ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 517.518.8

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНСЛОЙНЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ[1]

Б. В. Семисалов, Г. А. Кузьмин

Получены оценки погрешности метода приближения гладких функций на отрезке, имеющих погранслойные составляющие. Для приближения использованы линейные комбинации функций специального вида, полученные из ряда Фурье с помощью замен переменных. Дан анализ трех вариантов таких замен. В качестве исходных положений использованы теорема Джексона и соотношения Колмогорова. Вследствие этого в оценках возникают нормы производной приближаемой функции. Разработанный метод позволяет существенно снизить порядок производной в этих оценках или значение коэффициента при ней по сравнению с оценками погрешности наилучшего полиномиального приближения. За счет этого скорость убывания погрешности новых приближений существенно выше, чем у полиномиальных. Получены выражения коэффициентов при нормах производных. Дан анализ асимптотики остаточных членов. Установлено хорошее соответствие теоретических результатов и экспериментальных данных, опубликованных ранее.

Ключевые слова: пограничный слой, ряд Фурье, приближения без насыщения, неполиномиальные приближения, замена переменной, оценки погрешности, высокий порядок сходимости.

B. V. Semisalov, G. A. Kuzmin. On the question of approximation of smooth functions with boundary layer components.

Error estimates are obtained for the method of approximation of smooth functions having boundary layer components on an interval. The method uses linear combinations of special functions obtained from the Fourier series by changes of variables. Three kinds of such variable changes are analyzed. Jackson's theorem and Kolmogorov's relations are used as underlying results. Consequently, norms of the derivative of the function being approximated appear in the estimates. The developed method enables one to significantly reduce the order of the derivative and the value of the coefficient at it in these estimates in comparison with the estimates of the error of the best polynomial approximation. Due to this, the rate of decay of the error for new approximations is significantly higher than that of polynomial ones. Expressions for the coefficients at the norms of derivatives are obtained. Analysis of the asymptotics of the remainder terms is given. A good agreement can be observed between the theoretical results and the experimental data published earlier.

Keywords: boundary layer, Fourier series, approximation without saturation, non-polynomial approximation, change of variables, error estimates, high order of convergence.

MSC: 41A30 41A17 65D15

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-111-124

Введение

В настоящее время актуальны научные проблемы, сводящиеся тем или иным путем к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с ярко выраженными пограничными слоями. Большинство подходов, предложенных для решения таких задач, основано на построении сеток, сгущающихся в окрестности пограничного слоя с кусочно-линейным или кусочно-полиномиальным приближением неизвестной функции (см., например, [1–3]). Среди эффективных способов сгущения сетки выделим метод отображений из [4], основанный на априорных оценках поведения производных решения и преобразованиях, “устраняющих особенности функций”. Однако в этой и в большинстве других работ анализ ключевых с точки зрения теории приближения вопросов о влиянии свойств гладкости искомого решения и

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-00071).

использованных преобразований на погрешности предложенных методов отсутствует. Применение же кусочных приближений линейными функциями или полиномами низких степеней априори существенно ограничивает порядок аппроксимации таких методов.

В данной работе, следуя [5], для аппроксимации функции с погранслойными составляющими на отрезке будем использовать приближения, полученные с помощью преобразования ряда Фурье. Одно из таких преобразований, основанное на замене переменной $x = \cos\theta$, позволяет получить из множества тригонометрических мономов $\cos(k\theta)$ множество, состоящее из полиномов Чебышёва $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$, $k = 0, 1, \ldots$. В рамках теории приближения известны такие факты, касающиеся ряда Фурье и полиномов Чебышёва, как отсутствие насыщения приближений на их основе (см. [6; 7, гл. 3, § 2 п. 5; 8]). Это означает, что при использовании n-х частичных сумм ряда Фурье и соответствующих разложений по полиномам Чебышёва погрешность с ростом n убывает в соответствии с асимптотикой погрешности наилучшего полиномиального приближения с точностью до множителей порядка $\ln n$ (констант Лебега). Ключевой момент теории состоит в том, что асимптотика погрешности наилучших приближений строго соответствует степени гладкости приближаемой функции: чем выше запас гладкости, тем выше скорость сходимости. Последнее утверждение может быть выражено с помощью классической теоремы Джексона [9] и ее обобщения, известного как усиленное неравенство Джексона [6; 10].

Потеря особой эффективности указанных аппроксимаций при решении краевых задач с пограничными слоями связана с ухудшением асимптотических свойств наилучших равномерных приближений в пространстве полиномов с ростом значений производных приближаемой функции. Для устранения этой проблемы в [5] (без строгих обоснований) предложена и проверена численно идея о разложении гладкой функции с погранслойными составляющими в ряд по неполиномиальным функциям. Такие приближения, полученные из ряда Фурье, могут быть адаптированы к различным видам пограничного слоя.

Целью настоящей работы является развитие и строгое обоснование идей и результатов, анонсированных в [5]. Новыми результатами являются выражения коэффициентов в оценках погрешности, обоснование асимптотики остаточных членов, значения параметров, обеспечивающие максимальную скорость сходимости приближений, доказательства всех утверждений с подробными ссылками на используемые материалы. Методы оценки погрешности новых неполиномиальных приближений, как и в случае наилучших приближений полиномами, основываются на теореме Джексона, однако при этом норма k-й производной, фигурирующая в этой теореме, заменяется на величину, имеющую по k значительно меньшую скорость роста. Для вывода такой оценки используются выражение производной сложной функции (формула Фаа-ди-Бруно [11, гл. 1, § 3]), асимптотический анализ и формула Стирлинга.

1. Исходные положения. Описание проблемы

В рамках данной работы будем заниматься построением быстросходящихся приближений функции $f(x) \in C^r(D)$, имеющей пограничный слой. Здесь r — достаточно большое целое число, $D = [-1, 1]$, C^r — пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$. Суть понятия пограничного слоя сводится к тому, что в малых окрестностях граничных точек D значения производных $f^{(k)}(x)$ с ростом k растут намного быстрее, чем вне этих окрестностей (см., например, определение из [4, гл. 1] или из [10]).

О п р е д е л е н и е. Пусть $D_{-1}(\rho) = [-1, -1+\rho]$, $D_1(\rho) = [1-\rho, 1]$ — отрезки длины ρ вблизи границ D, представляющие пограничные слои $D_{\pm 1} = D_{\pm 1}(\rho) \subset D$, $0 < \rho < 1$; отрезок $D_0 = [-1+\rho, 1-\rho]$. Обозначим через $\|\cdot\|_{C(D_{-1} \cup D_1)}$, $\|\cdot\|_{C(D_0)}$ супремум нормы функции f в $D_{-1} \cup D_1$ и в D_0 соответственно.

Будем говорить, что функция $f \in C^r(D)$ имеет в D пограничный слой (или погранслойную составляющую), если $\|f'\|_{C(D_0)} \leq \|f'\|_{C(D_{-1} \cup D_1)}$ и существуют такое малое положительное число $\tau = \tau(\rho) < 1$ и числа $M_k > 0$ и $A_k = M_k/\tau$, что $\|f^{(k+1)}\|_{C(D_0)} = M_k\|f^{(k)}\|_{C(D_0)}$ и $\|f^{(k+1)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)} = A_k\|f^{(k)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}$ для всех $k = 1, \ldots, r-1$. В таком случае ρ будем называть толщиной пограничного слоя. $\square$

Отметим, что в соответствии с данным определением $\|f^{(k)}\|_{C(D_0)} \le \|f^{(k)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}$ для всех $k = 1, \ldots, r$, т. е. можно считать, что $\|f^{(k)}\| = \|f^{(k)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}$.

Обозначим $A = \max\limits_{k=1,\ldots,r-1} A_k$. Как правило, существует связь между ρ и A, и $\lim\limits_{A\to\infty} \rho(A) = 0$. Однако конкретный вид зависимости $\rho(A)$ определяется типом пограничного слоя (см. примеры из [4, разд. 1.3]).

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ подпространство алгебраических полиномов степени не выше n. Напомним, что $E_n(f) = \inf\limits_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - P\|$ называется величиной *наилучшего равномерного приближения функции f на отрезке* $[-1, 1]$ *подпространством* $\mathcal{P}_n$. Пусть $n \le r$, тогда в соответствии с “усиленным” неравенством Джексона [6; 10]

$$E_n(f) \le \frac{\pi}{2} \min_{j\le n} \frac{\|f^{(j)}\|}{n^j}. \tag{1.1}$$

Далее для обозначения системы функций, по которой строится разложение приближаемой функции, будем использовать термин “базис”. Для реализации асимптотики погрешности вида (1.1) можно воспользоваться разложением функции f в базисе, состоящем из многочленов Чебышёва $T_k(x)$, а точнее, соответствующей частичной суммой Фурье — Чебышёва:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x).$$

Подчеркнем, что такое приближение в некотором смысле эквивалентно приближению периодической функции n-й частичной суммой ряда Фурье. Действительно, делая у функции $f(x)$ замену $x = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, получаем 2π-периодическую четную функцию $\tilde{f}(\theta) = f(\cos\theta)$. Частичная сумма ряда Фурье этой функции имеет вид $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta) \approx \tilde{f}(\theta)$. Отсюда

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k \arccos(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x), \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(\cos\theta) \cos k\theta d\theta. \tag{1.2}$$

Иными словами, полиномы Чебышёва $T_k(x)$ могут быть получены из ряда Фурье (в случае приближения четных функций) с помощью замены переменной, отображающей отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[-1, 1]$.

Величину $E_n^T(f) = \| \sum_{k=0}^{n} a_k T_k - f\|$ называют *величиной уклонения функции f от ее частичной суммы Фурье — Чебышёва.* Для частичных сумм ряда Фурье на основе неравенства Лебега и соотношения Колмогорова для константы Лебега (см. [8, комментарии к теореме 10]) можно получить оценку погрешности приближения. Используя замену $x = \cos\theta$, эту оценку в случае разложения непериодической функции по полиномам $T_k(x)$ можно записать в виде

$$E_n^T(f) \le \Big(5 + \frac{4}{\pi^2} \log n\Big) E_n(f). \tag{1.3}$$

В качестве важного следствия (1.3) отметим, что если $E_n(f) = o(\log(n))$ при $n \to \infty$, то приближение (1.2) сходится. Последнее асимптотическое равенство в силу теоремы Джексона, записанной в терминах первого модуля непрерывности функции f, есть не что иное, как признак Дини — Липшица (см. [12, гл. 4, § 2, теорема 1]).

Подставляя (1.1) в (1.3), получаем

$$E_n^T(f) \le \Big(\frac{5\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \log n\Big) \min_{j\le n} \mathfrak{M}_j^n, \quad \mathfrak{M}_j^n = \frac{\|f^{(j)}\|}{n^j}. \tag{1.4}$$

Из (1.4) заключаем, что для функций, имеющих высокую степень гладкости, погрешность будет убывать к нулю степенным образом при $n > n_0$, где $n_0 = \min\limits_{j=1,\dots,r} \sqrt[j]{\|f^{(j)}\|}$. Однако, если значения $\sqrt[j]{\|f^{(j)}\|}$ велики для всех $j = 1, \dots, r$, то для обеспечения сходимости необходимо взять очень большое n. Это обстоятельство ведет к существенному росту вычислительных затрат при поиске приближенных решений в задачах с пограничным слоем.

Рассмотрим простой пример. Пусть дана краевая задача для уравнения второго порядка с малым параметром ε при старшей производной

$$\varepsilon\frac{d^2 f}{dx^2} - f = \varepsilon g''(x) - g(x), \quad f(-1) = 1, \quad f(1) = -1, \tag{1.5}$$

где $x \in D = [-1, 1]$, $g(x) \in C^\infty(D)$ — заданная функция. Решение задачи — функция

$$f(x) = \xi(x) + g(x),\ \xi(x) = C_1 e^{A(0.5x+0.5)} + C_2 e^{-A(0.5x+0.5)}, \quad C_1 = \frac{1+e^{-A}}{e^{-A}-e^{A}}, \quad C_2 = \frac{1+e^{A}}{e^{A}-e^{-A}}.$$

Здесь $\xi(x)$ — экспоненциальная погранслойная составляющая $f(x)$, C_1, C_2, $A = \sqrt{1/\varepsilon}$ — константы. Ниже в таблице приведены значения n, обеспечивающие приближение $\xi(x)$ с точностью 1%, полученные на основе (1.4) с учетом $\|\xi^{(j)}\| \sim (0.5A)^j$ при $A \to \infty$, где "$\sim$" есть символ асимптотической эквивалентности, т. е. $\lim\limits_{A\to\infty} \dfrac{\|\xi^{(j)}\|}{(0.5A)^j} = 1$:

	Величина малого параметра			
	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-8}$	$\varepsilon = 10^{-10}$
Длина ряда n	57	508	5 008	50 008

Таким образом, видно, что чем меньше значения ε, тем быстрее растут значения $f^{(j)}(x)$ у границ отрезка с ростом j, и тем больше данных требуется для восстановления решения с заданной точностью. Даже в случае бесконечной гладкости функции может потребоваться много тысяч членов ряда для достижения относительно невысокой точности 1%. В работе [5] приближения решения задачи (1.5) выполнены численно для различных значений ε, их погрешность представлена в [5, рис. 1].

Из этих данных можно заметить, что, например, при $\varepsilon = 10^{-6}$ требуется взять 60 слагаемых суммы Фурье — Чебышёва для достижения точности 1%, т. е. значения n, приведенные в таблице для рассматриваемой функции $\xi(x)$, существенно завышены. Связано это с общим свойством систем ортогональных полиномов, заданных на отрезке, а именно с тем, что нули таких полиномов сгущаются в окрестности точек ± 1. Используя интегральную формулу Эрмита и теорию потенциала, можно показать, что условие равномерного распределения погрешности приближения аналитических функций в базисе из полиномов Чебышёва эквивалентно условию, согласно которому плотность распределения нулей таких полиномов на отрезке $[-1, 1]$ есть $\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ (см. [13, гл. 11, 12]).

Важность этого свойства была впервые отмечена в работах С. М. Никольского и А. Ф. Тимана (подробный обзор см. в [12, гл. 6, § 2]): при приближении $f \in Lip_M(D)$ аппроксимирующий многочлен можно строить таким образом, чтобы погрешность приближения у границ D была по порядку почти в 2 раза меньше, чем внутри D. Здесь $Lip_M(D)$ — класс функций на отрезке D, удовлетворяющих условию Липшица с константой M.

Таким образом, за счет сгущения нулей базисных функций в окрестности пограничных слоев удается существенно уменьшить количество членов ряда (1.2) для достижения заданной точности или, наоборот, увеличить точность приближений при фиксированном n. Соответствующее уточнение оценки (1.1) для наилучших полиномиальных приближений в задачах с пограничным слоем дано в [10]. Во введенных обозначениях суть этой уточненной оценки выразим следующим образом:

$$E_n(f) \le \frac{\pi}{2}\min_{j\le n}\frac{S_j(\sqrt{\rho})^j}{n^j},$$

где числа S_j выражаются через $\|f^{(j)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}$. Подчеркнем, что по причине, указанной выше, в этой оценке появляется корректировочный множитель, пропорциональный $\sqrt{\rho}$.

Возникает вопрос, можно ли добиться еще более существенного повышения скорости сходимости за счет дополнительного сгущения нулей базисных функций в окрестностях точек ± 1? Попытки ответить на этот вопрос приводят к идее об использовании более широкого класса неполиномиальных приближений. Нули базисных функций таких приближений должны иметь определенную достаточно высокую степень сгущения в окрестности пограничных слоев. Приведем далее строгое обоснование этой идеи.

2. Описание метода

Определим функцию $x = æ(y) : [-1, 1] \to [-1, 1]$, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) функция $æ(y)$ является взаимнооднозначным отображением, $æ(1) = 1$, $æ(-1) = -1$;

2) $æ(y)$ является бесконечное число раз непрерывно дифференцируемой функцией;

3) обратная функция $y = æ^{-1}(x)$ выражается аналитически либо легко вычисляется;

4) производная $æ'(y)$ в окрестности точек ± 1 близка к нулю.

Отметим, что сгущение нулей базисных функций в окрестности границ отрезка достигается именно благодаря последнему требованию.

Для аппроксимации функции $f(x)$, $x \in [-1, 1]$, сопоставим 2π-периодической четной функции $f(æ(\cos\theta))$ $(\theta \in [0, \pi])$ ее частичную сумму Фурье

$$f(æ(y)) = f(æ(\cos\theta)) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta). \tag{2.1}$$

В результате имеем

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos[k \arccos(æ^{-1}(x))], \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(æ(\cos\theta)) \cos k\theta d\theta. \tag{2.2}$$

Здесь мы полагаем $y = \cos\theta$. Таким образом, в качестве базисных функций можно взять $B_k(x) = \cos[k \arccos(æ^{-1}(x))]$, $k = \overline{0, n}$, нули $B_k(x) - x_m^k = æ\Big(\cos\dfrac{(2m+1)\pi}{2k}\Big)$, $k = \overline{1, n}$, $m = \overline{0, k-1}$. Заметим, что в силу свойств 1), 3) функции $æ(y)$, $B_k(x)$ являются однозначными и легко вычислимыми.

Лемма 1. *Формула* (2.2) *эквивалентна приближению функции* $f(æ(y))$ *ее частичной суммой Фурье — Чебышёва, поэтому* (2.2) *удовлетворяет оценке* (1.4), *в которой* $\|f^{(j)}\|$ *нужно заменить на* $\|(f \circ æ)^{(j)}\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из приближенного представления (2.1) следует, что

$$f(æ(y)) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k \arccos(y)) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(y).$$

Следовательно, соотношение (2.2) эквивалентно приближению $f(æ(y))$ как функции переменной y ее частичной суммой Фурье — Чебышёва. По определению $æ(y)$ является бесконечное число раз непрерывно дифференцируемой функцией, поэтому порядок гладкости $f(x)$ равен порядку гладкости $f(æ(y))$, что обеспечивает выполнение леммы. $\square$

Разрешить ключевой вопрос о значении $\|(f \circ æ)^{(j)}\|$, которое в соответствии с леммой 1 возникает в оценке погрешности, позволяет применение следующего утверждения.

Лемма 2. *Для производной сложной функции имеют место представления*

$$[f(æ(y))]^{(n)} = \sum_{(m_1,\ldots,m_n)} \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_n!} f^{(m_1+\ldots+m_n)}(æ(y)) \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{æ(y)^{(j)}}{j!}\Big)^{m_j}, \tag{2.3}$$

где суммирование ведется по всем возможным неотрицательным целым числам $m_1,\ldots,m_n$ *таким, что* $1\cdot m_1 + 2\cdot m_2 + \ldots + n\cdot m_n = n$;

$$[f(æ(y))]^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(æ(y)) \Big[\sum_{\substack{\mathcal{A}_{kl}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_k=n}} C^n_{kl} \prod_{j=1}^{k} (æ(y))^{(\alpha_j)} \Big], \tag{2.4}$$

где второе суммирование ведется по всем возможным разбиениям числа n — $\mathcal{A}_{kl}$*, состоящим из* k *положительных целых чисел* $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, $l = 1,\ldots,L$; C^n_{kl} — *константы. Причем для любых* n *при* $k = 1$ *и* $k = n$ *имеем* $L = 1$, $C^n_{11} = 1$, $C^n_{n1} = 1$.

Представление (2.4) можно доказать индукцией по n (для краткости это доказательство опущено), для вывода (2.3) необходимо дополнительно использовать разложение функции в ряд Тейлора [11, гл. 1, § 3].

Формула (2.3) по сути содержит явные выражения для постоянных C^n_{kl} из формулы (2.4); при этом m_j — это количество вхождений числа j в разбиение $\mathcal{A}_{kl}$. В формуле (2.4) акцент сделан на комбинаторной природе представления производной сложной функции, что оказалось полезным для доказательства ряда теорем статьи.

3. Оценки погрешности приближения для трех видов функции $æ(y)$

Рассмотрим далее три вида функции $æ(y)$, предложенные в [5]. Используем обозначения разд. 1 и положим, что $o(f^{(s)})$ — такая величина, что $\lim\limits_{A\to\infty} o(f^{(s)})/\|f^{(s)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)} = 0$.

I. *Тригонометрическая функция*

$$æ(y) = \sin\Big(\frac{\pi y}{2}\Big). \tag{3.1}$$

Теорема 1. *Пусть* $\rho^2(A)A \to 0$ *при* $A \to \infty$. *Тогда при* $f \in C^n(D)$ *оценка погрешности приближения* (2.2) *с функцией* $æ(y)$ *вида* (3.1) *дается неравенством* (1.4), *где*

$\mathfrak{M}^n_j = C^j_{j/2\ l}(\pi/2)^j \dfrac{\|f^{(j/2)}\|}{n^j} + o(f^{(j/2)})$, *если* j *четное*;

$\mathfrak{M}^n_j = C^j_{[j/2]l}\rho(A)(\pi/2)^j \dfrac{\|f^{([j/2])}\|}{n^j} + o(f^{([j/2])})$, *если* $j \ge 3$ *нечетное.*

Здесь $[s]$ *означает целую часть числа* s, $C^j_{j/2\ l} = \frac{j!}{2^{j/2}(j/2)!}$, $C^j_{[j/2]l} = \frac{j!}{2^{[j/2]}[j/2]!}$ — *коэффициенты из формулы* (2.4), *соответствующие разбиениям* $\mathcal{A}_{j/2\ l} = (\underbrace{2,\ldots,2}_{j/2})$, $\mathcal{A}_{[j/2]\ l} = (\underbrace{2,\ldots,2}_{[j/2]},1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь и далее без дополнительных комментариев будем использовать равенство $\|f^{(k)}\| = \|f^{(k)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}$, имеющее место при всех $k = 1,2,\ldots,r$ для функций с пограничным слоем в соответствии с определением из разд. 1. Кроме того, из условия $\rho^2(A)A \to 0$ при $A \to \infty$ следует, что $\rho(A) \to 0$ при $A \to \infty$.

Оценка (1.4) выполняется в силу леммы 1 и того, что функция $æ(y)$, определенная формулой (3.1), имеет бесконечное число непрерывных производных. Поскольку $æ^{(2k-1)}(-1) = æ^{(2k-1)}(1) = 0$ при всех положительных целых k, то в силу леммы 2 в окрестности ± 1 все слагаемые в выражении (2.4), соответствующие разбиениям j, содержащим хотя бы одно нечетное число, малы по сравнению со слагаемыми, для которых разбиения содержат только четные числа. Анализ вкладов этих слагаемых дан ниже. Слагаемое, содержащее производную $f(x)$ максимального порядка, в сумме (2.4) соответствует максимально длинному $\mathcal{A}_{kl}$, включающему только четные числа. Очевидно, что при четных j такой $\mathcal{A}_{kl}$ состоит из $j/2$ чисел 2, и соответствующее слагаемое есть

$$C^{j}_{j/2\ l}(æ''(y))^{j/2}\|f^{(j/2)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)} = C^{n}_{j/2\ l}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{j}\|f^{(j/2)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}.$$

Остальные слагаемые дают $o(f^{(j/2)})$.

Для $\|f^{(s)}\|$, где $s < j/2$, это следует из равенства $A_s\|f^{(s)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)} = \|f^{(s+1)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}$ (см. определение разд. 1).

Для $\|f^{(s)}\|$, где $s > j/2$, имеют место следующие факты:

1) $\|f^{(s)}\| = A_{j/2}A_{j/2+1}\dots A_{s-1}\|f^{(j/2)}\| \le A^{s-j/2}\|f^{(j/2)}\|$, $s = j/2+1,\dots,j$;

2) при $y \to 1$ $æ'(y) \sim (\pi/2)(1-y)$, поэтому при $y \in D_1$ имеем $y > 1-\rho(A)$ и $æ'(y) \sim (\pi/2)\rho(A)$; аналогичное верно и для $y \in D_{-1}$;

3) при увеличении s на единицу из разбиения $\mathcal{A}_{sl^*} = (\underbrace{2,\dots,2}_{j-s},\underbrace{1,\dots,1}_{2s-j})$ (l^* — определенное число из набора $\{1,\dots,L\}$) исключается одна двойка и добавляются две единицы;

4) разбиения $\mathcal{A}_{sl}$, $l = 1,\dots,L$, имеют фиксированную длину, равную s, поэтому $\mathcal{A}_{sl}$, содержащие числа, бóльшие "1", "2", включают больше чисел "1", чем $\mathcal{A}_{sl^*}$, и, как следствие, дают бóльшую степень $\rho(A)$, чем в оценке (3.2).

Учитывая перечисленные факторы и формулу (2.4), получаем

$$\|f^{(s)}\| < (A\rho^2(A)(\pi/2)^2)^{s-j/2}\|f^{(j/2)}\|, \quad j/2 < s, \tag{3.2}$$

что по условию теоремы обеспечивает $\|f^{(s)}\| = o(\|f^{(j/2)}\|)$.

Если же j нечетно, то все разбиения n содержат хотя бы одно нечетное число. Максимально длинное разбиение j, содержащее минимальное количество нечетных чисел, — $\mathcal{A}_{[j/2]\ l} = (\underbrace{2,\dots,2}_{[j/2]},1)$. Учитывая все факторы, изложенные для случая четных j и эквивалентности

$$[(æ(y))'']^{[j/2]}æ'(y) \sim \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2[j/2]}\rho(A)\frac{\pi}{2}, \quad y \to \pm1,$$

получаем утверждение теоремы.

В заключение отметим, что выражения для коэффициентов $C^{j}_{j/2\ l}$, $C^{j}_{[j/2]l}$ следуют из представления (2.3). □

II. *Полином третьей степени*

$$æ(y) = ay^3 + by^2 + cy + d. \tag{3.3}$$

После учета свойств 1)–4) функции $æ(y)$ получаем $b = d = 0$, $a = 1-c$, $1 \le c \le 1.5$. Полагая $p = c$, имеем

$$æ(y) = (1-p)y^3 + py, \tag{3.4}$$

где $1 \le p \le 1.5$ — свободный параметр, равный производной $æ'(0)$. При этом $æ'(\pm1) = 3-2p$, откуда следует, что в пределе при $p \to 1.5$ значения $æ'(\pm1)$ стремятся к нулю.

Теорема 2. *Пусть $\rho^2(A)A \to 0$ при $A \to \infty$. Тогда при $f \in C^n(D)$ оценка погрешности приближения (2.2) с функцией $æ(y)$ вида (3.4) при $p = 1.5$ дается неравенством (1.4), где*

$\mathfrak{M}^n_j = C^{j}_{j/2\ l}3^{j/2}\dfrac{\|f^{(j/2)}\|}{n^j} + o(f^{(j/2)})$, *если j четное*;

$\mathfrak{M}^n_j = C^{j}_{[j/2]l}\rho(A)3^{[j/2]+1}\dfrac{\|f^{([j/2])}\|}{n^j} + o(f^{([j/2])})$, *если $j \ge 3$ нечетное.*

Здесь $C^{j}_{j/2\ l}$, $C^{j}_{[j/2]l}$ — те же величины, что в формулировке теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $æ(y)$, заданная формулой (3.4), имеет бесконечное число непрерывных производных, то в силу леммы 1 для приближения (2.2) справедлива оценка (1.4). Выражения для $\mathfrak{M}_j^n$ выводятся аналогично теореме 1 со следующими незначительными отличиями:

1) $æ'(-1) = æ'(1) = 0$, $|æ''(\pm 1)| = |æ'''(\pm 1)| = 3$. Отсюда слагаемое в правой части (2.4), соответствующее разбиению $\mathcal{A}^j_{j/2\ l}$, которое содержит $(æ''(y))^{j/2}$, имеет коэффициент $3^{j/2}$;

2) $æ^{(k)}(y) \equiv 0$ при любом целом $k > 3$;

3) при $y \to 1$ имеет место асимптотическая эквивалентность $æ'(y) \sim 1.5(1 - y^2)$, поэтому при $y \in D_1$ имеем $y > 1 - \rho(A)$ и $æ'(y) \sim 1.5(1 - y^2) \sim 3\rho(A)$; аналогичное верно и для $y \in D_{-1}$. □

Дальнейший анализ приближения на основе (3.4) показывает, что множитель $3^{j/2}$ в теореме 2 за счет выбора параметра p можно уменьшить и тем самым в некотором смысле оптимизировать приближение (3.4).

Теорема 3. *Пусть $p = 1.5 - \delta$, тогда при больших A значения $\delta \sim \dfrac{C(j)}{\sqrt{A}}$ с числами*

$$C(j) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{(2\nu_j)!}{(j/2 - \nu_j + 1)\dots(j/2)}\Big)^{1/(2\nu_j)}, \quad \text{где} \ \ \nu_j = \Big[\sqrt{\frac{j}{4} + \frac{1}{2}}\Big],$$

обеспечивают минимальное значение $\mathfrak{M}_j^n$ для заданного $j > 1$:

$$\mathfrak{M}_j^n = C^j_{j/2\ l}[3(1-2\delta)]^{j/2}\frac{\|f^{(j/2)}\|}{n^j} + o(f^{(j/2)}), \ \text{если } j \text{ четное};$$

$$\mathfrak{M}_j^n = C^j_{[j/2]l}\rho(A)[3(1-2\delta)]^{[j/2]+1}\frac{\|f^{([j/2])}\|}{n^j} + o(f^{([j/2])}), \ \text{если } j \text{ нечетное}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть j четно. Поскольку $p = 1.5 - \delta$, то $|æ'(y)| \sim 2\delta$, $|æ''(y)| \sim 3 - 6\delta$ при $y \to \pm 1$. Используя пп. 1), 3), 4) из доказательства теоремы 1 и оценку (2.4), при $y \to \pm 1$ получаем

$$|[f(æ(y))]^{(j)}| \sim \sum_{s=j/2}^{j} C^j_{sl^*}A_{j/2}A_{j/2+1}\dots A_{s-1}\|f^{(j/2)}\|(2\delta)^{2s-j}(3-6\delta)^{j-s} + o(f^{(j/2)})$$

$$\le \sum_{s=j/2}^{j} C^j_{sl^*}A^{s-j/2}\|f^{(j/2)}\|(2\delta)^{2s-j}(3-6\delta)^{j-s} + o(f^{(j/2)}), \tag{3.5}$$

где $C^j_{sl^*}$ соответствуют разбиениям $\mathcal{A}_{sl^*} = (\underbrace{2,\dots,2}_{j-s},\underbrace{1,\dots,1}_{2s-j})$, и при $s = j/2$ вместо $A_{j/2}A_{j/2+1}\dots A_{s-1}$ в первом слагаемом ставится единица. Слагаемые правой части оценки (3.5) разбиваются на два множества:

1) слагаемое, соответствующее индексу $s = j/2$, включает $\|f^{(j/2)}\|(3-6\delta)^{j/2}$ и монотонно убывает с ростом δ в окрестности нуля;

2) все остальные слагаемые монотонно возрастают с ростом δ в окрестности нуля.

Отсюда выражение в правой части (3.5) при больших A и малых δ будет минимально, если

$$\mathcal{M}_j(4A\delta^2)^{s_j-j/2}(3-6\delta)^{j-s_j} \sim \mathcal{N}_j(3-6\delta)^{j/2},$$

где $\mathcal{M}_j = \max\limits_{s=j/2+1,\dots,j} C^j_{sl^*}$, $\mathcal{N}_j = C^j_{j/2\ 1}$, s_j — то значение s, при котором достигается максимум $C^j_{sl^*}$. В силу леммы 2 можем записать $C^j_{sl^*} = \dfrac{j!}{(2s-j)!\,(j-s)!\,2^{j-s}}$. Определяя минимальное значение знаменателя последнего выражения, находим $s_j = j/2 + \nu_j, \nu_j = \Big[\sqrt{\dfrac{j}{4} + \dfrac{1}{2}}\Big]$, где квадратные скобки означают целую часть числа, и $\mathcal{M}_j = \dfrac{j!}{(2\nu_j)!\,(j/2-\nu_j)!\,2^{j/2-\nu_j}}$. Отсюда имеем

$$\delta \sim \frac{\sqrt{9c^2(j)+12c(j)A}-3c(j)}{4A} \sim \frac{\sqrt{3c(j)}}{2}\frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{C(j)}{\sqrt{A}} \quad \text{при } A\to\infty,$$

$$c(j) = \Big(\frac{\mathcal{N}_j}{\mathcal{M}_j}\Big)^{1/(s_j-j/2)} = \Big(\frac{\mathcal{N}_j}{\mathcal{M}_j}\Big)^{1/\nu_j}, \quad C(j) = \frac{\sqrt{3c(j)}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{(2\nu_j)!}{(j/2-\nu_j+1)\dots(j/2)}\Big)^{1/(2\nu_j)}.$$

При нечетных j в соответствии с рассуждениями, приведенными для доказательства теорем 1, 2, в правой части оценки (3.5) появится множитель $\rho(A)$. Все дальнейшие выкладки, сделанные для четных j, сохранятся. □

З а м е ч а н и е. Поскольку $A_{[j/2]}A_{j/2+1}\dots A_{s-1} = \dfrac{\|f^{(s)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}}{\|f^{([j/2])}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}}$ для любого $s>[j/2]$, то выражение для δ в формулировке теоремы 3 можно уточнить, заменив его при четных j

$$\delta \sim \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{(2\nu_j)!\|f^{(j/2)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}}{(j/2-\nu_j+1)\dots(j/2)\|f^{(j/2+\nu_j)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}}\Big)^{1/(2\nu_j)} \quad \text{при} \quad \frac{\|f^{(j/2+\nu_j)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}}{\|f^{(j/2)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}}\to\infty,$$

где $\nu_j = \Big[\sqrt{\dfrac{j}{4}+\dfrac{1}{2}}\Big]$. В случае нечетных $j\ge 3$ все вхождения выражения “$j/2$” в последнюю формулу нужно заменить на “$(j-1)/2$”.

Теоремы 1, 3 имеют следующее

Следствие. *При условии $f\in C^n(D)$, $\rho(A) = o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{A}}\Big)$ при $A\to\infty$ и при достаточно больших A и $n\ge 2$ для погрешности приближения $E_n^S(f)$ функции f при использовании* (3.1) *справедлива оценка*

$$E_n^S(f) \le \sqrt{2}\Big(\frac{5\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\log n\Big)\min_{k\le[n/2]}\Big\{\Big(\frac{\pi^2}{2e}\frac{k}{n^2}\Big)^k\|f^{(k)}\| + o(f^{(k)})\Big\}, \tag{3.6}$$

где $e=\exp(1)$, а для погрешности приближения $E_n^P(f)$ функции f при использовании (3.4) *при $p=1.5-\delta_j$, $\delta_j\sim\dfrac{C(j)}{\sqrt{A}}$ имеет место оценка*

$$E_n^P(f) \le \sqrt{2}\Big(\frac{5\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\log n\Big)\min_{k\le[n/2]}\Big\{\Big(\frac{6(1-2\delta_{2k})}{e}\frac{k}{n^2}\Big)^k\|f^{(k)}\| + o(f^{(k)})\Big\}. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя формуле Стирлинга для факториала

$$j! = \sqrt{2\pi j}\Big(\frac{j}{e}\Big)^j \exp\frac{1}{12j+\theta_j},$$

где $0<\theta_j<1$, при четных j получаем оценку

$$C^j_{j/2\ l} = \frac{j!}{2^{(j/2)}(j/2)!} < \sqrt{2}\Big(\frac{j}{e}\Big)^{(j/2)}\frac{\exp\{1/12j\}}{\exp\{1/(6j+1)\}}.$$

Несложно видеть, что отношение экспонент в последней формуле при $j\ge 1$ ограничено сверху единицей.

С учетом того, что $\rho(A)\to 0$ при $A\to\infty$, и теорем 1, 3 заключаем, что для любого нечетного $s\le n$ и любого четного $j\le n$ при $A\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство $\mathfrak{M}_s^n = o(\mathfrak{M}_j^n)$. Значит, при подстановке этих значений в (1.4) и условии, что A достаточно велико, можно ограничиться только четными j, т. е. положить $j=2k$, $k=1,\dots,[n/2]$.

Подставляя теперь оценку $C^j_{j/2\ l}$ в выражения для $\mathfrak{M}_j^n$ из теорем 1, 3 при четных j, а полученные таким образом $\mathfrak{M}_j^n$ — в оценку (1.4), приходим к оценкам (3.6), (3.7). □

Следствие представляет ключевой результат работы, касающийся приближений на основе (3.1), (3.4) и определяющий значение коэффициента при производной в оценке погрешности. На основе следствия можно сделать важное заключение: при больших A правые части оценок (3.6), (3.7) имеют значения на много порядков меньше, чем правая часть (1.4), поскольку максимальный порядок производных в (3.6), (3.7) в два раза меньше, чем в (1.4). Кроме того, коэффициент, стоящий при норме производной в (3.6), (3.7), есть $O((\sqrt{n})^{-n})$ при больших n, т. е. функция быстроубывающая с ростом n.

Рассмотрим далее несколько иной подход к построению $æ(y)$. Будем требовать, чтобы все ее производные в окрестности ± 1 были близки к нулю.

III. *Функция*

$$æ(y) = \frac{\arctan(by)}{\widetilde{b}}, \quad \widetilde{b} = \arctan b. \tag{3.8}$$

Теорема 4. *Если при всех $j = 1, \dots, n$ и всех $k = 1, \dots, j$ таких, что $f^{(k)}(0) \neq 0$, для параметра b функции $æ(y)$ вида* (3.8) *имеют место ограничения*

$$b \le b_{kj}, \text{ где } b_{kj} = \sqrt[j+k]{\frac{\mu_k}{|f^{(k)}(0)|}}, \quad \mu_k = \max\{|f^{(k)}(-1)|, |f^{(k)}(1)|\}, \tag{3.9}$$

то при достаточно больших n и A приближение (2.2) *с функцией $æ(y)$ вида* (3.8) *удовлетворяет оценке* (1.4) *с величиной*

$$\mathfrak{M}_j^n = \frac{1}{n^j} \max\left\{(\Lambda_1(b))^j \|f^{(j)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)},\ j!\Lambda_j(b)\|f'\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}\right\} + o\left(\frac{j!}{n^j}\right) + o(f^{(j)}), \tag{3.10}$$

где $\Lambda_j(b) = \dfrac{b^{2j-1}}{\widetilde{b}(1+b^2)^j} + \dfrac{C_j}{b^3}$, C_j — числа, зависящие только от значения индекса j. Подстановка в (3.10) *вместо b величин*

$$\beta_j = \frac{2}{\pi} \sqrt[j-1]{\frac{\|f^{(j)}\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}}{j!\|f'\|_{C(D_{-1}\cup D_1)}}} \tag{3.11}$$

при условии $1.56 < \beta_j \le \min\limits_{k=1,\dots,j} b_{kj}$ обеспечивает для каждого фиксированного j минимизацию значения правой части (3.10), *которая при такой подстановке будет приблизительно в $(\widetilde{b}b)^j$ раз меньше, чем значения $\mathfrak{M}_j^n$ в оценке* (1.4).

Доказательство. Дифференцируя функцию $æ(y)$ и записывая производные в точках ± 1, имеем

$$æ^{(s)}(\pm 1) = \frac{s!b^{2s-1}}{\widetilde{b}(1+b^2)^s} + C_s b^{-3}, \tag{3.12}$$

где C_s зависит только от s. Выражение для производных $æ(y)$ в точке 0 имеет вид

$$æ^{(s)}(0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\widetilde{b}}(s-1)!b^s & \text{при нечетных } s, \\ 0 \quad \text{при четных } s. \end{cases} \tag{3.13}$$

Отметим, что при любом фиксированном s значения $æ^{(s)}(0)$ с ростом b растут неограниченно со скоростью b^s. Это обстоятельство приводит к эффекту, который не наблюдался для других рассмотренных видов функции $æ(y)$ в силу ограниченности их производных. Теперь же при неограниченном росте b основной вклад в значение нормы $\|(f \circ æ)^{(k)}\|$ дают значения $(f \circ æ)^{(k)}$ в окрестности нуля, т. е. после замены $x = æ(y)$ большой градиент $f(x)$ переносится из окрестностей граничных точек D в окрестность нуля. Чтобы избежать стремительного роста значений $(f \circ æ)^{(k)}$ в окрестности нуля, необходимо определить ограничения сверху на значения параметра b.

Простой анализ показывает, что максимальная скорость роста производных функции $æ(y)$ с ростом b достигается в точке $y = 0$. С другой стороны, в силу определения, введенного в разд. 1, максимальная скорость роста значений k-х производных $f(x)$ с ростом k достигается при $x \in D_{-1} \cup D_1$, т. е. в малой окрестности точек ± 1, поэтому далее для получения ограничений на b целесообразно сравнивать значения модулей производных функции $f \circ æ$ в нуле и в точках ± 1. Подставляя выражения (3.12), (3.13) в (2.3), с учетом (2.4) в точках ± 1 и 0 получаем

$$[f(æ(y))]^{(j)} = j! \sum_{k=1}^{j} f^{(k)}(æ(y)) \Bigg[\sum_{\mathcal{A}_{kl}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \frac{1}{m_1! \ldots m_j!} \prod_{i=1}^{k} \Big(\frac{b^{2\alpha_i - 1}}{\widetilde{b}(1+b^2)^{\alpha_i}} + \frac{C_{\alpha_i}}{b^3} \Big) \Bigg], \quad y = \pm 1, \tag{3.14}$$

$$[f(æ(y))]^{(j)} = j! \sum_{k=1}^{j} f^{(k)}(æ(y)) \Bigg[\sum_{\mathcal{A}_{kl}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \frac{1}{m_1! \ldots m_j!} \prod_{\substack{i=1, \\ \alpha_i \text{ нечетные}}}^{k} \frac{b^{\alpha_i}}{\widetilde{b}\alpha_i} \Bigg], \quad y = 0. \tag{3.15}$$

Здесь m_i — количество чисел, равных i в разбиении $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $i = 1, \ldots, j$.

Из (3.14), (3.15) видно, что значения модуля $[f(æ(y))]^{(j)}$ при $y = 0$ не превосходят модуль $[f(æ(y))]^{(j)}$ при $y = \pm 1$, если каждое слагаемое (3.15) по модулю не превосходит соответствующее слагаемое (3.14), т. е. если для всех $k = 1, \ldots, j$, таких что $f^{(k)}(0) \neq 0$,

$$\frac{b^{2j-k}}{(1+b^2)^j} \mu_k \geq b^j |f^{(k)}(0)|, \quad \text{или} \quad b \leq \sqrt[j+k]{\frac{\mu_k}{|f^{(k)}(0)|}}, \tag{3.16}$$

где $\mu_k = \max(|f^{(k)}(-1)|, |f^{(k)}(1)|)$.

Далее при условии (3.16) займемся анализом производных $[f(æ(y))]^{(j)}$ в $D_{-1} \cup D_1$. Отметим, что (3.14) выполняется при $æ(y) \in D_{-1} \cup D_1$ с точностью до слагаемых порядка $\rho(A)$, которые стремятся к нулю при $A \to \infty$. Среди слагаемых (3.14) имеются два доминирующих над остальными:

1) при больших b и j наибольшие значения принимает первое слагаемое (при $k = 1$, $m_j = 1$, $\alpha_1 = j$);

2) при больших A наибольшее значение принимает последнее слагаемое (при $k = j$, $m_1 = j$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_j = 1$).

На основании этого заключаем, что скорость роста $\mathfrak{M}_j^n$ при достаточно больших j, b и A определяется первым и последним слагаемыми, что и отражено в формуле (3.10).

Подстановка в (3.10) вместо b выражений, полученных из равенства указанных выше слагаемых, или

$$\frac{b^j}{(\widetilde{b}(1+b^2))^j} \|f^{(j)}\|_{C(D_{-1} \cup D_1)} = \frac{j! b^{2j-1}}{\widetilde{b}(1+b^2)^j} \|f'\|_{C(D_{-1} \cup D_1)},$$

приводит к минимизации значения производной $[f(æ(y))]^{(j)}$ при $æ(y) \in D_{-1} \cup D_1$. Отсюда с учетом того, что $\dfrac{1}{1+b^2} \approx b^{-2}$ и $\widetilde{b} \approx \dfrac{\pi}{2}$, при больших b получаем

$$b \approx \beta_j = \frac{2}{\pi} \sqrt[j-1]{\frac{\|f^{(j)}\|_{C(D_{-1} \cup D_1)}}{j! \|f'\|_{C(D_{-1} \cup D_1)}}}.$$

Заметим, что

1) здесь в соответствии с (3.16) мы полагаем, что свойства функции $f(x)$ таковы, что $\beta_j \leq \min\limits_{s=1,\ldots,j} b_{sj}$;

2) выигрыш от использования $\text{æ}(y)$ вида (3.8) по сравнению с приближением на основе полиномов Чебышёва составляет приблизительно $(\widetilde{bb})^j$ крат (здесь, конечно, предполагается, что $(\widetilde{bb}) > 1$). □

Как следует из теоремы 4, для приближения $f(x)$ с высокой точностью необходимо, чтобы $\min\limits_{k,j} b_{kj} \gg 1$. Это условие накладывает достаточно жесткие ограничения на величины производных $f(x)$ в окрестности нуля: как минимум необходимо, чтобы для всех $k = 1, \ldots, n$ имело место неравенство $|f^{(k)}(0)| < \max(|f^{(k)}(-1)|, |f^{(k)}(1)|)$. Иначе говоря, построенные приближения будут быстро сходиться для погранслойной составляющей $\xi(x)$, производные которой имеют малые значения в окрестности нуля, но не для разности $g(x) = f(x) - \xi(x)$, производные которой могут иметь большие значения в окрестности нуля. В [5] эта проблема подробно обсуждается и предлагаются пути ее решения.

Кроме того, несложно убедиться, что характер сходимости приближений, построенных численно в [5], и зависимость "оптимальных" значений их параметров от ε соответствуют результатам теорем 1–4 с учетом того, что в рассмотренных примерах имеет место экспоненциальный пограничный слой. Соответствующие численные данные приведены на рис. 3–6 и в табл. 2 указанной работы.

Заключение

В работе дано строгое обоснование метода приближения функций высокой гладкости с погранслойными составляющими. Метод основан на построении разложений в системах из неполиномиальных функций специального вида. Строгий анализ погрешности метода потребовал привлечения фундаментальных результатов теории приближения, включая усиленное неравенство Джексона и соотношение Колмогорова для константы Лебега. Вслед за [6; 10] отметим, что именно эти оценки позволяют адекватно учесть свойства гладкости функций при реализации алгоритмов на ЭВМ, где число членов ряда всегда конечно. Дальнейшие рассуждения статьи были основаны на асимптотическом анализе производных сложных функций, что явило нетривиальную задачу и привело к уточнениям оценок, анонсированных в предыдущей работе [5], и новым результатам.

Развитие и успешное применение предложенных приближений авторы связывают, с одной стороны, с поиском и анализом различных видов функции $\text{æ}(y)$. Разработанный метод можно модифицировать для приближения функций с большими градиентами в центре отрезка или с неизвестным положением градиента, а также для задач, где положение градиента меняется в процессе решения. С другой стороны, замены переменных $\text{æ}(y)$ можно применять для вывода барицентрических дробно-рациональных интерполяций, учитывающих положение и тип пограничного слоя (см. [14]).

Подводя итог проведенных исследований, отметим, что разработанные приближения в сочетании с методом коллокаций открывают значительные перспективы для решения краевых задач с ярко выраженными пограничными слоями. Применяя прямые произведения разложений вида (2.2) в квадрате или кубе, можно построить быстрые алгоритмы решения краевых задач для уравнений с частными производными, близкие по вычислительной сложности к экономичным схемам [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Задорин А.И.** Разностные схемы для задач с пограничным слоем. Омск: Изд-во ОмГУ, 2002. 113 с.
2. **Багаев Б.М., Шайдуров В.В.** Сеточные методы решения задач с пограничным слоем. Ч. 1. Новосибирск: Наука, 1998. 199 с.
3. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992. 232 р.

4. **Лисейкин В.Д., Лиханова Ю.В., Шокин Ю.И.** Разностные сетки и координатные преобразования для численного решения сингулярно возмущенных задач. Новосибирск: Наука, 2007. 311 с.
5. **Semisalov B.V., Kuzmin G.A.** Modification of Fourier approximation for solving boundary value problems having singularities of boundary layer type // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1839. P. 406–422. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1839/MIT2016-p36.pdf.
6. **Бабенко К.И.** О явлении насыщения в численном анализе // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 3. С. 505–508.
7. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
8. **Гавриков М.Б.** Методы без насыщения в вычислительной математике // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 075. 40 с. doi: 10.20948/prepr-2019-75.
9. **Jackson D.** On approximation by trigonometric sums and polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1912. Vol. 13. P. 491–515. doi: 10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2.
10. **Белых В.Н.** О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499.
11. **Бурбаки Н.** Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965. 424 с.
12. **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
13. **Trefethen L.N.** Approximation theory and approximation practice. Philadelphia: SIAM, 2013. 318 p.
14. **Baltensperger R., Berrut J.-P., Noël B.** Exponential convergence of a linear rational interpolant between transformed Chebyshev points // Math. Comp. 1999. Vol. 68, no. 227. P. 1109–1120. doi: 10.1090/S0025-5718-99-01070-4.
15. **Семисалов Б.В.** Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Журн. выч. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1110–1135. doi: 10.7868/S0044466914020136.

Поступила 14.01.2021
После доработки 19.04.2021
Принята к публикации 26.04.2021

Семисалов Борис Владимирович
канд. физ.-мат. наук, страший науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
доцент кафедры диф. уравнений механико-математического факультета
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: ViBiS@ngs.ru

Кузьмин Георгий Андреевич
аспирант
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
г. Новосибирск
e-mail: kubgeom@mail.ru

REFERENCES

1. Zadorin A.I. *Raznostnye skhemy dlya zadach s pogranichnym sloem* [Difference schemes for problems with a boundary layer]. Omsk: OmGU Publ., 2002, 113 p. ISBN: 5-7779-0313-4.
2. Bagayev B.M., Shaidurov V.V. *Setochnye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem* [Grid methods to solve problems with a boundary layer]. Part 1. Novosibirsk: Nauka Publ., 1998, 199 p. ISBN: 5-02-031309-2.
3. Shishkin G.I. *Setochnye approksimatsii singulyarno vozmushchennykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravnenii* [Grid approximations of singular-perturbed elliptic and parabolic equations]. Yekaterinburg: UrO RAN Publ., 1992, 232 p. ISBN: 5-7691-0159-8.

4. Liseikin V.D., Likhanova Yu.V., Shokin Yu.I. *Raznostnye setki i koordinatnye preobrazovaniya dlya chislennogo resheniya singulyarno vozmushchennykh zadach* [Difference grids and coordinate transformations for numerical solution of singular-perturbed problems]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2007, 311 p. ISBN: 978-5-02-023181-8 .
5. Semisalov B.V., Kuzmin G.A. Modification of Fourier approximation for solving boundary value problems having singularities of boundary layer type. In: *CEUR Workshop Proceedings*, 2017, vol. 1839, pp. 406–422. Available on: http://ceur-ws.org/Vol-1839/MIT2016-p36.pdf .
6. Babenko K.I. On the phenomenon of saturation in numerical analysis. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 241, no. 3, pp. 505–508 (in Russian).
7. Babenko K.I. *Osnovy chislennogo analiza* [Foundations of numerical analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1986, 744 p.
8. Gavrikov M.B. Methods without saturation in computational mathematics. *Keldysh Institute Preprints*, 2019, no. 075, 40 p. (in Russian). doi: 10.20948/prepr-2019-75 .
9. Jackson D. On approximation by trigonometric sums and polynomials. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1912, vol. 13, pp. 491–515. doi: 10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2 .
10. Belykh V.N. On the best approximation properties of C^∞-smooth functions on an interval of the real axis (to the phenomenon of unsaturated numerical methods). *Siberian Math. J.*, 2005, vol. 46, no. 3, pp. 373–385. doi: 10.1007/s11202-005-0040-z .
11. Bourbaki N. *Elements of mathematics: Functions of a real variable.* Berlin: Springer, 2004, 338 p. doi: 10.1007/978-3-642-59315-4 . Translated to Russian under the title *Funktsii deistvitel'nogo peremennogo.* Moscow: Nauka Publ., 1965, 424 p.
12. Dzyadyk V.K. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsii polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 511 p.
13. Trefethen L.N. *Approximation theory and approximation practice.* Philadelphia: SIAM, 2013, 318 p. ISBN: 978-1-611972-39-9 .
14. Baltensperger R., Berrut J.-P., Noël B. Exponential convergence of a linear rational interpolant between transformed Chebyshev points. *Math. Comput.*, 1999, vol. 68, no. 227, pp. 1109–1120. doi: 10.1090/S0025-5718-99-01070-4 .
15. Semisalov B.V. Non-local algorithm of finding solution to the Poisson equation and its applications. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2014, vol. 54, no. 7, pp. 1110–1135 (in Russian). doi: 10.7868/S0044466914020136 .

Received January 14, 2021
Revised April 19, 2021
Accepted April 26, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 20-71-00071).

Boris Vladimirovich Semisalov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics SB RAN, Novosibirsk, 630090 Russia; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: ViBiS@ngs.ru .

Georgy Andreevich Kuzmin, doctoral student, Sobolev Institute of Mathematics SB RAN, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: kubgeom@mail.ru .

Cite this article as: B. V. Semisalov, G. A. Kuzmin. On the question of approximation of smooth functions with boundary layer components, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 111–124 .