ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 517.51, 519.64

О СРАВНЕНИИ ОСТАТКОВ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ СИМПСОНА И КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРЕХТОЧЕЧНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯНТОВ

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

С использованием трех узлов $a, b, c = (a+b)/2$ и рациональных интерполянтов вида $\rho(x) = \alpha + \beta(x-c) + \gamma/(x-g)$ с полюсом g, определяемым узлами вне отрезка интегрирования $[a,b]$, построена квадратурная формула с положительными коэффициентами, погрешность которой меньше погрешности соответствующей квадратурной формулы Симпсона, если на отрезке $[a,b]$ подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(4)}(x)$, и выполняется неравенство $f^{(4)}(x)f''(x) > 0$.

Ключевые слова: рациональный интерполянт, квадратурная формула, формула Симпсона.

A.-R. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. Comparison of the remainders of the Simpson quadrature formula and the quadrature formula for three-point rational interpolants.

A quadrature formula with positive coefficients is constructed with the use of three nodes a, b, and $c = (a+b)/2$ and rational interpolants of the form $\rho(x) = \alpha + \beta(x-c) + \gamma/(x-g)$ with a pole g determined by nodes outside the integration interval $[a,b]$. The error of the constructed formula is smaller than the error of the corresponding Simpson quadrature formula if the integrand $f(x)$ has a continuous derivative $f^{(4)}(x)$ on the interval $[a,b]$ and the inequality $f^{(4)}(x)f''(x) > 0$ is satisfied.

Keywords: rational interpolant, quadrature formula, Simpson formula.

MSC: 97N50

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-102-110

Введение

Решения некоторых задач для дифференциальные уравнений сводятся к решению интегральных уравнений с использованием специальных кусочно-полиномиальных или кусочно-рациональных функций (см., например, [1–7] и цитированные в них источники). При этом для приближенного вычисления определенных интегралов с повышенными требованиями к погрешности в точках сетки узлов широко применяются трехточечные квадратурные формулы Симпсона. Поэтому, в частности, возникает задача приближенных квадратур с помощью трехточечных рациональных интерполянтов, обладающих хорошими аппроксимативными свойствами.

Общеизвестно также (см., например, [8–10]), что для повышения точности интегрирования данной функции $f(x)$ на некотором отрезке его делят на частичные отрезки и применяют базовую квадратурную формулу к каждой части отдельно. Таким путем получают составные квадратурные формулы для нахождения приближенного значения интеграла по всему отрезку. При этом по оценке погрешности базовой квадратурной формулы на частичных отрезках легко выясняется поведение погрешности составной квадратурной формулы на всем исходном отрезке.

Ниже для краткости остановимся на базовых квадратурных формулах по трехточечным рациональным интерполянтам, которые обладают достаточно хорошими аппроксимативными свойствами. При этом будем считать $[a,c]$ и $[c,b]$ соседними частичными отрезками равной длины $h = c - a = b - c > 0$, взятыми на некотором исходном отрезке.

Как будет показано, для одного достаточно массивного класса функций погрешность таких квадратурных формул меньше погрешности трехточечной квадратурной формулы Симпсона.

1. Построение квадратурной формулы

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a,b]$ и пусть $h = c - a = b - c$. Рассмотрим рациональную функцию вида ([11])

$$\rho(x) = \rho(x,f) = \alpha + \beta(x-c) + \frac{\gamma}{x-g}, \tag{1.1}$$

где коэффициенты α, β, γ получаются из условий интерполяции $\rho(a) = f(a)$, $\rho(c) = f(c)$, $\rho(b) = f(b)$, а полюс g определяется равенством $g = b + \lambda h$ при произвольном $\lambda > 0$.

Используя разделенные разности, из равенства (1.1) и условий интерполяции найдем

$$\begin{aligned} \alpha &= f(c) - f(a,c,b)(a-g)(b-g), \\ \beta &= f(a,b) + f(a,c,b)(c-g), \\ \gamma &= f(a,c,b)(a-g)(c-g)(b-g). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Тогда с учетом равенства $c - a = b - c$ получим значение интеграла

$$\int_a^b \rho(x)dx = \alpha(b-a) + \gamma \ln\frac{g-b}{g-a}. \tag{1.3}$$

Всюду ниже для краткости обозначим

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\Big(\ln\Big(1+\frac{2}{\lambda}\Big) - \frac{2}{\lambda+1}\Big) \tag{1.4}$$

и положим

$$A_1(\lambda) = A_3(\lambda) = \frac{1}{2}A(\lambda), \quad A_2(\lambda) = 1 - A(\lambda). \tag{1.5}$$

Используя эти обозначения и переходя в равенствах (1.2) от разделенных разностей к значениям самой функции $f(x)$, равенство (1.3) можно записать в виде

$$\int_a^b \rho(x)dx = (b-a)[A_1(\lambda)f(a) + A_2(\lambda)f(c) + A_3(\lambda)f(b)].$$

Следовательно, для любой определенной и интегрируемой на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и трех узлов a, b и $c = (a+b)/2$ при любом значении параметра $\lambda > 0$ имеет место следующая квадратурная формула:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)[A_1(\lambda)f(a) + A_2(\lambda)f(c) + A_3(\lambda)f(b)] + R(f) \tag{1.6}$$

с остатком $R(f) = \displaystyle\int_a^b [f(x) - \rho(x)]dx$ и коэффициентами $A_1(\lambda), A_2(\lambda), A_3(\lambda)$, для которых, очевидно, выполняется равенство $A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + A_3(\lambda) = 1$.

Приведем некоторые другие свойства коэффициентов формулы (1.6).

Свойство 1. Для всех значений параметра $\lambda > 0$ все три коэффициента $A_1(\lambda), A_2(\lambda), A_3(\lambda)$ строго положительны.

Доказательство. Действительно, для этого достаточно показать, что при всех $\lambda > 0$ для значений выражения $A(\lambda)$ из равенства (1.4) выполняется двойное неравенство $0 < A(\lambda) < 1$.

Неравенство $0 < A(\lambda)$ вытекает из неравенства $\ln\left(1+\frac{2}{\lambda}\right) > \frac{2}{\lambda+1}$, которое можно представить в виде $\ln\left(1+\frac{2}{\lambda}\right) > \frac{2/\lambda}{1+1/\lambda}$. Последнее неравенство при $t = 1/\lambda > 0$ следует из неравенства

$$\ln(1+2t) \geqslant \frac{2t}{1+t}, \tag{1.7}$$

справедливого для всех $t \geqslant 0$.

В самом деле, значения функций в левой и правой частях неравенства (1.7) в точке $t = 0$ совпадают между собой и равны нулю, а для производных от них при $t > 0$ выполняется строгое неравенство $\frac{d}{dt}\ln(1+2t) > \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t}\right)$.

Второе доказываемое неравенство $A(\lambda) < 1$ легко преобразуется к виду $\ln\left(1+\frac{2}{\lambda}\right) < \frac{2(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+2)}$. Если теперь, как и выше, ввести обозначение $t = 1/\lambda$, то снова получим неравенство

$$\ln(1+2t) \leqslant \frac{2t(1+t)}{1+2t}, \tag{1.8}$$

справедливое для всех $t \geqslant 0$.

Неравенство (1.8) доказывается вполне аналогично неравенству (1.7). □

Для значений параметра $\lambda > 2$ можно получить более точные оценки коэффициентов формулы (1.6), которые приводим в следующем свойстве.

Свойство 2. Для коэффициентов квадратурной формулы (1.6) при всех $\lambda > 2$ имеют место двойные неравенства

$$\frac{1}{6} - \frac{2}{3\lambda^2} < A_1(\lambda) = A_3(\lambda) < \frac{1}{6} + \frac{8}{15\lambda^2}, \quad \frac{2}{3} - \frac{16}{15\lambda^2} < A_2(\lambda) < \frac{2}{3} + \frac{4}{3\lambda^2}.$$

Доказательство. Свойство 2 вытекает из равенств (1.5) и двойного неравенства

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{3\lambda^2} < A(\lambda) < \frac{1}{3} + \frac{16}{15\lambda^2}, \tag{1.9}$$

справедливого для всех значений $\lambda > 2$.

Чтобы доказать (1.9), используя равенство (1.4), при $\lambda > 2$ получим

$$\frac{1}{\lambda(\lambda+2)}A(\lambda) = -1 + \frac{\lambda+1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\lambda}\right) = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k}\right)\left(\frac{2}{\lambda}\right)^k.$$

При $\lambda > 2$ абсолютные величины членов последнего ряда, монотонно убывая, стремятся к нулю. Сохранив только три его первых слагаемых, имеем $\frac{1}{\lambda(\lambda+2)}A(\lambda) < \frac{1}{3\lambda^2} - \frac{2}{3\lambda^3} + \frac{6}{5\lambda^4}$, а значит, $A(\lambda) < \frac{1}{3} + \frac{16}{15\lambda^2}$.

Для оценки $A(\lambda)$ снизу при $\lambda > 2$ возьмем два первых слагаемых ряда. Тогда $\frac{1}{\lambda(\lambda+2)}A(\lambda) > \frac{1}{3\lambda^2} - \frac{2}{3\lambda^3}$, откуда следует, что $A(\lambda) > \frac{1}{3} - \frac{4}{3\lambda^2}$.

Неравенство (1.9), а вместе с ним и свойство 2 доказаны. □

Как следует из свойства 2, при $\lambda \to +\infty$ коэффициенты $A_1(\lambda), A_2(\lambda), A_3(\lambda)$ квадратурной формулы (1.6) стремятся к соответствующим коэффициентам трехточечной квадратурной формулы Симпсона, а именно, $A_1(\lambda) = A_3(\lambda) \to 1/6,\ A_2(\lambda) \to 2/3$.

Поэтому для функций, к которым применима квадратурная формула Симпсона, за счет выбора параметра λ погрешность квадратурной формулы (1.6) всегда можно сделать сколь угодно близкой к погрешности квадратурной формулы Симпсона.

Более того, ниже выделяется множество функций и дается явное выражение остатка квадратурной формулы (1.6), которое показывает, что погрешность формулы (1.6) для всех функций, принадлежащих этому множеству, меньше погрешности соответствующей квадратурной формулы Симпсона.

Для краткости всюду ниже введем обозначения модуля непрерывности $\omega(\delta,\varphi) = \sup\{|\varphi(x)-\varphi(y)| : |x-y| \leqslant \delta; x,y \in [a,b]\}$ и равномерной нормы $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in [a,b]\}$ для функций $\varphi(x)$, непрерывных на данном отрезке $[a,b]$.

2. Основные результаты

Речь идет о точном значении остатка $R(f)$ формулы (1.6) для функций, имеющих непрерывную производную четвертого порядка на отрезке интегрирования $[a,b]$, и о сравнении $R(f)$ с остатком трехточечной квадратурной формулы Симпсона (см., например, [10, гл. V, § 3])

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\Big[\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(c) + \frac{1}{6}f(b)\Big] - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\theta), \tag{2.1}$$

где $c = (a+b)/2$, $h = (b-a)/2$, θ — некоторая точка из отрезка $[a,b]$.

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную четвертого порядка на отрезке $[a,b]$, то при любом значении параметра $\gamma \in \big(0, 2/(b-a)\big)$ остаток квадратурной формулы* (1.6) *определяется равенством*

$$R(f) = \Big[-\frac{1}{90}f^{(4)}(\theta) + \varphi(\gamma,h)f''(\tau)\Big]h^5, \tag{2.2}$$

где θ, τ — некоторые точки из отрезка $[a,b]$, $h = (b-a)/2$,

$$\varphi(\gamma,h) = \frac{2}{15}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^4\mu h^2, \tag{2.3}$$

$$\mu = \mu(\gamma,h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+5)(2k+7)}(h\gamma)^{2k}, \tag{2.4}$$

причем ввиду $0 < h\gamma < 1$ выполняется двойное неравенство $4/35 < \mu < 2/5$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ниже существенно используется полученное ранее авторами одно представление разности $f(x) - \rho(x)$ через интерполяционный полином второй степени (Оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 224–233). А именно, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует алгебраический полином $P_2(x)$ второй степени такой, что для узлов $a, b, c = (a+b)/2$ выполняются интерполяционные условия: $P_2(a) = f(a)$, $P_2(c) = f(c)$, $P_2(b) = f(b)$, и при этом для всех $x \in [a,b]$ и значения $g = b + \lambda h$ при любом $\lambda > 0$ справедливо равенство

$$f(x) - \rho(x) = f(x) - P_2(x) + f(a,c,b)\frac{(x-a)(x-c)(x-b)}{x-g}. \tag{2.5}$$

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную четвертого порядка на отрезке $[a,b]$. Тогда к функции $f(x)$ и узлам a, c, b можно применить приведенную выше формулу Симпсона (2.1), из которой в силу интерполяционных условий на полином $P_2(x)$ второй степени следует равенство

$$\int_a^b [f(x) - P_2(x)]dx = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\theta), \quad \text{где } \theta \text{ — некоторая точка из отрезка } [a,b].$$

Отсюда и из равенства (2.5) для остатка формулы (1.6) получим равенство

$$R(f) = \int\limits_a^b [f(x) - \rho(x)]dx = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\theta) + f(a,c,b)\cdot I(\lambda), \tag{2.6}$$

в котором разделенная разность $f(a,c,b)$ равна $(f''(\tau))/2$ при некотором $\tau \in [a,b]$, и для краткости обозначено $I(\lambda) = \int_a^b \frac{(x-a)(x-c)(x-b)}{x-g}dx$.

Для вычисления этого интеграла с выделением главной части относительно $\lambda \to +\infty$ заметим, что $g - c = (\lambda+1)h > |x-c|$ для любого $\lambda > 0$. Поэтому, преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$I(\lambda) = -\frac{1}{g-c}\int\limits_a^b \frac{(x-a)(x-c)(x-b)}{1-(x-c)/(g-c)}dx = -\sum_{k=0}^{\infty}(g-c)^{-k-1}\int\limits_a^b (x-a)(x-c)^{k+1}(x-b)dx.$$

Если учесть равенство $g - c = (\lambda+1)h$, то после замены переменной интегрирования имеем

$$I(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}(g-c)^{-k-1}\int\limits_{-h}^{h} t^{k+1}(t^2-h^2)dt$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} 2(g-c)^{-2k}\int\limits_0^h t^{2k}(t^2-h^2)dt = h^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)(2k+3)}\Big(\frac{1}{\lambda+1}\Big)^{2k}.$$

Отсюда, выделив первое слагаемое, для любого $\lambda > 0$ получим

$$I(\lambda) = \frac{4}{15}h^3\Big(\frac{1}{\lambda+1}\Big)^2 + h^3\Big(\frac{1}{\lambda+1}\Big)^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+5)(2k+7)}\Big(\frac{1}{\lambda+1}\Big)^{2k}. \tag{2.7}$$

Введем новую переменную γ такую, что при любом $\lambda > 0$ выполняется равенство $1/(\lambda+1) = h\gamma$. Тогда для

$$J(\gamma) = I\Big(\frac{1}{h\gamma} - 1\Big)$$

при любом значении γ, удовлетворяющем неравенству $0 < \gamma < 2/(b-a)$, в принятых выше обозначениях (2.3) и (2.4) получим

$$J(\gamma) = \frac{4}{15}h^5\gamma^2 + h^7\gamma^4\mu(\gamma,h),$$

$$J(\gamma) = 2\varphi(\gamma,h)h^5, \tag{2.8}$$

причем, так как $0 < h\gamma < 1$, имеем

$$\mu = \mu(\gamma,h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+5)(2k+7)}(h\gamma)^{2k} < 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+5)(2k+7)} = \frac{2}{5}$$

и, очевидно, $\mu > 4/35$.

Остается воспользоваться равенствами (2.6) и (2.8).

Теорема доказана.

Следствие. *Если на данном отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет непрерывную производную четвертого порядка и выполняется неравенство*

$$f^{(4)}(x)f''(x) > 0,$$

то существует число $\gamma_0 \in \big(0, 2/(b-a)\big)$ *такое, что для всех значений* $\gamma \in (0, \gamma_0)$ *погрешность из* (2.2) *квадратурной формулы* (1.6) *меньше, чем погрешность из* (2.1) *соответствующей квадратурной формулы Симпсона.*

Доказательство. Действительно, учитывая вид формулы (1.6) и вид равенств (2.1) и (2.2), достаточно считать, что производные $f^{(4)}(x)$ и $f''(x)$ положительны на отрезке $[a, b]$.

Тогда найдется значение $\gamma_0 \in \big(0,\, 2/(b-a)\big)$ такое, что при всех $\gamma \in (0, \gamma_0)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{90}\min\{f^{(4)}(x) : x \in [a, b]\} > \Big(\frac{2}{15}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^4\mu h^2\Big)\max\{f''(x) : x \in [a, b]\}.$$

Значит, при всех $\gamma \in (0, \gamma_0)$ для любой пары точек θ, τ из отрезка $[a, b]$ будет выполняться строгое неравенство

$$\Big|-\frac{1}{90}f^{(4)}(\theta) + \varphi(\gamma, h)f''(\tau)\Big| < \Big|-\frac{1}{90}f^{(4)}(\theta)\Big|.$$

Ввиду равенств (2.2) и (2.1) следствие доказано.

В дополнение к данному следствию можно выделить одно множество $F_{[a,b]}$ функций $f(x)$ с непрерывной на отрезке $[a, b]$ производной $f^{(4)}(x)$ и значения параметра $\lambda > 0$ такие, что погрешность квадратурной формулы (1.6) для каждой функции $f \in F_{[a,b]}$ строго меньше погрешности соответствующей квадратурной формулы Симпсона.

Действительно, пусть заданы положительные числа m_4 и M_2 и пусть множество $F_{[a,b]}$ состоит из всех функций $f(x)$ с непрерывной на отрезке $[a, b]$ производной $f^{(4)}(x)$ таких, что при $x \in [a, b]$ имеем

$$f^{(4)}(x)f''(x) > 0, \quad |f^{(4)}(x)| \geqslant m_4, \quad |f''(x)| \leqslant M_2.$$

Как и выше при доказательстве следствия, случай отрицательности производных сводится к случаю их положительности, поэтому будем считать, что $f^{(4)}(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ при $x \in [a, b]$.

Возьмем $\gamma_0 \in \big(0,\, 2/(b-a)\big)$ такое, что при всех $\gamma \in (0, \gamma_0)$ выполняется неравенство $m_4 > 90\varphi(\gamma, h)M_2$. Значит, для любых θ, τ из отрезка $[a, b]$ последовательно имеем

$$0 < \frac{1}{90}m_4 - \varphi(\gamma, h)M_2 \leqslant \frac{1}{90}f^{(4)}(\theta) - \varphi(\gamma, h)f''(\tau) < \frac{1}{90}f^{(4)}(\theta).$$

Последнее неравенство в данном случае означает, что погрешность формулы (1.6) меньше погрешности квадратурной формулы Симпсона.

Следовательно, для каждого $\gamma \in (0, \gamma_0)$ можем вычислить соответствующее значение параметра $\lambda = 1/(\gamma h) - 1$, которое однозначно определяет коэффициенты квадратурной формулы (1.6) для каждой функции множества $F_{[a,b]}$.

Оказывается, вопрос о выборе определенного значения параметра $\lambda > 0$ для построения квадратурной формулы (1.6) для некоторого нетривиального класса функций усложняется с уменьшением гладкости функций.

Рассмотрим этот вопрос в случае функций, имеющих непрерывную производную третьего порядка на отрезке интегрирования.

Как известно (см., например, [12, гл. VII, § 3]), для каждой функции $f(x)$ с непрерывной и строго монотонной на отрезке $[a, b]$ производной третьего порядка найдется некоторое число $\varepsilon = \varepsilon(f) \in (0, 1)$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\Big[\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(c) + \frac{1}{6}f(b)\Big] - \varepsilon\frac{1}{72}h^4[f'''(b) - f'''(a)]. \tag{2.9}$$

Тогда для остатка квадратурной формулы (1.6) по аналогии с приведенным выше доказательством теоремы вместо равенства (2.6) (в случае непрерывной и строго монотонной на отрезке $[a,b]$ производной $f'''(x)$) при некоторых $\varepsilon = \varepsilon(f) \in (0,1)$ и $\tau \in [a,b]$ получим равенство

$$R(f) = \int\limits_a^b \big[f(x) - \rho(x)\big]\,dx = -\varepsilon\frac{1}{72}h^4\big(f'''(b) - f'''(a)\big) + \frac{1}{2}f''(\tau)I(\lambda), \tag{2.10}$$

где $I(\lambda)$ для любого значения $\lambda > 0$ определяется равенством (2.7).

Введем на этот раз новую переменную δ такую, что при любом $\lambda > 0$ выполняется равенство $\big(1/(\lambda+1)\big)^2 = h\delta$. Тогда при любом $\lambda > 0$ имеем $0 < h\delta < 1$, $\delta \in \big(0,\, 2/(b-a)\big)$.

Значит, для всех $\delta \in \big(0,\, 2/(b-a)\big)$ из (2.7) вытекает равенство

$$J_1(\delta) = I\Big(\frac{1}{\sqrt{h\delta}} - 1\Big) = 2\varphi_1(\delta,h)h^4, \tag{2.11}$$

где обозначено

$$\varphi_1(\delta,h) = \frac{2}{15}\delta + \frac{1}{2}\delta^2\mu_1 h, \quad \mu_1 = \mu_1(\delta,h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+5)(2k+7)}(h\delta)^k,$$

причем $4/35 < \mu_1 < 2/5$.

Тогда из равенств (2.10) и (2.11) получим следующее выражение для остатка квадратурной формулы (1.6):

$$R(f) = \Big[-\frac{\varepsilon}{72}\big(f'''(b) - f'''(a)\big) + \varphi_1(\delta,h)f''(\tau)\Big]h^4. \tag{2.12}$$

Здесь $\tau \in [a,b]$, $\varepsilon = \varepsilon(f)$ — некоторое число из интервала $(0,1)$, которое соответствует данной функции $f(x)$, а δ — независимая переменная с областью определения $\big(0,\, 2/(b-a)\big)$, для которой $\varphi_1(\delta,h) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Следовательно, для каждой функции $f(x)$ с непрерывной и строго монотонной на отрезке $[a,b]$ производной $f'''(x)$ при выполнении на этом отрезке условия $(f'''(b) - f'''(a))f''(x) > 0$ погрешность из (2.12) формулы (1.6) меньше погрешности из (2.9) соответствующей формулы Симпсона для всех достаточно малых значений δ.

Однако не представляется возможным получить зависимость числа $\varepsilon = \varepsilon(f)$ от функции $f(x)$ в некоторой явной форме. В частности, остается открытым вопрос об условиях существования некоторого нетривиального класса трижды непрерывно дифференцируемых на данном отрезке функций, когда погрешность формулы (1.6) всегда меньше погрешности соответствующей квадратурной формулы Симпсона.

В заключение отметим, что для оценки погрешности квадратурной формулы (1.6) кроме равенства (2.5) можно использовать также приводимые далее равенства (см. [11]), которые получаются с применением общеизвестных свойств разделенных разностей.

Будем считать функцию $f(x)$ определенной на отрезке $[a,b]$ и придерживаться принятых выше обозначений: $c = (a+b)/2$, $h = (b-a)/2$, $g = b + \lambda h$ $\lambda > 0$, — любое.

Тогда для функции $f(x)$ и рациональной функции $\rho(x)$ из (1.1) при $x \in (a,b)$, $x \neq c$, выполняются следующие равенства:

$$f(x) - \rho(x) = \big[f(x,c) - f(a,c)\big](x-c) + \frac{\lambda}{2}\Big[f(c,b) - f(a,c)\Big]\frac{(x-a)(x-c)}{x-g};$$

$$f(x) - \rho(x) = \big[f(a,c,x) - f(a,c,b)\big](x-a)(x-c) + f(a,c,b)\frac{(x-a)(x-c)(x-b)}{x-g};$$

$$f(x) - \rho(x) = f(a,c,b,x)(x-a)(x-c)(x-b) + f(a,c,b)\frac{(x-a)(x-c)(x-b)}{x-g}.$$

Например, из первого и второго равенств можно получить следующие оценки погрешности квадратурной формулы (1.6) через модуль непрерывности соответствующей производной от интегрируемой функции:

1) если $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $|R(f)| \leqslant \dfrac{3}{2}h^2\omega(2h,f')$;

2) если $f''(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $|R(f)| \leqslant \dfrac{1}{2}h^3\omega(2h,f'') + \varphi(\gamma,h)\|f''\|h^5$,
где $\varphi(\gamma,h)$ определяется равенством (2.3) при $\lambda = 1/(h\gamma) - 1$ и $\gamma \in \big(0,\, 2/(b-a)\big)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
2. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
3. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн–функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
4. **Бердышев В. И., Субботин Ю. Н.** Численные методы приближения функций. Свердловск: Средне-Уральское кн. изд-во, 1979. 120 с.
5. **Арушанян И. О.** Применение метода квадратур для численного решения интегральных уравнений второго рода. М.: Изд-во ЦПИ мех.-мат. МГУ, 2018. 61 с.
6. **Edeo A., Gofeb G., Tefera T.** Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. 2015. Vol. 12, no. 1. pp. 110–122.
7. **Магомедова В. Г., Рамазанов А.-Р. К.** О приближенном решении дифференциальных уравнений с помощью рациональных сплайн-функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 4. С. 579–586. doi: 10.1134/S0044466919040112 .
8. **Никольский С. М.** Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988. 255 с.
9. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.** Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 632 с.
10. **Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.** Вычислительные методы. Т. 1. М.: Наука, 1976. 304 с.
11. **Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г.** Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электрон. мат. изв. 2017. Вып. 7. С. 16–28. doi: 10.31029/demr.7.2 .
12. **Хаусхолдер А. С.** Основы численного анализа. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 320 с.

Поступила 20.02.2021
После доработки 17.05.2021
Принята к публикации 15.06.2021

Рамазанов Абдул-Рашид Кехриманович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Дагестанский государственный университет;
главный науч. сотрудник
Дагестанский научный центр РАН
г. Махачкала
e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Магомедова Вазипат Гусеновна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры математического анализа
Дагестанский государственный университет
г. Махачкала
e-mail: vazipat@rambler.ru

REFERENCES

1. Ahlberg J., Nilson E., Walsh J. *The theory of splines and their applications.* TH: Acad. Press, 1967, 284 p. ISBN: 9781483222950. Translated to Russian under the title *Teoriya splainov i ee prilozheniya*, Moscow: Mir Publ., 1972, 316 p.
2. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splainy v vychislitel'noi matematike* [Splines in computational mathematics]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p.
3. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splain-funktsii* [Methods of spline-functions]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.
4. Berdyshev V.I., Subbotin Yu.N. *Chislennye metody priblizheniya funktsii* [Numerical methods for approximation of functions]. Sverdlovsk: Sredne-Ural'skoe Kn. Izd-vo, 1979, 120 p.
5. Arushanyan I.O. *Primenenie metoda kvadratur dlya chislennogo resheniya integral'nykh uravnenii vtorogo roda* [Application of the quadrature method for numerical solutions of integral equations of the second order]. Moscow: Izd-vo TsPI Mekh.-Mat. MGU, 2018, 61 p.
6. Edeo A., Gofeb G., Tefera T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences*, 2015, vol. 12, no. 1. pp. 110–122.
7. Magomedova V.G., Ramazanov A.-R.K. Approximate solution of differential equations with the help of rational spline functions. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 4, pp. 542–549. doi: 10.1134/S0965542519040110.
8. Nikolskiy S.M. *Kvadraturnie formuli* [Quadrature formulae]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 255 p. ISBN: 5-02-013786-3.
9. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow: Laboratoriya Bazovykh Znanii Publ., 2002, 632 p. ISBN: 5-93208-043-4.
10. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrnyi P.I. *Vychislitel'nye metody* [Computational methods]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1976, 304 p.
11. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines for three-point rational interpolants with autonomous poles. *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, no. 7, pp. 16–28 (in Russian). doi: 10.31029/demr.7.2.
12. Householder A.S. *Principles of numerical analysis.* NY; Toronto; London: McGRAW-HILL, 1953, 274 p. Translated to Russian under the title *Osnovy chislennogo analiza*, Moscow: Izd-vo Inostr. Lit-ry, 1956, 320 p.

Received February 20, 2021
Revised May 17, 2021
Accepted June 15, 2021

A.-R.K. Ramazanov, Dr. Phys.-Math., Prof., Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia; Dagestan Scientific Center RAN, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367025 Russia, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru.

V.G. Magomedova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia, e-mail: vazipat@rambler.ru.

Cite this article as: A.-R.K. Ramazanov, V. G. Magomedova. Comparison of the remainders of the Simpson quadrature formula and the quadrature formula for three-point rational interpolants, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 102–110.