ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 519.642.5

ТЕСТОВОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ[1]

С. В. Солодуша, Е. Ю. Гражданцева

В статье рассматриваются полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода, возникающие при описании нелинейной динамической системы типа “вход-выход” в виде конечного отрезка (полинома) интегро-степенного ряда Вольтерра. Выполнен краткий обзор результатов исследований таких уравнений для случая, когда вход $x(t)$ — скалярная функция времени. Важнейшая их особенность состоит в локальности (в смысле малости правого конца отрезка $[0,T]$) решения в $C_{[0,T]}$. Приводятся постановки задач, развитые или намеченные в публикациях А. С. Апарцина. Исследовательская часть работы посвящена рассмотрению ситуации с векторным входом $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$. Для изучения полиномиальных уравнений выделено тестовое уравнение Вольтерра I рода. Доказаны утверждения, определяющие вид ядер Вольтерра, который гарантирует выполнение оценок при переходе к специальным мажорантным интегральным уравнениям. Указан алгоритм решения эквивалентной задачи Коши. Получены неулучшаемые оценки решений частных классов нелинейных интегральных неравенств, выражаемые через функцию Ламберта.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, полиномиальные уравнения Вольтерра, задача Коши, функция Ламберта.

S. V. Solodusha, E. Yu. Grazhdantseva. Test polynomial Volterra equation of the first kind in the problem of input signal identification.

The paper discusses Volterra polynomial integral equations of the first kind that arise in describing a nonlinear dynamic system of the “input-output” type in the form of a finite segment (polynomial) of the Volterra integro-power series. A brief review of research results for such equations is given for the case when the input $x(t)$ is a scalar function of time. The most important feature of these equations is the locality (in the sense of the smallness of the right endpoint of the interval $[0,T]$) of the solution in $C_{[0,T]}$. We consider problem statements developed or outlined in the works of A. S. Apartsyn. The research part of the paper is devoted to the situation with a vector input $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$. In order to study polynomial equations, we consider a test Volterra equation of the first kind. Statements are proved that determine the form of Volterra kernels guaranteeing the validity of estimates in the passage to special majorant integral equations. An algorithm for solving an equivalent Cauchy problem is presented. Unimprovable estimates expressed in terms of the Lambert function are obtained for solutions of special classes of nonlinear integral inequalities.

Keywords: nonlinear dynamic system, polynomial Volterra equations, Cauchy problem, Lambert function.

MSC: 45D05

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-161-174

1. Введение

Широкие возможности применения интегральных уравнений Вольтерра в прикладных задачах послужили стимулом к формированию математической теории и численных методов, учитывающих специфические особенности этих уравнений (см. обзор [1]). Современное состояние исследований в этой области отражено в монографии [2] и ее библиографических ссылках. Данная статья посвящена нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра I рода, возникающим при описании динамики систем типа “вход-выход” в виде отрезка интегро-степенного ряда (полинома) Вольтерра [3]

$$y(t) = P_N(x(t)) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{1\le i_1 \le \ldots \le i_n \le p} V_{i_1\ldots i_n}(x(t)), \tag{1.1}$$

[1]Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема № АААА-А21-121012090034-3).

$$V_{i_1\dots i_n}(x(t)) = \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t K_{i_1\dots i_n}(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{l=1}^n x_{i_l}(s_l) ds_l, \quad t \in [0, T], \tag{1.2}$$

где входной $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T$ и выходной $y(t)$ сигналы есть функции времени t, ядра Вольтерра $K_{i_1\dots i_n}$ являются симметричными функциями относительно $s_1, \dots, s_n$, соответствующими совпадающим индексам $i_1, \dots, i_n$ (по терминологии [4] — инвариантными относительно замены s_j на s_k при $i_j = i_k$). Этот аппарат хорошо известен в области математического моделирования нелинейных динамических систем [5].

К настоящему времени разработано достаточно много подходов к построению интегральных моделей на основе (1.1), (1.2). Однако, как отмечено в [6], применение теории рядов Вольтерра на практике пока ограничено. Анализ научно-технической литературы показал, что данной ситуации способствуют вводимые исследователями упрощения для идентификации ядер Вольтерра (1.2). В частности, вместо задачи определения функций $K_{i_1\dots i_n}$ многих переменных решается задача восстановления функций $\widetilde{K}_{i_1\dots i_n}$ одной переменной (см., например, [7, формула (5)]). Различие этих задач подробно поясняется в диссертации [8, с. 178–179] на примере подходов, изложенных в [9; 10]. Другая ситуация возникает при искусственной линеаризации свойств моделируемой динамической системы, что может привести к потере симметричности ядер Вольтерра [11] в случае скалярного входного сигнала и как следствие к нарушению их физической интерпретации. Кроме того, полученные в [12] результаты показали, что из принадлежности искомых ядер к определенным классам функций следуют естественные ограничения на параметры входных сигналов, используемых для восстановления $K_{i_1\dots i_n}$. Подчеркнем, что этот факт не является следствием реализации алгоритма моделирования, а отражает существо дела. Таким образом, очевидна актуальность развития теории интегральных уравнений Вольтерра I рода, возникающих при применении (1.1) с целью моделирования нелинейной динамики.

Цель данной статьи — в предположении, что идентификация ядер Вольтерра из (1.2) при фиксированном в (1.1) $N \geq 2$ выполнена (например, с помощью методики [13, с. 160–181]), рассмотреть задачу поиска входного сигнала $x(t)$, который соответствует известному отклику $y(t)$. Такая постановка возникает в связи с построением нелинейной системы автоматического управления техническими объектами [14, с. 242]. При заданных $y(t)$, $K_{i_1\dots i_n}$ (1.1) есть N-степенное (полиномиальное) уравнение Вольтерра I рода относительно $x(t)$. Как отмечается в [15, с. 24], в научной литературе, посвященной подобным уравнениям, исследователи не придерживаются единой терминологии (см. например, [16–18]). Заметим, что N-й член полинома $P_N(x(t))$ есть N-степенной интегральный оператор [4, с. 250], поэтому будем называть рассматриваемое уравнение *полиномиальным*, следуя [15]. Чтобы представить специфику таких уравнений, напомним известные факты относительно (1.1), (1.2) в случае, когда в (1.1) $p = 1$, $N = 2$, 3.

2. Элементы теории полиномиального уравнения (1.1) при $p = 1$

Теория и численные методы решения (1.1) для $N = 1$ и $N > 1$ имеют существенные отличия. В [19] показано, что (1.1) при $N > 1$ имеет решение в классе обобщенных функций. Дальнейшему изучению этого вопроса посвящена публикация [20]. В настоящей статье сосредоточимся на изучении непрерывного решения (1.1). Подробное исследование для $p = 1$ проведено в серии работ [15; 16; 19; 21–27].

Пусть в уравнении

$$\sum_{n=1}^N V_{\underbrace{1\dots1}_n} x^n = y(t), \tag{2.1}$$

$$V_{1\dots 1}x^n = \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t K_{\underbrace{1\dots 1}_{n}}(t,s_1,\dots,s_n)\prod_{l=1}^{n} x(s_l)ds_l, \quad t\in[0,T], \tag{2.2}$$

справедливо

$$(K_1(t,s))'_t \in C_\Delta, \quad \Delta=\{t,s\colon 0\le s\le t\le T\}, \quad K_1(t,t)\ne 0, \quad y'(t)\in C_{[0,T]}, \quad y(0)=0. \tag{2.3}$$

Дополнительно к (2.3) предположим, что функции $K_{\underbrace{1\dots 1}_{n}}(t,s_1,\dots,s_n)$ для $n>1$ непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по t [26, с. 96].

Для случая $N>1$ малость отрезка $[0,\bar t]$ в силу $\left|\sum_{n=2}^{N} V_{1\dots 1}x^n\right| = \mathcal{O}(\bar t^2)$ обеспечивает линеаризацию (2.1) с известными в (2.2) ядрами Вольтерра [27, с. 71]

$$\int\limits_0^t K_1(t,s)x(s)ds = \tilde y(t), \quad t\in[0,\bar t], \tag{2.4}$$

где правая часть $\tilde y(t)$ такая, что $||y(t)-\tilde y(t)||_{\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,\bar t]}} = \mathcal{O}(\bar t)$ (здесь через $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,\bar t]}$ обозначено пространство функций, удовлетворяющих условиям (2.3) на $y(t)$). Задача (2.1), (2.2) корректно поставлена по Адамару на паре $\big(C_{[0,\bar t]}, \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,\bar t]}\big)$. Соответствующая теорема и ее доказательство приведены в [26, теорема 2]. Величина $\bar t$ гарантирует существование (единственного) непрерывного вещественного решения (2.1), (2.2) (см. там же, условие 1 теоремы 2). Таким образом, при изучении устойчивости непрерывного решения (2.1) принципиально важно оценить $\bar t < T_{\max}$, где $T_{\max}$ не может быть заменено на бо́льшее число.

В [16] впервые изложен способ получения оценок решений некоторых специальных нелинейных интегральных неравенств, играющих для (2.1) при $N>1$ ту же роль, что и неравенство Гронуолла — Беллмана для линейного уравнения Вольтерра I рода. Поскольку (2.1) имеет точное решение лишь в частных случаях, в работах [15; 16; 19; 24–27] рассмотрены наиболее распространенные на практике $N=2$, 3. В частности, при $N=2$ из (2.1) следует

$$\int\limits_0^t K_1(t,s_1)x(s_1)ds_1 + \int\limits_0^t\int\limits_0^t K_{11}(t,s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \quad t\in[0,\bar t]. \tag{2.5}$$

Переходя от (2.5) дифференцированием по t к эквивалентному уравнению Вольтерра II рода [15, формула (2.3)] (с учетом $K_{11}(t,t,s)=K_{11}(t,s,t)$ в силу симметрии по второму и третьему аргументу) и выполняя оценку по модулю, приходим к неравенству

$$|x(t)| \le Fk^{-1} + L_1k^{-1}\int\limits_0^t |x(s)|ds + 2M_{11}k^{-1}|x(t)|\int\limits_0^t |x(s)|ds + L_{11}k^{-1}\Bigg(\int\limits_0^t |x(s)|ds\Bigg)^2, \tag{2.6}$$

$t\in[0,T],\ T<\bar t$, где приняты следующие обозначения:

$$\begin{gathered} F=\max_{t\in[0,T]}|y'(t)|,\ M_{11}=\max_{0\le s\le t\le T}|K_{11}(t,t,s)|>0,\ k=\min_{t\in[0,T]}|K_1(t,t)|>0,\\ L_1=\max_{0\le s\le t\le T}|(K_1(t,s))'_t|\ge 0,\ L_{11}=\max_{0\le s_1,\,s_2\le t\le T}|(K_{11}(t,s_1,s_2))'_t|\ge 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

В предположении $k=1$, которое не уменьшает общности, (2.6) дает (см. [16, формула (7)])

$$|x(t)| \le F + L_1\int\limits_0^t |x(s)|ds + 2M_{11}|x(t)|\int\limits_0^t |x(s)|ds + L_{11}\Bigg(\int\limits_0^t |x(s)|ds\Bigg)^2, \quad t\in[0,T]. \tag{2.8}$$

Неулучшаемые оценки типа

$$|x(t)| \le |\psi^*(t)|, \quad t \in [0,T], \tag{2.9}$$

(в смысле справедливости (2.9) как точного равенства, когда в (2.8) проведена замена знака $\le$ на знак $=$) для $L_{11} = 0$, $L_{11} \ne 0$ впервые получены в статье [16, определение 1]. В (2.9) $\psi^*(t)$ есть непрерывное решение

$$\psi(t) = F + L_1 \int_0^t \psi(s)ds + 2M_{11}\psi(t) \int_0^t \psi(s)ds + L_{11}\Big(\int_0^t \psi(s)ds \Big)^2, \quad t \in [0,T]. \tag{2.10}$$

Показано, что решение мажорантной задачи (2.10) выражается в явном виде через главную ветвь функции Ламберта $W(x)$, определенную при всех вещественных $x \ge -e^{-1}$. Данная функция эффективно применяется для решения различных нелинейных дифференциальных уравнений (см. например, [28]). Алгоритмам решения сеточных аналогов (2.1) при $N = 2$, 3 с помощью квадратурных методов и исследованию их сходимости посвящены работы [21–23].

3. Тестовое уравнение вида (1.1) при $N = p = 2$

Пусть в (1.1) $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, $N = 2$. Для простоты выберем $K_{22} = 0$ (это выполняется, в частности, для некоторых моделей теплофизических процессов) [29], так что

$$\int_0^t K_1(t,s_1)x_1(s_1)ds_1 + \int_0^t\int_0^t K_{11}(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_1(s_2)ds_1ds_2$$
$$+ \int_0^t K_2(t,s_1)x_2(s_1)ds_1 + \int_0^t\int_0^t K_{12}(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_2(s_2)ds_1ds_2 = y(t). \tag{3.1}$$

Рассмотрим задачу поиска входного сигнала $x_1(t)$ при заданных $x_2(t)$, $y(t)$, K_i, K_{ji}, где $i, j = 1$, 2, $j \le i$. Тогда вместо (2.8) имеем

$$|x_1(t)| \le \widetilde{F} + \widetilde{K}_1 \int_0^t |x_1(s)|ds + 2M_{11}|x_1(t)| \int_0^t |x_1(s)|ds + L_{11}\Big(\int_0^t |x_1(s)|ds \Big)^2 + M_{12}\lambda T|x_1(t)|, \tag{3.2}$$

где дополнительно к (2.7) введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\lambda = \max_{t\in[0,T]} |x_2(t)| > 0, \quad M_{12} = \max_{0\le s\le t\le T} \{|K_{12}(t,t,s)|,\, |K_{12}(t,s,t)|\} > 0,\\ L_2 = \max_{0\le s\le t\le T} |(K_2(t,s))'_t| \ge 0, \quad L_{12} = \max_{0\le s_1,\, s_2\le t\le T} |(K_{12}(t,s_1,s_2))'_t| \ge 0,\\ \widetilde{F} = F + k_2\lambda + L_2\lambda T, \quad \widetilde{K}_1 = L_1 + L_{12}\lambda T + \lambda M_{12}, \quad k_2 = \max_{t\in[0,T]} |K_2(t,t)| > 0.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Пониманию специфики полиномиального уравнения (3.1) способствует исследование простейших тестовых уравнений.

Введем полиномиальное уравнение второй степени, в котором ядра Вольтерра K_{11}, K_{12} удовлетворяют оценкам вида (2.7), (3.3). Следуя [16, с. 124], ограничимся случаем

$$K_{11}(t,s_1,s_2) = \phi_1(t,s_1)\phi_1(t,s_2), \quad K_{12}(t,s_1,s_2) = \phi_1(t,s_1)\phi_2(t,s_2),$$

где функции $\phi_i(t,s)$, $0 \le s \le t \le T$, $i = 1, 2$, соответствуют виду ядер Вольтерра из интегрального уравнения, мажорантного (по терминологии [24, определение 1]) для (2.4).

Утверждение 1. *Пусть* $M_{11} > 0$, $L_{11} \geq 0$, *тогда для того, чтобы ядро Вольтерра* $K_{11}(t, s_1, s_2)$ *имело вид*

$$K_{11}(t, s_1, s_2) = \left(\sqrt{M_{11}} - \frac{L_{11}}{2\sqrt{M_{11}}}(t - s_1)\right)\left(\sqrt{M_{11}} - \frac{L_{11}}{2\sqrt{M_{11}}}(t - s_2)\right) \tag{3.4}$$

при $0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T$, $T < \dfrac{2M_{11}}{L_{11}}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$M_{11} = \max_{0 \leq s \leq t \leq T} |K_{11}(t, t, s)|, \tag{3.5}$$

$$L_{11} = \max_{0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T} |(K_{11}(t, s_1, s_2))'_t|. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Пусть

$$K_{11}(t, s_1, s_2) = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{L}_1(t - s_1))\,(\mathbf{k}_1 - \mathbf{L}_1(t - s_2))\,, \quad \mathbf{k}_1 > 0, \quad \mathbf{L}_1 \geq 0. \tag{3.7}$$

Тогда

$$K_{11}(t, s_1, s_2)\Big|_{s_1 = t,\, s_2 = s} = K_{11}(t, t, s) = \mathbf{k}_1(\mathbf{k}_1 - \mathbf{L}_1(t - s)).$$

В силу (3.5), (3.7) имеем

$$M_{11} = \max_{0 \leq s \leq t \leq T} |\mathbf{k}_1(\mathbf{k}_1 - \mathbf{L}_1(t - s))| = \mathbf{k}_1 \cdot \max_{0 \leq s \leq t \leq T} |\mathbf{k}_1 - \mathbf{L}_1(t - s)|\,,$$

откуда при $t - s = 0$, $T < \dfrac{\mathbf{k}_1}{\mathbf{L}_1}$ справедливо $M_{11} = \mathbf{k}_1^2$, так что

$$\mathbf{k}_1 = \sqrt{M_{11}} \tag{3.8}$$

(поскольку $\mathbf{k}_1 > 0$). Дифференцируя, наконец, (3.7) по t, получаем

$$(K_{11}(t, s_1, s_2))'_t = \mathbf{L}_1(\mathbf{L}_1(2t - s_1 - s_2) - 2\mathbf{k}_1).$$

Ввиду (3.6) с учетом $\mathbf{L}_1 \geq 0$ имеем

$$L_{11} = \max_{0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T} |\mathbf{L}_1(\mathbf{L}_1(2t - s_1 - s_2) - 2\mathbf{k}_1)| = \mathbf{L}_1 \cdot \max_{0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T} |\mathbf{L}_1(2t - s_1 - s_2) - 2\mathbf{k}_1|,$$

следовательно, при $T < \dfrac{\mathbf{k}_1}{\mathbf{L}_1}$ подстановка $2t - s_1 - s_2 = 0$ приводит к равенству $L_{11} = 2\mathbf{k}_1\mathbf{L}_1$, откуда

$$\mathbf{L}_1 = \frac{L_{11}}{2\mathbf{k}_1} = \frac{L_{11}}{2\sqrt{M_{11}}}$$

(в конце цепочки мы учли (3.8)). Следовательно, $\dfrac{\mathbf{k}_1}{\mathbf{L}_1} = \dfrac{2M_{11}}{L_{11}}$. Таким образом, при $T < \dfrac{2M_{11}}{L_{11}}$ функция $K_{11}(t, s_1, s_2)$ имеет вид (3.4).

Необходимость. Пусть справедливо (3.4). Тогда выполнение (3.5) очевидно. Кроме того, поскольку

$$\max_{0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T < \frac{2M_{11}}{L_{11}}} \left|\frac{L_{11}}{2\sqrt{M_{11}}}(2t - s_1 - s_2) - 2\sqrt{M_{11}}\right| = 2\sqrt{M_{11}},$$

то и (3.6) выполняется. □

Утверждение 2. *Пусть* $M_{11} > 0$, $L_{11} \geq 0$, $M_{12} > 0$, $L_{12} \geq 0$, *тогда для того чтобы ядро Вольтерра* $K_{12}(t, s_1, s_2)$ *имело вид*

$$K_{12}(t, s_1, s_2) = \Big(\sqrt{M_{11}} - \frac{L_{11}}{2\sqrt{M_{11}}}(t - s_1)\Big)\Big(\frac{M_{12}}{\sqrt{M_{11}}} - \Big(\frac{L_{12}}{\sqrt{M_{11}}} - \frac{L_{11}M_{12}}{2M_{11}\sqrt{M_{11}}}\Big)(t - s_2)\Big) \qquad (3.9)$$

при $0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T$, $T < T^* = \min\Big\{\dfrac{2M_{11}}{L_{11}},\ \dfrac{2M_{11}M_{12}}{2M_{11}L_{12} - L_{11}M_{12}}\Big\}$, *где* $2M_{11}L_{12} - L_{11}M_{12} \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$M_{12} = \max_{0 \leq s \leq t \leq T}\{|K_{12}(t, t, s)|,\, |K_{12}(t, s, t)|\}, \qquad (3.10)$$

$$L_{12} = \max_{0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T} |(K_{12}(t, s_1, s_2))'_t|. \qquad (3.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Пусть

$$K_{12}(t, s_1, s_2) = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{L}_1(t - s_1))\,(\mathbf{k}_2 - \mathbf{L}_2(t - s_2))\,, \qquad (3.12)$$

где $\mathbf{k}_1 = \sqrt{M_{11}}$, $\mathbf{L}_1 = \dfrac{L_{11}}{2\sqrt{M_{11}}} \geq 0$, $\mathbf{k}_2 > 0$, $\mathbf{L}_2 \geq 0$, $M_{11} > 0$. Тогда

$$K_{12}(t, s_1, s_2)\big|_{s_2 = t} = \mathbf{k}_2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{L}_1(t - s_1)),\ K_{12}(t, s_1, s_2)\big|_{s_1 = t} = \mathbf{k}_1(\mathbf{k}_2 - \mathbf{L}_2(t - s_2)),$$

так что при $T < \dfrac{\mathbf{k}_1}{\mathbf{L}_1}$:

$$\max_{0 \leq s_1 \leq t \leq T} |K_{12}(t, s_1, t)| = \mathbf{k}_2 \cdot \max_{0 \leq s_1 \leq t \leq T} |\mathbf{k}_1 - \mathbf{L}_1(t - s_1)| = \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,$$

при $T < \dfrac{\mathbf{k}_2}{\mathbf{L}_2}$:

$$\max_{0 \leq s_2 \leq t \leq T} |K_{12}(t, t, s_2)| = \mathbf{k}_1 \cdot \max_{0 \leq s_2 \leq t \leq T} |\mathbf{k}_2 - \mathbf{L}_2(t - s_2)| = \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2.$$

Окончательно приходим к равенству $M_{12} = \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2$ при $T < T^*$, $T^* = \min\Big\{\dfrac{\mathbf{k}_1}{\mathbf{L}_1}, \dfrac{\mathbf{k}_2}{\mathbf{L}_2}\Big\}$, откуда $\mathbf{k}_2 = \dfrac{M_{12}}{\sqrt{M_{11}}}$. Непосредственно из (3.12) имеем

$$\max_{0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T} |(K_{12}(t, s_1, s_2))'_t| = \max_{0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T} |\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2(2t - s_1 - s_2) - \mathbf{L}_1\mathbf{k}_2 - \mathbf{L}_2\mathbf{k}_1|,$$

и при $T < \dfrac{\mathbf{k}_1}{\mathbf{L}_1} + \dfrac{\mathbf{k}_2}{\mathbf{L}_2}$ подстановка $2t - s_1 - s_2 = 0$ дает $L_{12} = \mathbf{L}_1\mathbf{k}_2 + \mathbf{L}_2\mathbf{k}_1$ (в конце цепочки мы учли (3.11)). Следовательно,

$$\mathbf{L}_2 = \frac{L_{12}}{\sqrt{M_{11}}} - \frac{L_{11}M_{12}}{2M_{11}\sqrt{M_{11}}}.$$

Таким образом, при $T < T^*$ получим (3.9).

Необходимость. Пусть $K_{12}(t, s_1, s_2)$ имеет вид (3.9) для $T < T^*$. Справедливость (3.10) легко проверить с помощью подстановки $s_i = t$, $i = 1, 2$. Кроме того, поскольку

$$\max_{0 \leq s_1,\, s_2 \leq t \leq T < T^*} \Big|\frac{L_{11}}{2\sqrt{M_{11}}}\Big(\frac{L_{12}}{\sqrt{M_{11}}} - \frac{L_{11}M_{12}}{2M_{11}\sqrt{M_{11}}}\Big)(2t - s_1 - s_2) - L_{12}\Big| = L_{12},$$

то и (3.11) выполняется. □

Таким образом, тестовое полиномиальное уравнение типа (1.1) при $N = p = 2$ имеет вид

$$\int\limits_0^t (1 - L_1(t - s_1))\, x_1(s_1) ds_1 + \int\limits_0^t \int\limits_0^t K_{11}(t, s_1, s_2) x_1(s_1) x_1(s_2) ds_1 ds_2$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^t K_{12}(t, s_1, s_2) x_1(s_1) x_2(s_2) ds_1 ds_2 = \tilde{f}(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.13}$$

$$\tilde{f}(t) = y(t) - \int\limits_0^t (k_2 - L_2(t - s_1))\, x_2(s_1) ds_1,$$

где $K_1(t, s)$ и $K_2(t, s)$ заданы (с учетом предположений (2.7), (3.3), $k = 1$) в виде функций ϕ_1 и ϕ_2 соответственно, а $K_{11}(t, s_1, s_2)$, $K_{12}(t, s_1, s_2)$ — по (3.4), (3.9). Дифференцируя (3.13) по t и переходя к оценке по модулю, получим (3.2). По аналогии с (2.10) назовем

$$\psi(t) = \widetilde{F} + \widetilde{K}_1 \int\limits_0^t \psi(s) ds + 2M_{11} \psi(t) \int\limits_0^t \psi(s) ds + L_{11} \Bigg(\int\limits_0^t \psi(s) ds \Bigg)^2 + M_{12} \lambda T \psi(t) \tag{3.14}$$

мажорантным для (3.13) *интегральным уравнением*, где $t \in [0, T]$.

4. Об оценке области существования решения (3.14)

Перейдем от (3.14) к эквивалентной задаче Коши

$$\theta'(t) = \frac{\widetilde{F} + \widetilde{K}_1 \theta(t) + L_{11} \theta^2(t)}{1 - 2M_{11} \theta(t) - M_{12} \lambda T}, \quad \theta(0) = 0, \quad T < \frac{1}{M_{12} \lambda}, \quad t \in [0, T], \tag{4.1}$$

с помощью замены $\theta(t) = \displaystyle\int_0^t \psi(s) ds$. Решение (4.1) $\theta(t)$ может быть выражено в терминах функции Ламберта. Обозначим далее через $W(z)$ главную вещественную ветвь функции Ламберта для всех $z \in \left[-e^{-1}, \infty\right)$ (такую, что $W(0) = 0$), а через $W(-1, z)$ — вторую вещественную ветвь функции Ламберта, где $z \in [-e^{-1}, 0]$.

4.1. Случай $L_1 = L_2 = L_{11} = L_{12} = 0$

Утверждение 3. *Задача Коши вида*

$$\theta'(t) = \frac{\widetilde{F} + \lambda M_{12} \theta(t)}{1 - 2M_{11} \theta(t) - M_{12} \lambda T}, \quad \theta(0) = 0, \tag{4.2}$$

$\widetilde{F} = F + k_2 \lambda$, $t \in [0, T]$, $T < \dfrac{1}{M_{12} \lambda}$, *имеет решение вида*

$$\theta(t) = -\frac{\lambda M_{12} (1 - M_{12} \lambda T) + 2M_{11} \widetilde{F}}{2\lambda M_{12} M_{11}} W(z(t)) - \frac{\widetilde{F}}{\lambda M_{12}}, \quad t \in [0, T], \quad T < \widehat{T}^*. \tag{4.3}$$

Здесь

$$z(t) = -\frac{2M_{11} \widetilde{F}}{\lambda M_{12} (1 - M_{12} \lambda T) + 2M_{11} \widetilde{F}} \exp(z_1(t)), \quad z_1(t) = \frac{\lambda^2 M_{12}^2 t - 2M_{11} \widetilde{F}}{\lambda M_{12} (1 - M_{12} \lambda T) + 2M_{11} \widetilde{F}},$$

$$\widehat{T}^{*}=\frac{\alpha}{\lambda^{2}M_{12}^{2}}\ln\Big(\frac{\alpha}{2M_{11}}\Big)-\frac{\alpha}{\lambda^{2}M_{12}^{2}}\Big(\ln\widetilde{F}+1\Big)+\frac{2M_{11}\widetilde{F}}{\lambda^{2}M_{12}^{2}},\tag{4.4}$$

$\alpha=\lambda M_{12}(1-M_{12}\lambda T)+2M_{11}\widetilde{F}$.

Доказательство. Интегрируя уравнение (4.2), предварительно представив его в эквивалентной записи как уравнение с разделенными переменными, приходим к трансцендентному уравнению

$$\theta\,(t)+a=c\,(t)\,e^{b\theta(t)},\tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned}a&=\frac{\widetilde{F}}{\lambda M_{12}},\quad b=\frac{2\lambda M_{12}M_{11}}{\lambda M_{12}\,(1-M_{12}\lambda T)+2M_{11}\widetilde{F}},\\ c(t)&=\frac{\widetilde{F}}{\lambda M_{12}}\,\exp\Big(\frac{\lambda^{2}M_{12}^{2}t}{\lambda M_{12}\,(1-M_{12}\lambda T)+2M_{11}\widetilde{F}}\Big).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Напомним, что уравнению вида $we^{w}=\zeta$ удовлетворяет функция $w=W(\zeta)$ [30]. По аналогии с [19, с. 14] домножим обе части (4.5) на $-b\exp(-b(\theta(t)+a))$ и далее, следуя определению функции Ламберта W, имеем $-b(\theta(t)+a)=W(-bc(t)\exp(-ba))$, откуда

$$\theta\,(t)=-\frac{1}{b}\,W\big(-bc\,(t)\,e^{-ba}\big)-a.$$

С учетом обозначений (4.6) решение задачи Коши (4.2) имеет вид (4.3), а условие $z\,(t)\geq -e^{-1}$ дает выражение (4.4) для $\widehat{T}^{*}$. □

Дифференцируя (4.3) по t с учетом $W'(\zeta)=W(\zeta)/\left((1+W(\zeta))\zeta\right)$, получим

$$\psi^{*}\,(t)=\theta'\,(t)=-\frac{\lambda M_{12}}{2M_{11}}\,\frac{W\,(z\,(t))}{1+W\,(z\,(t))}.\tag{4.7}$$

Если K_1, K_2, K_{11}, K_{12} не зависят от t, то $L_1=L_2=L_{11}=L_{12}=0$, и (3.1) в сделанных предположениях (2.7), (3.3), $k=1$ эквивалентно уравнению Вольтерра II рода $x_1(t)=\mathbf{V}(x_1(t))$,

$$\mathbf{V}(x_1(t))=-2x_1(t)\int\limits_0^t K_{11}(t,s)x_1(s)ds-k_2x_2(t)$$

$$-\,x_1(t)\int\limits_0^t K_{12}(t,s)x_2(s)ds-x_2(t)\int\limits_0^t K_{12}(s,t)x_1(s)ds+y'(t)$$

(у K_{11}, K_{12} оставлены второй и третий аргументы). Согласно [24, с. 8] с помощью принципа сжимающих отображений для установления области существования непрерывного решения приходим к оценке

$$T\,<\,\min\Big\{\frac{r}{2\lambda M_{12}\big(r+\widetilde{F}\big)+2M_{11}\big(r+\widetilde{F}\big)^{2}},\frac{1}{2\lambda M_{12}+4M_{11}\big(r+\widetilde{F}\big)}\Big\}.\tag{4.8}$$

Первое значение в правой части (4.8) связано с условием перевода в себя оператором $\mathbf{V}\,(x_1\,(t))$ шара S_r в $C_{[0,T]}$ $\big(\big|x_1(t)-\widetilde{F}\big|\leq r\big)$, а второе — с условием сжатия.

Проиллюстрируем, что $\widehat{T}^{*}$ по (4.4) дает точную верхнюю оценку $\bar{t}$ [27, с. 74].

Пример 1. Пусть в (3.14) $\lambda=\widetilde{F}=M_{11}=1/2\,M_{12}=1$, тогда, следуя (4.3), (4.4), (4.7) и учитывая равенство $W\,(-\,ce^{-c})=-c$, получаем

$$z\,(0)=-\,\frac{1}{2\,(1-T)}e^{-\frac{1}{2(1-T)}},\quad \theta\,(0)=-\,(1-T)\;W\,(z\,(0))-\frac{1}{2}=0,\quad \psi^{*}\,(0)=\frac{1}{1-2T}.$$

Таким образом, условие Коши в (4.2) и равенство $\psi^*(0) = \dfrac{\widetilde{F}}{1 - M_{12}\lambda T}$, вытекающее из (3.14), выполняются. Максимум правой части (4.8) равен $\dfrac{1}{8+4\sqrt{3}} \approx 0.0669$, а формула (4.4) дает

$$\widehat{T}^* = (1-T)\ln(2-2T) - \frac{1}{2} + T.$$

Легко убедиться, что $\theta\big(\widehat{T}^*\big) = \dfrac{1}{2} - T$ и $\psi^*\big(\widehat{T}^*\big) = \infty$, откуда и следует, что $\widehat{T}^*$ нельзя заменить на $T^{**} > \widehat{T}^*$.

4.2. Случай $L_1 \neq 0,\ L_{11} \neq 0,\ L_2 = 0,\ L_{12} = 0$

По аналогии с [24, с. 10] получим решение (3.14) с учетом знака дискриминанта квадратного трехчлена $\widetilde{F} + \widetilde{K}_1\theta(t) + L_{11}\theta^2(t)$ в (4.1). Пусть $\widetilde{K}_1^2 - 4L_{11}\widetilde{F} = 0$, так что

$$L_{11}\Big(\theta^2(t) + \frac{\widetilde{K}_1}{L_{11}}\theta(t) + \frac{\widetilde{F}}{L_{11}}\Big) = L_{11}\left(\theta(t) + \frac{\widetilde{K}_1}{2L_{11}}\right)^2.$$

Утверждение 4. *Задача Коши вида*

$$\theta'(t) = \frac{L_{11}\left(\theta(t) + \dfrac{\widetilde{K}_1}{2L_{11}}\right)^2}{1 - 2M_{11}\theta(t) - M_{12}\lambda T}, \quad \theta(0) = 0, \quad T < \frac{1}{M_{12}\lambda}, \quad t \in [0, T], \tag{4.9}$$

$$\widetilde{F} = F + k_2\lambda, \quad \widetilde{K}_1 = L_1 + \lambda M_{12}, \tag{4.10}$$

имеет решение вида

$$\theta(t) = -\frac{a}{W(-1, z_2(t))} - \frac{\widetilde{K}_1}{2L_{11}}, \quad t \in [0, T], \quad T < \widehat{T}^*. \tag{4.11}$$

Здесь

$$z_2(t) = -2aL_{11}e^{-\frac{L_{11}}{2M_{11}}(c-t)}, \tag{4.12}$$

$$a = \frac{L_{11} - L_{11}M_{12}\lambda T + \widetilde{K}_1 M_{11}}{2M_{11}L_{11}}, \quad c = \frac{2M_{11}}{L_{11}}\ln\big(\widetilde{K}_1\big) + \frac{2}{\widetilde{K}_1}\Big(1 - \frac{M_{11}\widetilde{K}_1}{L_{11}} - M_{12}\lambda T\Big), \tag{4.13}$$

$$\widehat{T}^* = c - \frac{2M_{11}}{L_{11}}(1 + \ln(2aL_{11})). \tag{4.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (4.9) является уравнением с разделенными переменными, так как его эквивалентная запись имеет вид

$$\frac{1 - 2M_{11}\theta(t) - M_{12}\lambda T}{L_{11}\Big(\theta(t) + \dfrac{\widetilde{K}_1}{2L_{11}}\Big)^2} d\theta(t) = dt. \tag{4.15}$$

После интегрирования (4.15), учитывая $\theta(0) = 0$ и (4.13), получаем трансцендентное уравнение

$$\ln\left(1/\Big(\theta(t) + \frac{\widetilde{K}_1}{2L_{11}}\Big)\right) = \ln(2L_{11}) - \frac{L_{11}}{2M_{11}}(c-t) + \left(1/\Big(\theta(t) + \frac{\widetilde{K}_1}{2L_{11}}\Big)\right)a. \tag{4.16}$$

Введем обозначение

$$\xi(t) = \left(1/\Big(\theta(t) + \frac{\widetilde{K}_1}{2L_{11}}\Big)\right), \tag{4.17}$$

тогда (4.16) дает

$$\xi\,(t) = \exp\Big(a\xi\,(t) + \ln\,(2L_{11}) - \frac{L_{11}}{2M_{11}}\,(c-t)\Big).$$

Умножая обе части уравнения на $-ae^{-a\xi(t)}$, получаем

$$-a\xi\,(t)\,e^{-a\xi(t)} = -2aL_{11}e^{-\frac{L_{11}}{2M_{11}}(c-t)}$$

и, наконец,

$$\xi\,(t) = -\frac{1}{a}W\Big(-1, -2aL_{11}e^{-\frac{L_{11}}{2M_{11}}(c-t)}\Big). \tag{4.18}$$

Так как $\xi\,(0) = \dfrac{2L_{11}}{\widetilde{K}_1} \neq 0$, то в (4.18) использовалась вторая вещественная ветвь функции Ламберта, где $z_2(t) \in \Big[-\dfrac{1}{e}, 0\Big]$. Возвращаясь к исходной переменной, из (4.17), (4.18) имеем (4.11). Приравнивая аргумент (4.12) функции Ламберта в (4.18) к $-\dfrac{1}{e}$, получаем (4.14). Формулы (4.10), (4.11), (4.13), (4.14) определяют решение задачи Коши (4.9), (4.10). □

Дифференцируя (4.11) и учитывая обозначение (4.12), находим решение исходного уравнения (3.14)

$$\psi^*\,(t) = \frac{aL_{11}}{2M_{11}}\,\frac{1}{W\,(-1, z_2\,(t))\,(1 + W\,(-1, z_2\,(t)))}. \tag{4.19}$$

Принцип сжимающих отображений дает оценку следующего вида:

$$T \;<\; \min\Big\{\frac{1}{2}\frac{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + 4\alpha_1 r}}{\alpha_1}, \frac{1}{2}\frac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 4\alpha_2}}{\alpha_2}\Big\}, \tag{4.20}$$

где

$$\alpha_1 = L_{11}\big(\widetilde{F} + r\big)^2, \quad \alpha_2 = 2L_{11}\big(\widetilde{F} + r\big),$$

$$\beta_1 = \widetilde{K}_1\big(\widetilde{F} + r\big) + 2M_{11}\big(\widetilde{F} + r\big)^2 + \; M_{12}\lambda\big(\widetilde{F} + r\big), \quad \beta_2 = \widetilde{K}_1 + 4M_{11}\big(\widetilde{F} + r\big) + M_{12}\lambda.$$

Проиллюстрируем, что (4.14) нельзя заменить на бо́льшее число.

П р и м е р 2. Если $\lambda = \dfrac{1}{2}\widetilde{F} = M_{11} = M_{12} = L_1 = 2L_{11} = 1$, то максимум правой части (4.20) достигается при $r = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{98} + \dfrac{5}{21}\sqrt[3]{98^2} + \dfrac{2}{3} \approx 11.8749$ и равен ≈ 0.0023. В то же время формулы (4.14), (4.10) дают

$$a = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}T, \quad c = 4\ln 2 - 3 - T, \quad \widetilde{T}^* = 4\ln 2 + 4\ln\Big(\frac{2}{T-5}\Big) - 7 - T.$$

Легко убедиться, что

$$\theta\big(\widehat{T}^*\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}T, \quad \psi^*\big(\widehat{T}^*\big) = \infty.$$

Таким образом, оценка (2.9) решений неравенства (3.2) для $\widetilde{K}_1^2 - 4L_{11}\widetilde{F} = 0$ определяется формулами (4.10), (4.12)–(4.14), (4.19).

Заключение

В статье рассмотрено тестовое уравнение вида (3.13), на примере которого исследована специфика полиномиального интегрального уравнения (1.1). С использованием функции Ламберта получены неулучшаемые оценки решений специальных интегральных неравенств. Выделенное тестовое уравнение планируется использовать в дальнейшем при рассмотрении систем полиномиальных уравнений Вольтерра I рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цалюк З.Б.** Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1977. Т. 15. С. 131–198.
2. **Brunner H.** Volterra integral equations: an introduction to theory and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 387 p. ISBN: 9781316162491 , doi: 10.1017/9781316162491 .
3. **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.
4. **Boyd S., Chua L.O., Desoer C.A.** Analytical foundations of Volterra series // IMA J. Math. Control Inform. 1984. Vol. 1, no. 3. P. 243–282. doi: 10.1093/imamci/1.3.243 .
5. **Schetzen M.** Nonlinear system modelling and analysis from the Volterra and Wiener perspective // Block-Oriented Nonlinear System Identification / eds. F. Giri, E-W. Bai. London: Springer, 2010. P. 13–26. (Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol 404). doi: 10.1007/978-1-84996-513-2_2 .
6. **Cheng C.M., Peng Z.K., Zhang W.M., Meng G.** Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. Vol. 87. P. 340–364. doi: 10.1016/j.ymssp.2016.10.029 .
7. **Liu Q., Xie M., Lim M.-K.** Volterra series models for nonlinear system control // Proc. 32nd ISR (ISR 2001) — International Symposium on Robotics. 2001. P. 1386–1391.
8. **Апарцин А.С.** Неклассические уравнения Вольтерра I рода в интегральных моделях динамических систем: теория, численные методы, приложения: дис. . . . д-р физ.-мат. наук / Иркут. гос. ун-т. Иркутск, 2000. 319 с.
9. **Веников В.А., Суханов О.А., Гусейнов А.Ф.** Функциональное представление подсистем в кибернетическом моделировании // Кибернетика электроэнергетических систем: труды семинара. Вып. 2. Брянск, 1974. С. 39–46.
10. **Галин Н.М., Зябиров Ф.И.** Метод решения нелинейных задач теплообмена с применением функциональных рядов Вольтерра // Гидродинамика и теплообмен в однофазных и двухфазных потоках: сб. статей. М.: Изд-во МЭИ, 1987. С. 34–48.
11. **Bhatt D., Sharma S.N.** Volterra model-based control for nonlinear systems via Carleman linearization. Preprint. 2021. 23 p. Available on: arXiv:2101.00495 [math.OC] .
12. **Апарцин А.С., Солодуша С.В.** Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 116–124.
13. **Апарцин А.С.** Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с. ISBN: 5-02-031548-6 .
14. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования / ред. В.В. Солодовникова. Ч. II. М.: Машиностроение, 1969. 368 с.
15. **Апарцин А.С.** Об эквивалентных нормах в теории полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3, № 1. С. 19–29.
16. **Апарцин А.С.** О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 118–125.
17. **Belbas S.A., Bulka Yu.** Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations // Appl. Math. Comp. 2011. Vol. 217, no. 9. P. 4791–4804. doi: 10.1016/j.amc.2010.11.034 .
18. **Burt P.M.S., Goulart J.H. de M.** Efficient computation of bilinear approximations and Volterra models of nonlinear systems // IEEE Trans. Signal Process. 2018. Vol. 66, no. 3. P. 804–816.
19. **Апарцин А.С.** К теории полилинейных уравнений Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. 2005. № 1. С. 5–27.
20. **Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.** Об обобщенных решениях интегральных уравнений в задаче идентификации нелинейных динамических моделей // Автоматика и телемеханика. 2009. № 4. С. 41–47.
21. **Apartsyn A.S., Markova E.V.** On numerical solution of the multilinear Volterra equations of the first kind // Proc. Internat. Conf. Comp. Math. (ICCM-2002). Novosibirsk, 2002. Part 2. P. 322–326.
22. **Апарцин А.С.** Об одном классе нелинейных уравнений Вольтерра II рода и их сеточных аналогах // Тр. Междунар. конф. по вычислит. математике (МКВМ-2004). Ч. I. Новосибирск: Прайс-курьер, 2004. С. 385–389.

23. **Апарцин А.С.** О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 8. С. 1378–1386. doi: 10.1109/TSP.2017.2777391 .
24. **Апарцин А.С.** Полилинейные уравнения Вольтерра I рода и некоторые задачи управления // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 3–16.
25. **Апарцин А.С., Спиряев В.А.** О неулучшаемых ламберт-оценках решений одного класса нелинейных интегральных неравенств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, №. 2. С. 3–12.
26. **Апарцин А.С.** К исследованию устойчивости решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 95–102.
27. **Апарцин А.С.** Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 69–81.
28. **Косов А.А., Семенов Э.И.** Функция Ламберта и точные решения нелинейных параболических уравнений // Изв. вузов. Математика. 2019. № 8. С. 13–20. doi: 10.26907/0021-3446-2019-8-13-20 .
29. **Солодуша С.В.** Методы построения интегральных моделей динамических систем: алгоритмы и приложения в энергетике: дисс. . . . д-ра техн. наук / Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН. Иркутск, 2019. 353 с.
30. **Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E.** On the Lambert W function // Advances Comp. Math. 1996. Vol. 5, no. 1. P. 329–359. doi: 10.1007/BF02124750 .

Поступила 31.03.2021
После доработки 25.05.2021
Принята к публикации 7.06.2021

Солодуша Светлана Витальевна
д-р техн. наук, доцент
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН;
Иркутский государственный университет,
Институт математики и информационных технологий
г. Иркутск
e-mail: solodusha@isem.irk.ru

Гражданцева Елена Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Иркутский государственный университет,
Институт математики и информационных технологий;
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН
г. Иркутск
e-mail: grelyur@mail.ru

REFERENCES

1. Tsalyuk Z.B. Volterra integral equations. *J. Math. Sci.*, 1979, vol. 12, no. 6, pp. 715–758. doi: 10.1007/BF01844490 .
2. Brunner H. *Volterra integral equations: an introduction to theory and applications.* Cambridge: Cambridge University Press, 2017, 387 p. doi: 10.1017/9781316162491 .
3. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations.* NY: Dover, 1959, 226 p. ISBN: 0486442845 . Translated to Russian under the title *Teoriya funktsionalov, integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Nauka Publ., 1982, 302 p.
4. Boyd S., Chua L.O., Desoer C.A. Analytical foundations of Volterra series. *IMA J. Math. Control Inform.*, 1984, vol. 1, no. 3, pp. 243–282. doi: 10.1093/imamci/1.3.243 .
5. Schetzen M. Nonlinear system modelling and analysis from the Volterra and Wiener perspective. In: F. Giri , E-W. Bai (eds.), *Block-oriented Nonlinear System Identification*, Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 404, pp. 13–24. doi: 10.1007/978-1-84996-513-2_2 .
6. Cheng C.M., Peng Z.K., Zhang W.M., Meng G. Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, vol. 87, pp. 340–364. doi: 10.1016/j.ymssp.2016.10.029 .

7. Liu Q., Xie M., Lim M.-K. Volterra series models for nonlinear system control. In: *Proc. of the 32nd ISR (International Symposium on Robotics)*, 2001, pp. 1386–1391.
8. Apartsyn A.S. Nonclassical Volterra equations of the first kind in integral models of dynamical systems: theory, numerical methods, applications. Dissertation, Dr. Phys.–Math. Sci., Irkutsk, 2000, 319 p. (in Russian).
9. Venikov V.A., Sukhanov O.A., Guseynov A.F. Functional representation of subsystems in cybernetic modeling. In: *Kibernetika Elektroenergeticheskikh Sistem*(trudy seminara), Bryansk, 1974, pp. 39–46 (in Russian).
10. Galin N.M., Zyabirov F.I. Method for solving nonlinear heat transfer problems using Volterra functional series. In: *Gidrodinamika i Teploobmen v Odnofaznykh i Dvukhfaznykh Potokakh* (sbornik statei), Moscow: Moscow Energy Institute Publ., 1987, pp. 34–48 (in Russian).
11. Bhatt D., Sharma S.N. Volterra model-based control for nonlinear systems via Carleman linearization. 2021. 23 p. Available on: arXiv:2101.00495 [math.OC] .
12. Apartsyn A.S., Solodusha S.V. Test signal amplitude optimization for identification of the Volterra kernels. *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 3, pp. 464–471. doi: 10.1023/B:AURC.0000019379.43119.d0 .
13. Apartsyn A.S. *Nonclassical linear Volterra equations of the first kind.* Utrecht, Boston: VSP, 2003, 168 p. doi: 10.1515/9783110944976 . Original Russian text published in Apartsyn A.S. *Neklassicheskie uravneniya Vol'terra I roda: Teoriya i chislennye metody.* Novosibirsk: Nauka Publ., 1999, 193 p. ISBN: 5-02-031548-6 .
14. *Technical cybernetics. Automatic control theory. Theory of non-stationary, nonlinear and self-adjusting automatic control systems.* Solodovnikov V.V. (ed.), Moscow: Mashinostroenie Publ., 1969, part II, 368 p. (in Russian).
15. Apartsyn A.S. On equivalent norms in the theory of Volterra polynomial equations of the first kind. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 19–29 (in Russian).
16. Apartsyn A.S. Multilinear Volterra equations of the first kind. *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 2, pp. 263–269. doi: 10.1023/B:AURC.0000014723.06564.f4 .
17. Belbas S.A., Bulka Yu. Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations. *Appl. Math. Comp.*, 2011, vol. 217, no. 9, pp. 4791–4804. doi: 10.1016/j.amc.2010.11.034 .
18. Burt P.M.S., Goulart J.H. de M. Efficient computation of bilinear approximations and Volterra models of nonlinear systems. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2018, vol. 66, no. 3, pp. 804–816. doi: 10.1109/TSP.2017.2777391 .
19. Apartsin A.S. On the theory of multilinear Volterra equations of the first kind. *Optimizatsiya, Upravlenie, Intellekt*, 2005, no. 1, pp. 5–27 (in Russian).
20. Sidorov N.A., Sidorov D.N. Generalized solutions to integral equations in the problem of identification of nonlinear dynamic models. *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 4, pp. 598–604. doi: 10.1134/S0005117909040067 .
21. Apartsyn A.S., Markova E.V. On numerical solution of the multilinear Volterra equations of the first kind. In: *Proc. Internat. Conf. on Computational Mathematics* (*ICCM-2002*). Part 2. Novosibirsk, 2002, pp. 322–326.
22. Apartsyn A.S. On a class of nonlinear Volterra equations of the second kind and their grid analogs. In: *Proc. Internat. Conf. on Computational Mathematics* (*ICCM-2004*). Part I. Novosibirsk, 2004, pp. 385–389 (in Russian).
23. Apartsyn A.S. On the convergence of numerical methods for solving a Volterra bilinear equations of the first kind. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 8, pp. 1323–1331. doi: 10.1134/S0965542507080106 .
24. Apartsyn A.S. Multilinear Volterra equations of the first kind and some problems of control. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 4, pp. 545–558. doi: 10.1134/S0005117908040012 .
25. Apartsyn A.S., Spiryaev V.A. On unimprovable Lambert estimates of solutions for one class of nonlinear integral inequalities. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 3–12 (in Russian).
26. Apartsyn A.S. Studying the polynomial Volterra equation of the first kind for solution stability. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 6, pp. 1229–1236. doi: 10.1134/S0005117911060099 .
27. Apartsin A.S. Polynomial Volterra integral equations of the first kind and the Lambert function. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, vol. 280, pp. 26–38. doi: 10.1134/S008154381302003X .
28. Kosov A.A., Semenov E.I. Lambert function and exact solutions of nonlinear parabolic equations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2019, vol. 8, pp. 13–20. (in Russian). doi: 10.26907/0021-3446-2019-8-13-20 .

29. Solodusha S.V. *Metody postroeniya integral'nyh modelej dinamicheskih sistem: algoritmy i prilozheniya v energetike* [Methods for constructing integral models of dynamic systems: algorithms and applications in energy]. Dissertation, Dr. Sci. (Technic.), Irkutsk, 2019, 353 p. (in Russian).
30. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.*, 1996, vol. 5, no. 1, pp. 329–359. doi: 10.1007/BF02124750 .

Received March 31, 2021
Revised May 25, 2021
Accepted June 7, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FWEU-2021-0006, topic no. AAAA-A21-121012090034-3).

Svetlana Vital'evna Solodusha, Dr. Technic. Sci., Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia; Irkutsk State University, Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk, 664003 Russia,
e-mail: solodusha@isem.irk.ru .

Elena Yurevna Grazhdantseva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Irkutsk State University, Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk, 664003 Russia; Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia,
e-mail: grelyur@mail.ru .

Cite this article as: S. V. Solodusha, E. Yu. Grazhdantseva. Test polynomial Volterra equation of the first kind in the problem of input signal identification, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 161–174 .