^{n_{k-1}}\frac{4}{2^{n_k}}\sum_{i=1}^{k-1}\sqrt{\lambda_{n_i}} \leqslant \varphi^{-1}(2^{n_k})\frac{4(k-1)2^{n_{k-1}}}{2^{n_k}}.$$

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ уже выбраны. Так как при наших предположениях

$$2^{n_k}\sqrt{\lambda_{n_k}} \geqslant \varphi^{-1}(2^{n_k})\sqrt{\lambda_{n_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty,$$

то можно подобрать n_k столь большим, чтобы выполнялось

$$\frac{4(k-1)2^{n_{k-1}}}{2^{n_k}\sqrt{\lambda_{n_k}}} < \frac{1}{4\pi}.$$

Тогда

$$|S_{2^{n_k}}(F,0)| \geqslant \varphi^{-1}(2^{n_k})\sqrt{\lambda_{n_k}}\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{4(k-1)2^{n_{k-1}}}{2^{n_k}\sqrt{\lambda_{n_k}}}\right) > \varphi^{-1}(2^{n_k})\sqrt{\lambda_{n_k}}\frac{1}{4\pi},$$

а значит,

$$\frac{|S_{2^{n_k}}(F,0)|}{\lambda_{2^{n_k}}\varphi^{-1}(2^{n_k})} \geqslant \frac{|S_{2^{n_k}}(F,0)|}{\lambda_{n_k}\varphi^{-1}(2^{n_k})} > \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_{n_k}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty,$$

и, следовательно, (3.7) имеет место.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Вместо функций (3.8) и построенной по ним функции F для доказательства теоремы 4 можно рассмотреть функцию (3.2), у которой

$$a_k = 2^k, \quad k \geqslant 1,$$
$$\gamma_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k \geqslant 1,$$
$$c_k = \varphi^{-1}(a_{k-1})\,\gamma_k, \quad k \geqslant 1.$$

Для этой функции можно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям доказательства теоремы 3, и получить вместо оценки (3.1) более слабое соотношение (3.7). При этом никаких дополнительных условий на N-функцию φ, в частности Δ_2-условия или Δ^2-условия, не требуется. Таким образом, можно сделать вывод, что утверждение (3.7) справедливо для произвольной N-функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: ГИМФЛ, 1961. 937 с.
2. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.
3. **Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: ГИМФЛ, 1958. 272 с.
4. **Rao M.M., Ren Z.D.** Theory of Orlicz spaces. NY: M. Dekker, 1991. 445 p.
5. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

Поступила 28.07.2021
После доработки 25.10.2021
Принята к публикации 27.05.2021

Антонов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зам. директора
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Лукоянов Александр Николаевич
магистрант
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: LiableFish@yandex.ru

REFERENCES

1. Bary N.K. *A treatise on trigonometric series*, vol. I,II. Oxford; NY: Pergamon Press, 1964, 553 p., 508 p. doi: 10.1002/zamm.19650450531 . Original Russian text published in Bari N.K. *Trigonometricheskie ryady*, Moscow: GIMFL Publ., 1961, 937 p.
2. Zygmund A. *Trigonometric series,* 2nd ed. NY: Cambridge University Press, 1959, vol. I, 383 p. Translated to Russian under the title *Trigonometricheskie ryady*, Moscow: Mir Publ., 1965, vol. I, 616 p.
3. Krasnosel'skii M.A., Rutitskii Ya.B. *Convex functions and Orlicz spaces.* Groningen: Noordhoff, 1961, 249 p. Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Rutitskii Ya.B. *Vypuklye funktsii i prostranstva Orlicha*, Moscow: GIMFL Publ., 1958, 272 p.
4. Rao M.M., Ren Z.D. *Theory of Orlicz spaces.* NY: M. Dekker, 1991, 445 p. ISBN: 0585313679 .
5. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*, vol. 1, 2. Mineola; NY: Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow: Nauka Publ., 1976, 544 p.

Received July 28, 2021
Revised October 25, 2021
Accepted October 27, 2021

Nikolay Yur'evich Antonov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru .

Alexander Nikolaevich Lukoyanov, graduate student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: LiableFish@yandex.ru .

Cite this article as: N. Yu. Antonov, A. N. Lukoyanov. Order estimates for Lebesgue constants of Fourier sums in Orlicz spaces, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 35–47 .