ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 519.833

ОБ ОДНОМ ГИБРИДНОМ РАВНОВЕСИИ[1]

В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев

Для бескоалиционной игры N лиц предлагается понятие BN-гибридного равновесия. Предполагается, что каждый игрок принадлежит к одному из двух классов: к альтруистам или прагматично настроенным игрокам. Предполагается, что, выбирая свою стратегию, альтруистические игроки придерживаются концепции равновесия по Бержу, а остальные игроки используют концепцию равновесия по Нэшу. С помощью специальным образом сконструированной на основе функций выигрыша свертки Гермейера получены достаточные условия существования указанного равновесия. Для смешанного расширения игры доказывается теорема существования BN-гибридного равновесия при “стандартных” для математической теории игр ограничениях, а именно выпуклой компактности множеств стратегий игроков и непрерывности их функций выигрыша. Предложенное понятие распространяется на бескоалиционные игры N лиц при интервальной неопределенности. Приводится теорема существования сильно гарантированного BN-гибридного равновесия в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, равновесие по Бержу, неопределенность, свертка Гермейера.

V. I. Zhukovskiy, K. N. Kudryavtsev. On one hybrid equilibrium.

The notion of BN-hybrid equilibrium is proposed for a noncooperative N-person game. It is assumed that each player belongs to one of two classes: altruists and pragmatists. The altruists and the pragmatists choose their strategies using the concepts of the Berge equilibrium and the Nash equilibrium, respectively. Using a specially constructed Germeier convolution based on payoff functions, we obtain sufficient conditions for the existence of a BN-hybrid equilibrium. For an extension of the game with mixed strategies, a theorem on the existence of a BN-hybrid equilibrium is proved under constraints standard for mathematical game theory, namely, under the assumptions that the sets of the players' strategies are convex and compact and their payoff functions are continuous. The proposed concept is extended to noncooperative N-person games under interval uncertainty. An existence theorem is given for a strongly guaranteed N-hybrid equilibrium in mixed strategies.

Keywords: Nash equilibrium, Berge equilibrium, uncertainty, Germeier convolution.

MSC: 91A06, 91A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-71-86

Введение

Возникшая в 40-х годах прошлого века математическая теория игр имеет одно существенное отличие от многих других разделов математики. И это отличие кроется в понятии решения игровой задачи, вернее, в отсутствии единого мнения о том, что можно и нужно считать решением. Так, для бескоалиционных игр, а именно такие и рассматриваются в настоящей статье, можно насчитать около десятка различных концепций. При этом все они имеют свои плюсы и минусы, не позволяющие однозначно остановить свой выбор только на одной из них.

Наиболее широко распространенным понятием решения бескоалиционной игры является равновесие по Нэшу. Эта концепция была предложена в 1949 г. двадцатиоднолетним аспирантом Принстонского университета Джоном Нэшем [1;2] и впоследствии названа его именем. Данное решение нашло широкое применение в экономике, военном деле, политике, социологии, за что спустя 45 лет Д. Нэш совместно с Р. Зельтоном и Д. Харшаньи были удостоены Нобелевской премии “за фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр”. Дело в том, что ситуация равновесия по Нэшу устойчива к отклонению от нее отдельного

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740027.

(только одного) игрока, чем и обусловлено ее сверхудачное применение, особенно в экономике и политике.

Сейчас, открыв почти любой журнал по теории игр, системному анализу или исследованию операций, встречаешь статью, где фигурирует равновесие по Нэшу. Однако "и на солнце бывают пятна" — одним из недостатков равновесия по Нэшу является его "ярко выраженный эгоистический характер", отвечающий стремлению участника конфликта увеличить лишь свой выигрыш.

Антиподом равновесия по Нэшу является равновесие по Бержу, где каждый направляет все усилия, чтобы увеличить выигрыши остальных, "забывая порой о себе", о своих собственных интересах. В качестве возможного решения бескоалиционной игры равновесие по Бержу было формализовано [3] В. И. Жуковским в 1985 г. при критическом разборе книги французского математика Клода Бержа "Théorie générale des jeux a n personnes" [4], изданной в Париже в 1957 г. (отсюда и название "равновесие по Бержу"). Затем в 1995 г. Константин Семенович Вайсман — тогда аспирант В. И. Жуковского — защитил кандидатскую диссертацию "Равновесие по Бержу" [5] в Санкт-Петербургском университете на факультете прикладной математики и процессов управления. Эта диссертация и первые статьи К. С. Вайсмана [6–11] вызвали интерес вначале в России, а уже затем у наших заграничных коллег. К настоящему времени число публикаций, рассматривающих равновесие по Бержу, далеко перевалило за 300. Отметим, что равновесие по Бержу, ставящее во главу угла альтруизм, является "хорошей" математической моделью Золотого правила нравственности [12] (которое гласит: "относись к людям так, как бы ты хотел, чтобы они относились к тебе").

Стоит отметить, что обе упомянутые концепции, с одной стороны, могут применяться при моделировании сложных социально-экономических процессов. С другой стороны, агенты (игроки) в сложных социальных системах, как правило, не являются однородными. Часть из них может проявлять альтруистические мотивы, придерживаясь равновесия по Бержу, в то время как остальные будут стремиться достичь своих личных целей, прибегая к равновесию по Нэшу. В указанной ситуации возможно использование гибридного равновесия, одновременно учитывающего предпочтения всех игроков. Такое решение, предлагаемое в настоящей статье, будем называть *BN-гибридным равновесием* ($BNHE$).

Работа изложена следующим образом. В разд. 1 для бескоалиционной игры N лиц формализуется понятие $BNHE$ и рассматривается модельный пример построения такого равновесия. Второй раздел посвящен достаточным условиям существования $BNHE$, сводящимся к существованию седловой точки у специальным образом сконструированной свертки Гермейера. В разд. 3 при "обычных" для теории игр ограничениях доказывается существование $BNHE$ в смешанных стратегиях. Статья заканчивается переносом (в разд. 4) этих результатов на игры в нормальной форме при стратегической неопределенности. Дело в том, что учет неопределенностей при моделировании реальных конфликтов позволяет получать более адекватные результаты, что подтверждается, например, большим числом публикаций (более 1 млн работ в Google Shcolar по запросу "mathematical modelling under uncertainty").

1. Формализация BN-гибридного равновесия

Рассматривается математическая модель конфликта с N участниками, представленная в виде нормальной формы бескоалиционной игры N лиц. Указанная игра задается кортежем

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle.$$

В Γ множество игроков $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$, игрок i ассоциируется с порядковым номером $i \in \mathbb{N}$; каждый игрок i выбирает и использует свою *стратегию* $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, в результате чего образуется *ситуация*

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \subset \mathbb{R}^n \quad (n = \sum_{i\in\mathbb{N}} n_i);$$

на множестве ситуаций X определена *функция выигрыша* каждого i-го игрока $f_i(x)$, значение которой называется *выигрышем*. На содержательном уровне цель i-го игрока — за счет выбора стратегии x_i по возможности *увеличить* свой выигрыш.

Решение игры Г будем определять парой $(x^*, f(x^*) = f_1(x^*), \ldots, f_N(x^*)) \in X \times \mathbb{R}^N$, где компоненты ситуации $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*) \in X_1 \times \ldots \times X_N = X$ определяются выбранным принципом оптимальности, а координаты вектора $f(x^*)$ задают выигрыши игроков при использовании ими своих компонентов из n-вектора x^* (в качестве стратегий). Несмотря на то что второй компонент пары $(x^*, f(x^*))$ однозначно определяется по первому, будем понимать под решением именно пару. Такой подход при рассмотрении в разд. 4 игр при неопределенности позволит определить решение как пару: ситуация и получаемая игроком гарантия, формируемая выбранной ситуацией.

В случае выбора частью игроков одного принципа оптимальности, а остальными – другого получившиеся решения называют *гибридными*. При определении BN-гибридного равновесия используем два принципа оптимальности: равновесие по Нэшу [1] и равновесие по Бержу [3]. При этом используем "привычное" для теории бескоалиционных игр обозначение $(x\|z_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$.

Определение 1. Ситуация $x^e = (x_1^e, \ldots, x_i^e, \ldots, x_N^e) \in X$ называется равновесной по Нэшу в игре Г, если

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x^e\|x_i) = f_i(x^e) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{1.1}$$

Определение 2. Ситуация $x^B = (x_1^B, \ldots, x_i^B, \ldots, x_N^B) \in X$ называется равновесной по Бержу в Г, если

$$\max_{x \in X} f_i(x\|x_i^B) = f_i(x^B) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{1.2}$$

Ниже будем предполагать, что все игроки в игре Г разделены на две части. Однако не будем называть рассматриваемые части коалициями, поскольку это подразумевало бы сотрудничество и кооперацию внутри указанных частей.

Итак, считаем что множество игроков $\mathbb{N}$ в Г разделено на два непустых подмножества. Первое подмножество, обозначенное как $\mathbb{B}$, включает в себя игроков, следующих в своих решениях Золотому правилу нравственности (которое гласит: "Относись к людям так, как бы ты хотел, чтобы они относились к тебе"). Игроки этого множества, выбирая свою стратегию, придерживаются концепции равновесия по Бержу. Игроки, не входящие в множество $\mathbb{B}$ и соответственно образующие множество $\mathbb{N}\backslash\mathbb{B}$, придерживаются концепции равновесия по Нэшу, отражающей их стремление к максимизации своего собственного выигрыша.

Такая ситуация возможна в обществе, где часть его членов – убежденные альтруисты, они и образуют множество $\mathbb{B}$, а остальные члены общества, ставящие во главу угла лишь себя, формируют множество $\mathbb{N}\backslash\mathbb{B}$.

Еще одним примером, в котором естественным образом для динамической постановки задачи возникает предлагаемое разделение на альтруистов и эгоистов, является задача преодоления системы противовоздушной обороны. Здесь стая дронов (множество $\mathbb{N}$), состоящая из аппаратов двух видов, атакует группу целей. Машины первого типа — это ударные дроны (подмножество $\mathbb{N}\backslash\mathbb{B}$), каждый из которых запрограммирован на поражение своей цели. Второй вид аппаратов — дроны сопровождения (образующие множество $\mathbb{B}$) — также запрограммированы на поражение целей, однако в рамках задачи всей группы эти цели второстепенны. Первоначально стратегия каждого дрона, независимо от его вида, определяется исходя из концепции равновесия по Нэшу. В момент попадания стаи в зону действия средств противовоздушной обороны дроны сопровождения (подмножество $\mathbb{B}$) переключаются на концепцию равновесия по Бержу, при этом каждый из них действует, пытаясь максимально защитить все остальные машины. Такое поведение увеличивает шансы аппаратов ударной группы на поражение цели. Затем, покинув зону действия систем противовоздушной обороны, вся группа вновь обращается к концепции равновесия по Нэшу.

Ниже через $x_{\mathbb{B}}$ будем обозначать набор стратегий x_i всех игроков i, входящих в множество $\mathbb{B}$, а именно
$$x_{\mathbb{B}} \in X_{\mathbb{B}} = \prod_{k\in\mathbb{B}} X_k.$$
Для $j \in \mathbb{N}\backslash\mathbb{B}$ набор, составленный из стратегий x_i всех игроков $i \in \mathbb{B}$ и стратегии x_j игрока j, обозначим через $x_{\mathbb{B}+j}$, а все множество таких наборов — через
$$X_{\mathbb{B}+j} = \prod_{k\in\mathbb{B}} X_k \times X_j.$$
Наконец, для каждого игрока $i \in \mathbb{B}$ через $x_{\mathbb{B}-i}$ будет обозначаться набор стратегий $x_{\mathbb{B}} \in X_{\mathbb{B}}$ с исключенной из него стратегией x_i игрока i, т. е.
$$x_{\mathbb{B}-i} \in X_{\mathbb{B}-i} = \prod_{k\in\mathbb{B}\backslash\{i\}} X_k.$$

Далее при $\mathbb{P} = \mathbb{B}$, $\mathbb{B} - i$ или $\mathbb{B} + j$ через $(x\|z_{\mathbb{P}})$ будет обозначаться ситуация $x \in X$, в которой стратегии всех игроков, входящих в подмножество $\mathbb{P}$, заменены на их стратегии, взятые из набора $z_{\mathbb{P}}$, сформированного на основе ситуации $z \in X$. Будем использовать также обозначение $N_{\mathbb{B}}$ для количества игроков, входящих в множество $\mathbb{B}$.

В следующем определении, которое является центральным в настоящей статье, в качестве решения игры Γ рассматривается не ситуация равновесия, а пара: ситуация x^* и доставляемые ею выигрыши $f(x^*)$.

Определение 3. Пару $(x^*, f(x^*))$ назовем BN-гибридным равновесием ($BNHE$) игры Γ, если для всех $x \in X$ выполнены условия
$$\begin{aligned} \max_{x\in X} f_i(x^*\|x_{\mathbb{B}-i}) &= f_i(x^*) \quad (i \in \mathbb{B}),\\ \max_{x\in X} f_j(x^*\|x_{\mathbb{B}+j}) &= f_j(x^*) \quad (j \in \mathbb{N}\backslash\mathbb{B}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Отметим, что первое условие из (1.3) означает, что в $BNHE$ функцию выигрыша каждого игрока i, входящего в множество $\mathbb{B}$, максимизируют все игроки этого множества, за исключением самого игрока i. Смысл второго условия в (1.3) заключается в том, что для каждого игрока, не входящего в множество $\mathbb{B}$, его функция выигрыша максимизируется как им самим, так и всеми игроками множества $\mathbb{B}$.

Замечание 1. Равенства (1.3) означают, что $BNHE$ устойчиво как по отношению к отклонению от него отдельного, не входящего в подмножество альтруистически настроенных игроков $\mathbb{B}$ игрока, так и по отношению к отклонению от него всех игроков, входящих в подмножество $\mathbb{B}$.

Замечание 2. Как следует из определения 3, в том случае, когда подмножество $\mathbb{B}$ состоит только из одного игрока i, первое условие в (1.3) отсутствует. В этом случае значение функции $f_i(x)$ при построении $BNHE$ никак не учитывается.

Замечание 3. Если ровно один игрок j из множества $\mathbb{N}$ всех игроков игры Γ не входит в подмножество альтруистически настроенных игроков $\mathbb{B}$, то для построения $BNHE$ достаточно, *во-первых*, найти ситуацию $x^* \in X$ из условия
$$\max_{x\in X} f_j(x) = f_j(x^*), \tag{1.4}$$
во-вторых, проверить для каждого $i \in \mathbb{B}$ и ситуации x^* справедливость равенства
$$\max_{x\in X} f_i(x^*\|x_{\mathbb{B}-i}) = f_i(x^*). \tag{1.5}$$

Ситуация x^*, полученная из (1.4) и удовлетворяющая (1.5) при всех $i \in \mathbb{B}$, как раз и формирует $BNHE$ $(x^*, f(x^*))$. Указанный подход может быть продемонстрирован на следующем примере.

П р и м е р. Рассмотрим игру Брайанта [13], в которой принимают участие три игрока, при этом игроки 1 и 2 образуют множество $\mathbb{B}$ альтруистически настроенных игроков. Стратегия каждого игрока i состоит в выборе действительного числа от 0 до 5, т. е. $x_i \in [0,5]$ $(i = 1,2,3)$. На множестве $X = [0,5]\times[0,5]\times[0,5]$ ситуаций $x = (x_1, x_2, x_3)$ определены функции выигрыша игроков

$$f_i(x) = 2\min\{x_1, x_2, x_3\} - x_i \quad (i = 1,2,3).$$

Отметим, что множество ситуаций равновесия по Нэшу в этой игре имеет вид [13]

$$X^e = \{x^e = (\lambda, \lambda, \lambda) \mid \forall\lambda \in [0,5]\},$$

ровно такой же вид принимает и множество ситуаций равновесия по Бержу.

Следуя предложенному в замечании 3 способу, *во-первых*, найдем ситуацию x^* из условия

$$\max_{x\in X} f_3(x) = f_3(x^*).$$

Легко заметить, что максимальное значение функции $f_3(x) = 2\min\{x_1, x_2, x_3\} - x_3$ на множестве ситуаций X достигается только при $x^* = (5,5,5)$.

Во-вторых, убедимся в справедливости условий (1.5) для $i \in \{1,2\}$ и $x^* = (5,5,5)$, а именно в том, что максимального при $x_1, x_2 \in [0,5]$ значения функции

$$f_1(5, x_2, 5) = 2\min\{5, x_2\} - 5 = 2x_2 - 5 \quad \text{и} \quad f_2(x_1, 5, 5) = 2\min\{x_1, 5\} - 5 = 2x_1 - 5$$

достигают при $x_2^* = 5$ и $x_1^* = 5$ соответственно.

Таким образом $BNHE$ образуют ситуация равновесия $x^* = (5,5,5)$ и равновесные выигрыши $f(x^*) = (5,5,5)$. Стоит отметить, что для игры Брайанта $BNHE$ будет, во-первых, удовлетворять условию коллективной рациональности и, во-вторых, являться одновременно и Парето-оптимальным равновесием по Нэшу.

2. Достаточные условия

Достаточные условия существования $BNHE$ строим с помощью подхода, предложенного в статье [14] и применявшегося в [15; 16]. Для этого введем N-вектор $z = (z_1, \ldots, z_N) \in X$ и гермейеровскую свертку [17; 18], где $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned} \varphi_i(x,z) &= f_i(z\|x_{\mathbb{B}-i}) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{B}), \\ \varphi_j(x,z) &= f_j(z\|x_{\mathbb{B}+j}) - f_j(z) \quad (i \in \mathbb{N}\setminus\mathbb{B}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\psi(x,z) = \max_{r=1,\ldots,N} \varphi_r(x,z). \tag{2.2}$$

Седловая точка $(x^0, z^*) \in X \times X$ скалярной функции $\psi(x,z)$ из (2.1),(2.2) определяется цепочкой неравенств

$$\psi(x, z^*) \le \psi(x^0, z^*) \le \psi(x^0, z) \quad \forall x \in X, \quad z \in X. \tag{2.3}$$

Теорема 1. *Если в антагонистической игре*

$$\Gamma_a = \langle X, Z = X, \psi(x,z)\rangle$$

удалось найти седловую точку (x^0, z^*) *из* (2.3), *то максиминная стратегия* $z^* \in X$ *является* $BNHE$ *игры* Γ.

Доказательство. Если в (2.3) положить $z = x^0$, то из (2.1) и (2.2) следует $\psi(x^0, x^0) = 0$, отсюда (по транзитивности) получаем

$$\psi(x, z^*) \leq 0 \quad \forall x \in X.$$

Тогда в силу $\max\limits_{r=1,\dots,N} \varphi_r(x, z^*) \leq 0 \; \forall x \in X$ и (2.1) приходим к выполнению N неравенств

$$\begin{aligned} f_i(z \| x_{\mathbb{B}-i}) &\leqslant f_i(z) \quad (i \in \mathbb{B}) \quad \forall x_{\mathbb{B}-i} \in X_{\mathbb{B}-i}, \\ f_j(z \| x_{\mathbb{B}+j}) &\leqslant f_j(z) \quad (i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{B}) \quad \forall x_{\mathbb{B}+j} \in X_{\mathbb{B}+j}, \end{aligned}$$

Первые $N_{\mathbb{B}}$ из этих неравенств в силу (2.1) означают справедливость первого условия в (1.3) для ситуации $z^* \in X$ в игре Γ, вторая группа, состоящая из $N - N_{\mathbb{B}}$ неравенств, реализует для ситуации z^* второе условие из (1.3). □

Замечание 4. Согласно теореме 1 построение $BNHE$ x^* сводится к нахождению седловой точки (x^0, z^*) гермейеровской свертки $\psi(x, z)$ из (2.1),(2.2). А именно, мы получили следующий *конструктивный способ* построения $BNHE$ игры Γ:

во-первых, задать непустое подмножество $\mathbb{B}$ игроков, использующих альтруистическую модель поведения;

во-вторых, определить по формулам (2.1), (2.2) скалярную функцию $\psi(x, z)$;

в-третьих, найти седловую точку (x^0, z^*) функции $\psi(x, z)$ (удовлетворяющую цепочке неравенств (2.3));

в-четвертых, построить значения N скалярных функций $f_i(z^*)$ $(i \in \mathbb{N})$.

Тогда пара $(z^*, f(z^*) = (f_1(z^*), \dots, f_N(z^*))$ как раз и образует $BNHE$ (BN-гибридное равновесие) игры Γ: каждому игроку $i \in \mathbb{N}$ следует использовать свою стратегию z_i^* из ситуации z^*, обеспечивая тем самым себе выигрыш $f_i(z^*)$.

Замечание 5. Вся сложность построения $BNHE$ игры Γ посредством алгоритма, предложенного в замечании 4, “прячется” в нахождении седловой точки (x^0, z^*) из (2.3) гермейеровской свертки $\psi(x, z)$ из (2.1), (2.2). Дело в том, что операция взятия максимума от конечного числа функций $\varphi_r(x, z)$ $(r = 1, \dots, N)$ хотя и сохраняет [19, с. 54] непрерывность на произведении компактов $X \times Z$, но “портит” дифференцируемость $\varphi_r(x, z)$, а также вогнутость (выпуклость) $\varphi_r(x, z)$. Здесь возникает ситуация, о которой французский математик Ш. Эрмит (1822—1901) писал: “Я с дрожью ужаса отворачиваюсь от ваших несчастных проклятых функций, у которых нет производных”[2]. Итак, возникает задача построения конструктивных численных методов нахождения седловой точки (x^0, z^*) гермейеровской свертки $\max\limits_{r=1,\dots,N} \varphi_r(x, z)$, которая еще ждет своего решения.

3. Существование $BNHE$ в смешанных стратегиях

В этом разделе, следуя подходу Эмиля Бореля [20], Джона фон Неймана [21], Джона Нэша [2] и их последователей, расширим множество X_i чистых стратегий x_i до смешанных. Затем установим существование (соответствующим образом формализованных в смешанных стратегиях) ситуаций игры Γ, отвечающих требованиям BN-гибридной равновесности.

Обозначим через $\operatorname{cocomp} \mathbb{R}^{n_i}$ множество всех выпуклых компактов (выпуклых, замкнутых и ограниченных подмножеств евклидова n_i-мерного пространства $\mathbb{R}^{n_i}$), а непрерывность на X скалярной функции $f_i(x)$ — через $f_i(\cdot) \in C(X)$.

Рассматриваем снова игру без побочных платежей Γ. Предполагаем в данном разделе, что для элементов кортежа Γ выполнены требования

$$X_i \in \operatorname{cocomp} \mathbb{R}^{n_i}, \quad f_i(\cdot) \in C(X) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{3.1}$$

[2]Н. Бурбаки Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

Рассмотрим теперь игру N лиц Γ и на каждом компакте $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ($i \in \mathbb{N}$) построим борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(X_i)$ — множество подмножеств X_i таких, что $X_i \in \mathfrak{B}(X_i)$, причем $\mathfrak{B}(X_i)$ замкнута относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из $\mathfrak{B}(X_i)$; кроме того, $\mathfrak{B}(X_i)$ является минимальной σ-алгеброй, которая содержит все замкнутые подмножества компакта X_i.

Итак, построим борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(X_i)$ на каждом из компактов X_i ($i \in \mathbb{N}$) и борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(X)$ для множества ситуаций $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, предполагая, что $\mathfrak{B}(X)$ содержит все декартовы произведения элементов борелевских σ-алгебр $\mathfrak{B}(X_i)$ ($i \in \mathbb{N}$).

Согласно математической теории игр *смешанную стратегию* $\nu_i(\cdot)$ i-го игрока будем отождествлять с *вероятностной мерой на компакте* X_i. По определению [22, с. 271] и обозначениям [23, с. 284] вероятностная мера есть *неотрицательная* скалярная функция $\nu_i(\cdot)$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(X_i)$ подмножеств компакта $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ и удовлетворяющая двум условиям:

1) $\nu_i\bigl(\bigcup\limits_k Q_k^{(i)}\bigr) = \bigcup\limits_k \nu_i\bigl(Q_k^{(i)}\bigr)$ для любой последовательности $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{B}(X_i)$ (свойство *счетной аддитивности* функции $\nu_i(\cdot)$);

2) $\nu_i(X_i) = 1$ (*свойство нормированности*) и поэтому $\nu_i\left(Q^{(i)}\right) \le 1$ для всех $Q^{(i)} \in \mathfrak{B}(X_i)$.

Обозначим через $\{\nu_i\}$ множество смешанных стратегий i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$).

Отметим также, что меры-произведения $\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\dots\nu_N(dx_N)$, понимаемые в соответствии с известными определениями из [22, с. 370] (и обозначениями из [23, с. 123]), являются вероятностными мерами на множестве ситуаций X. Множество таких вероятностных мер (ситуаций) обозначим через $\{\nu\}$. Заметим еще раз, что при построении меры-произведения $\nu(dx)$ в качестве σ-алгебры подмножеств множества $X_1 \times \ldots \times X_N = X$ выбирается *наименьшая* σ-алгебра $\mathfrak{B}(X)$, содержащая все декартовы произведения $Q^{(1)} \times \ldots \times Q^{(N)}$, где $Q^{(i)} \in \mathfrak{B}(X_i)$ ($i \in \mathbb{N}$). Из известных свойств вероятностных мер [22, с. 254] вытекает, что множества всех возможных мер $\nu_i(dx_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) и $\nu(dx)$ являются *слабо замкнутыми* и *слабо компактными в себе* [22, с. 212, 254]. Это означает, например, для $\{\nu\}$, что из всякой бесконечной последовательности $\{\nu^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) можно выделить подпоследовательность $\{\nu^{(k_j)}\}$ ($j = 1, 2, \ldots$), которая будет *сходится слабо* к мере $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. Иначе говоря, для любой непрерывной на X скалярной функции $\psi(x)$ будет

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_X \psi(x)\nu^{(k_j)}(dx) = \int\limits_X \psi(x)\nu^{(0)}(dx)$$

и $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. С учетом непрерывности $\psi(x)$ интегралы $\int_X \psi(x)\nu(dx)$ (математические ожидания) определены; по теореме Фубини

$$\int\limits_X \varphi(x)\nu(dx) = \int\limits_{X_1} \ldots \int\limits_{X_N} \varphi(x)\nu_N(dx_N)\ldots\nu_1(dx_1),$$

причем порядок интегрирования можно менять местами.

Игре Γ в чистых стратегиях поставим в соответствие ее *смешанное расширение*

$$\widetilde{\Gamma} = \left\langle \mathbb{N}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \left\{ f_i[\nu] = \int\limits_X f[x]\nu(dx) \right\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle, \tag{3.2}$$

где, как и в Γ, $\mathbb{N}$ есть множество порядковых номеров игроков, а $\{\nu_i\}$ — множество смешанных стратегий $\nu_i(\cdot)$ игрока i; в игре (3.1) каждый из участников конфликта $i \in \mathbb{N}$ выбирает свою смешанную стратегию $\nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\}$, в результате образуется ситуация в смешанных стратегиях $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$; на множестве $\{\nu\}$ определена функция выигрыша каждого i-го игрока (математическое ожидание)

$$f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx).$$

Для игры (3.2) аналогом понятия $BNHE$ ситуации x^*, т. е. удовлетворяющей требованиям определения 3, будет

О п р е д е л е н и е 4. Ситуацию в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ назовем BN-гибридно-равновесной в смешанном расширении игры (3.2) (или BN-гибридной равновесной ситуацией в смешанных стратегиях для игры Γ), если,

во-первых, ситуация $\nu^*(\cdot)$ удовлетворяет условиям

$$\max_{\nu(\cdot)\in\{\nu\}} f_i(\nu^* \| \nu_{\mathbb{B}-i}) = f_i(\nu^*) \ \ (i \in \mathbb{B}); \tag{3.3}$$

во-вторых, для ситуации $\nu^*(\cdot)$ справедливы равенства

$$\max_{\nu(\cdot)\in\{\nu\}} f_j(\nu^* \| \nu_{\mathbb{B}+j}) = f_j(\nu^*) \ \ (j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{B}). \tag{3.4}$$

Здесь и далее

$$\nu_{\mathbb{B}-i}(dx_{\mathbb{B}-i}) = \prod_{k\in\mathbb{B}\setminus\{i\}} \nu_k(dx_k),$$

$$(\nu^* \| \nu_{\mathbb{B}-i}) = \prod_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{B}} \nu_k^*(dx_k)\, \nu_i^*(dx_i) \prod_{j\in\mathbb{B}\setminus\{i\}} \nu_j(dx_j),$$

$$(\nu^* \| \nu_{\mathbb{B}+j}) = \prod_{k\in\mathbb{N}\setminus(\mathbb{B}\cup\{j\})} \nu_k^*(dx_k)\, \nu_j(dx_j) \prod_{l\in\mathbb{B}} \nu_l(dx_l),$$

$$\nu^*(dx) = \nu_1^*(dx_1) \ldots \nu_N^*(dx_N);$$

кроме того, обозначаем далее через $\{\nu^*\}$ множество всех BN-гибридно-равновесных ситуаций $\nu^*(\cdot)$, т. е. множество $\nu^*(\cdot)$, удовлетворяющих равенствам (3.3) и (3.4).

Перейдем к ряду утверждений, используемых в доказательстве существования $BNHE$ в смешанных стратегиях.

Утверждение 1. *Пусть в игре* Γ *имеют место условия* (3.1) (*т. е. множества* X_i *суть компакты, а* $f_i(x)$ *непрерывны на* X).

Тогда множество $\{\nu^*\}$ BN*-гибридно-равновесных ситуаций* $\nu^*(\cdot)$ *смешанного расширения* $\widetilde{\Gamma}$ *игры* Γ *будет слабо компактным в себе подмножеством множества ситуаций* $\{\nu\}$ *игры* Γ (*хотя* $\{\nu^*\}$ *может быть и пустым*).

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 1 может быть проведено по схеме из [12, с. 88–91]. □

Следствие 1. *При выполнении условий* (3.1) *в критериальном* N*-мерном евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^N$ (*где* $f = (f_1, \ldots, f_N)$) *множество*

$$f(\{\nu^*\}) = \bigcup_{\nu(\cdot)\in\{\nu^*\}} f(\nu)$$

является компактом (*т. е. замкнуто и ограничено в* $\mathbb{R}^N$).

Заметим, что далее в теореме 2 доказана импликация (центральный результат настоящей статьи): условия (3.1) $\Rightarrow \{\nu^*\} \neq \varnothing$.

Утверждение 2. *Если в игре* (3.2) *выполнены ограничения* (3.1), *то для функции* $\varphi_r(x,z)$ *из*

$$\psi(x,z) = \max_{r=1,\ldots,N} \varphi_r(x,z), \tag{3.5}$$

где $\varphi_r(x,z)$ *определены в* (2.1), *имеет место неравенство*

$$\max_{r=1,\ldots,N} \int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \leqslant \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\ldots,N} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \tag{3.6}$$

при любых $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$.

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 2.9.2 из [12, с. 87]. □

Замечание 6. Фактически (3.6) является обобщением известного свойства операции взятия максимума: максимум суммы не больше суммы максимумов.

Перейдем к существенно используемому в доказательстве теоремы 2 факту из теории исследования операций. Рассмотрим N скалярных функций $\varphi_r(x,z)$ $(r = 1,\ldots,N)$, где, напомним, $z = (z_1,\ldots,z_N) \in Z = X$ и $\varphi_j(x,z)$ $(j = 1,\ldots,N)$ определены в (2.1).

Утверждение 3. *Если N скалярных функций $\varphi_j(x,z)$ $(j = 1,\ldots,N)$ непрерывны на произведении компактов $X \times (Z = X)$, то функция*

$$\psi(x,z) = \max_{j=1,\ldots,N} \varphi_j(x,z)$$

также непрерывна на $X \times Z$.

Доказательство даже более общего результата имеется во многих учебных пособиях по исследованию операций, например, в [24]. □

Наконец перейдем к центральному результату настоящего раздела статьи — докажем (при выполнении (3.1)) существование $BNHE$ в смешанных стратегиях.

Теорема 2. *Если в игре Γ множества $X_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(X)$, то в этой игре существует $BNHE$ в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру

$$\Gamma^a = \langle \{1,2\}, \{X, Z = X\}, \psi(x,z) \rangle.$$

В игре Γ^a множество X стратегий x первого (максимизирующего $\psi(x,z)$) игрока совпадает с множеством ситуаций игры Γ, множество Z стратегий z второго (минимизирующего $\psi(x,z)$) совпадает с тем же X. Одним из решений Γ^a является *седловая точка* $(x^0, z^B) \in X \times X$; именно для нее при всех $x \in X$ и каждом $z \in X$ имеет место цепочка неравенств

$$\psi(x, z^B) \le \psi(x^0, z^B) \le \psi(x^0, z).$$

Теперь игре Γ^a поставим в соответствие ее смешанное расширение

$$\widetilde{\Gamma}^a = \langle \{1,2\}, \{\mu\}, \{\nu\}, \psi(\mu,\nu) \rangle,$$

где $\{\nu\}$ — множество смешанных стратегий $\nu(\cdot)$ второго, а $\{\mu\} = \{\nu\}$ — множество смешанных стратегий $\mu(\cdot)$ первого игрока, функция выигрыша первого (математическое ожидание)

$$\psi(\mu,\nu) = \int\limits_{X\times X} \psi(x,z)\mu(dx)\nu(dz).$$

Решением игры $\widetilde{\Gamma}^a$ (смешанного расширения Γ^a) также будет *седловая точка* (μ^0, ν^*), определяемая двумя последовательными неравенствами

$$\psi(\mu, \nu^*) \le \psi(\mu^0, \nu^*) \le \psi(\mu^0, \nu) \tag{3.7}$$

при любых $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$.

Эту пару (μ^0, ν^*) иногда называют *решением игры Γ^a в смешанных стратегиях.*

В 1952 г. Ирвинг Гликсберг установил [25] теорему существования равновесной по Нэшу ситуации бескоалиционной игры $N \geqslant 2$ лиц в смешанных стратегиях, откуда (для частного случая — антагонистической игры Γ^a) следует утверждение: пусть в игре Γ^a множество $X \subset \mathbb{R}^n$

есть непустой компакт, а функция выигрыша первого игрока $\psi(x,z)$ непрерывна на $X \times X$ (у нас непрерывность $\psi(x,z)$) — в утверждении 3. Тогда для игры Γ^a существует решение (μ^0, ν^*), определенное в (3.7), т. е. существует седловая точка в смешанных стратегиях.

С учетом (3.5) неравенства (3.7) примут вид

$$\int\limits_{X\times X} \max_{j=1,\dots,N} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leqslant \int\limits_{X\times X} \max_{j=1,\dots,N} \varphi_j(x,z)\mu^0(dx)\nu^*(dz) \leqslant \int\limits_{X\times X} \max_{j=1,\dots,N} \varphi_j(x,z)\mu^0(dx)\nu(dz)$$

при всех $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$. Положив в

$$\psi(\mu^0,\nu) = \int\limits_{X\times X} \max_{j=1,\dots,N} \varphi_j(x,z)\mu^0(dx)\nu(dz)$$

меру $\nu_i(dz_i) = \mu_i^0(dx_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ и соответственно $\nu(dz) = \mu^0(dx)$, получаем с учетом (3.5), что $\psi(\mu^0,\mu^0) = 0$. Аналогично приходим к $\psi(\nu^*,\nu^*) = 0$ и тогда из (3.7) имеем

$$\psi(\mu^0,\nu^*) = 0.$$

Из $\psi(\mu^0,\mu^0) = 0$ и цепочки неравенств (3.7) (по транзитивности) приходим к

$$\psi(\mu,\nu^*) = \int\limits_{X\times X} \max_{j=1,\dots,N} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leqslant 0 \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Согласно утверждению 2 отсюда получаем

$$0 \geqslant \int\limits_{X\times X} \max_{j=1,\dots,N} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \geqslant \max_{j=1,\dots,N} \int\limits_{X\times X} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz).$$

Поэтому для всех $j = 1,\dots,N$ будет

$$\int\limits_{X\times X} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leqslant 0 \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}. \tag{3.8}$$

Выделим два случая.

I с л у ч а й $(i \in \mathbb{B})$. Здесь согласно (3.8), (2.1) и нормированности $\mu(\cdot)$ для каждого $i \in \mathbb{B}$ выводим

$$0 \geqslant \int\limits_{X\times X} \varphi_i(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) = \int\limits_{X\times X} [f_i(z\|x_{\mathbb{B}-i}) - f_i(z)]\mu(dx)\nu^*(dz)$$
$$= \int\limits_{X\times X} f_i(z\|x_{\mathbb{B}-i})\mu(dx)\nu^*(dz) - \int\limits_{X\times X} f_i(z)\mu(dx)\nu^*(dz)$$
$$= \int\limits_{X\times X} f_i(z\|x_{\mathbb{B}-i})\mu(dx)\nu^*(dz) - \int\limits_{X} \mu(dx) \int\limits_{X} f_i(z)\nu^*(dz) = f_i(\nu^*\|\mu_{\mathbb{B}-i}) - f_i(\nu^*) \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\},$$

из чего следует $f_i(\nu^*) \geqslant f_i(\nu^*\|\mu_{\mathbb{B}-i})$ $\forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}$. То есть для $\nu^*(\cdot)$ выполнено условие (3.3).

II случай ($j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{B}$). Здесь согласно (3.8), (2.1) и нормированности $\mu(\cdot)$ для каждого $j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{B}$ получаем

$$0 \geqslant \int\limits_{X\times X} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) = \int\limits_{X\times X} [f_j(z\|x_{\mathbb{B}+j}) - f_j(z)]\mu(dx)\nu^*(dz)$$
$$= \int\limits_{X\times X} f_j(z\|x_{\mathbb{B}+j})\mu(dx)\nu^*(dz) - \int\limits_{X\times X} f_j(z)\mu(dx)\nu^*(dz)$$
$$= \int\limits_{X\times X} f_j(z\|x_{\mathbb{B}+j})\mu(dx)\nu^*(dz) - \int\limits_{X}\mu(dx)\int\limits_{X} f_j(z)\nu^*(dz) = f_j(\nu^*\|\mu_{\mathbb{B}+j}) - f_j(\nu^*) \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\},$$

из чего вытекает $f_j(\nu^*) \geqslant f_j(\nu^*\|\mu_{\mathbb{B}+j})$ $\forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}$. Следовательно, для $\nu^*(\cdot)$ выполнено условие (3.4).

Таким образом, установлено, что ситуация в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot)$ игры Γ удовлетворяет одновременно условиям (3.3) и (3.4). Отсюда в силу определения 4 ситуация в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot)$ будет являться $BNHE$ в игре Γ. $\square$

4. BN-гибридное равновесие в игре при неопределенности

В дополнение к рассмотренной выше математической модели конфликта

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle$$

добавим "действие" на конфликт неопределенных факторов $y \in Y$. Относительно этих "помех" — неопределенностей полагаем известными лишь границы изменения. Сведения о каких-либо вероятностных характеристиках (например, распределение y на Y) у игроков отсутствуют (по тем или иным причинам). Учет неопределенностей необходим по той причине, что позволяет более адекватно описывать самые разнообразные процессы, происходящие в экономике, экологии, социологии, менеджменте, торговле, при принятии решений в области международных отношений, управлении системами безопасности и пр. Сами неопределенности возникают за счет неполноты (неточности) знаний о реализациях стратегий, выбранных участниками конфликта. "In these matters the only certainty is there is nothing certain" (Pliny the Elder) (ибо в этой жизни определенно только то, что нет ничего определенного) (Плиний Старший[3]). Например, экономическая система, как правило, подвергается неожиданным, труднопрогнозируемым возмущениям как извне (изменение количества и номенклатуры поставок, скачки цен и спроса на рынке сбыта), так и изнутри (появление новых технологий, поломка и необходимость замены оборудования, несовпадение планируемых сроков пуска нового оборудования с планируемыми и так далее); появление новых технологий может служить причиной возмущений и в экологических системах; в механических — температурные и погодные условия. Ведь недаром французская пословица гласит: "Entre bouche et cuiller, vient souvent grand encombrier" (даже пока несешь ложку в рот, нередко возникает помеха). В настоящей статье будем использовать только наиболее простые способы учета "действий" неопределенностей.

Итак, будем рассматривать бескоалиционную игру N лиц в нормальной форме и при неопределенности

$$\langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle. \tag{4.1}$$

По сравнению с Γ (откуда взяты первые два элемента упорядоченной тройки Γ, а именно множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1,\dots,N\}$ и X_i — множество стратегий i-го игрока x_i), в (4.1) уже используется дополнительно множество $Y \subset \mathbb{R}^m$ неопределенностей y и добавлена зависимость от y функции выигрыша $f_i(x,y)$ i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$).

[3]Плиний Старший (ок. 23–79) — римский писатель, ученый.

Партия игры (4.1) развертывается следующим образом: каждый из игроков $i \in \mathbb{N}$ выбирает и использует свою стратегию $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, в результате образуется ситуация

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{j \in \mathbb{N}} X_j \subset \mathbb{R}^n \quad (n = \sum_{j \in \mathbb{N}} n_j).$$

Независимо от их действий в игре (4.1) реализуется неопределенность y (любая из множества Y). На всех таких парах $(x, y) \in X \times Y$ определена функция выигрыша i-го игрока $f_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$. На содержательном уровне задача игрока заключается в выборе своей стратегии (при приведенном правиле развертывания игры (4.1)), с тем чтобы его *выигрыш* — значение $f_i(x, y)$ — стал бы как можно большим. При этом каждый игрок должен учитывать возможность реализации любой неопределенности вида $y \in Y$. Последнее требование приводит к необходимости для каждого i-го игрока оценивать множество

$$f_i(x, Y) = \bigcup_{y \in Y} f_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Подобная многозначность $f_i(x, Y)$ $(i \in \mathbb{N})$, в свою очередь, приводит к необходимости выбора такой функции $f_i[x]$, которая обладала бы *свойством гарантии* для любого элемента $f_i(x, y)$ из множества $f_i(x, Y)$. Согласно “Большому толковому словарю русского языка”[4] гарантия — это условие, обеспечивающее осуществление, исполнение чего-либо. Самой очевидной и наглядной гарантией для i-го игрока в (4.1) является так называемая [26] *сильная гарантия*, реализуемая скалярной функцией

$$f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y). \tag{4.2}$$

Действительно, из (4.2) сразу следует, что для каждой ситуации $x \in X$ имеет место

$$f_i[x] \leq f_i(x, y) \quad \forall y \in Y.$$

Итак, $f_i[x]$ является гарантией потому, что при любых неопределенностях $y \in Y$ и в каждой ситуации $x \in X$ значение $f_i(x, y)$ не может стать меньше $f_i[x]$. Естественно здесь напомнить о следующем, очень важном (для настоящей статьи), результате из теории исследования операций:

Утверждение 4 [26]. *Если скалярная функция $F(x, y)$ непрерывна на произведении компактов $X \times Y$, то функция $f[x] = \min_{y \in Y} F(x, y)$ также непрерывна на X.*

Поэтому все N сильных гарантий $f_i[x]$ из (4.2) при условиях $X_i \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, $Y \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^m$ и $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$ будут непрерывными на X.

Приведенный подход позволяет поставить в соответствие игре (4.1) при неопределенности “игру гарантий” (уже без неопределенностей)

$$\Gamma^g = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle, \tag{4.3}$$

которая совпадает с игрой Γ с заменой $f_i(x)$ на сильную гарантию $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$.

Здесь в (4.3), в отличие от (4.1), качество функционирования каждого i-го игрока оценивается не значением функции выигрыша $f_i(x, y)$, а ее сильной гарантией $f_i[x]$ (что вполне естественно, ибо тем самым учитывается возможность появления $\forall\, y \in Y$).

Аналогом определения 3 для игры при неопределенности (4.1) с учетом сильных гарантий (4.2) будет приведенное

О п р е д е л е н и е 5. Пару $(x^*, f[x^*] = (f_1[x^*], \dots, f_N[x^*]) \in X \times \mathbb{R}^N)$ назовем сильно гарантированным BN-гибридным равновесием игры (4.1), если

[4]Большой толковый словарь русского языка. Санкт-Петербург: Норинт, 2003. С. 194.

1) сильные гарантии $f_i[x]$ из (4.2) непрерывны на X;

2) в игре гарантий (4.3) для непустого подмножества $\mathbb{B}$ множества игроков $\mathbb{N}$ и всех $x \in X$ имеют место равенства

$$\max_{x\in X} f_i[x^*\|x_{\mathbb{B}-i}] = f_i([x^*] \quad (i \in \mathbb{B}),$$
$$\max_{x\in X} f_j[x^*\|x_{\mathbb{B}+j}] = f_j[x^*] \quad (j \in \mathbb{N}\backslash\mathbb{B}).$$

Подобно определению 4 вводится аналог определения 5, только с учетом возможности использования игроками в (4.1) смешанных стратегий $\nu_i(\cdot)$ $(i \in \mathbb{N})$.

О п р е д е л е н и е 6. Ситуацию в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ назовем ситуацией сильно гарантированного BN-гибридного равновесия игры (4.1) в смешанных стратегиях, если

1) существуют непрерывные на X сильные гарантии $f_i[x] = \min\limits_{y\in Y} f_i(x,y)$ для каждого i-го игрока $(i \in \mathbb{N})$;

2) в игре гарантий (4.3) для непустого подмножества $\mathbb{B} \subset \mathbb{N}$ ситуация $\nu^*(\cdot)$ удовлетворяет условиям

$$\max_{\nu(\cdot)\in\{\nu\}} f_i[\nu^*\|\nu_{\mathbb{B}-i}] = f_i[\nu^*] \ \ (i \in \mathbb{B}) \ \ \text{и} \ \ \max_{\nu(\cdot)\in\{\nu\}} f_j[\nu^*\|\nu_{\mathbb{B}+j}] = f_j[\nu^*] \ \ (j \in \mathbb{N}\setminus\mathbb{B}).$$

Наконец, объединение утверждения 4 и теоремы 1 сразу приводит к справедливости следующей теоремы существования.

Теорема 3. *Пусть в игре* (4.1) *множества* X_i $(i \in \mathbb{N})$, Y *суть компакты, а функции выигрыша* $f_i(x,y)$ $(i \in \mathbb{N})$ *непрерывны на* $X \times Y$. *Тогда в* (4.1) *существует сильно гарантированное* BN*-гибридное равновесие в смешанных стратегиях.*

З а м е ч а н и е 7. В разд. 4 настоящей статьи мы ограничились лишь сильными гарантиями $f_i[x] = \min\limits_{y\in Y} f_i(x,y)$ $(i \in \mathbb{N})$. Они названы сильными, ибо они являются самыми нижними из возможных. Можно было бы использовать и так называемые векторные гарантии: компоненты N-вектора $f[x] = (f_1[x],\dots,f_N[x])$ образуют *векторную гарантию* для N-вектора $f(x,y) = (f_1(x,y),\dots,f_N(x,y))$, если при $\forall y \in Y$ и каждом $x \in X$ не могут реализоваться N строгих неравенств:

$$f_i(x,y) < f_i[x] \ \ (i \in \mathbb{N});$$

иначе говоря, векторную гарантию $f[x]$ нельзя покомпонентно (сразу по всем компонентам) уменьшить за счет выбора $y \in Y$ с помощью N-вектор-функции $f(x,y)$. С точки зрения теории векторной оптимизации для каждой ситуации $x \in X$ вектор $f[x]$ является минимумом по Слейтеру (слабо эффективным) в N-критериальной задаче $\Gamma(x) = \langle Y, f(x,y)\rangle$.

Аналогично, используя векторные оптимумы (точнее, минимумы по Парето, Борвейну, Джоффриону, конусную оптимальность), можно ввести целый набор векторных гарантий (соответственно по Парето, Борвейну и т. д.). Эти гарантии обладают тем свойством, что их значения, во-первых, не меньше, чем соответствующие компоненты вектора сильных гарантий $f[x]$ из (4.2), но, во-вторых, могут быть и большими. А ведь мы стремимся к возможному увеличению выигрышей каждого игрока (что достигается, в частности, и увеличением их гарантий!). В этом отношении перечисленные векторные гарантии предпочтительнее сильных. Однако при этом не следует забывать: если требуется осуществлять переход от игры при неопределенности (4.1) к игре гарантий Γ^g и затем воспользоваться теоремой 1, то необходимо, чтобы “новые” функции выигрыша $f_i[x]$ $(i \in \mathbb{N})$ (в Γ^g) были непрерывными. “Обеспечить” такую непрерывность можно, например, следующим образом.

Пусть для (4.1) выполнены условия $X_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$, $Y \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^m$ и $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$ $(i \in \mathbb{N})$. Дополнительно потребуем, чтобы хотя бы одна из $f_j(x,y)$ $(j \in \mathbb{N})$ была *строго выпукла* по y на Y при каждом $x \in X$. Тогда в

$$\min_{y\in Y} f_i(x,y) = f_j[x] \tag{4.4}$$

минимум достигается в единственной точке $y^*(x)$ при каждом $x \in X$, а сама m-вектор функция $y^*(x)$ будет непрерывна на X [28, с. 54]. Из суперпозиции непрерывных функций $f_i(x,y)$ и $y^*(x)$ тогда следует и непрерывность всех скалярных функций $f_i[x] = f_i(x, y^*(x))$ $(i \in \mathbb{N})$. Завершает построение Γ^g следующий очевидный факт: если при каждом $x \in X$ одна и та же функция $f_j[x]$ реализуется минимумом в (4.4), то согласно определению минимальности по Слейтеру (по y) для "текущей" N-критериальной задачи $\Gamma(x) = \langle Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$ $\forall x \in X$ N-вектор $f[x] = (f_1[x], \ldots, f_N[x])$ будет минимумом по Слейтеру: не существует $\bar{y} \in Y$ такой, чтобы $f_i(x,\bar{y}) < f_i[x]$ $(i \in \mathbb{N})$. Мы надеемся привести более подробное рассмотрение этих вопросов для минимумов по Слейтеру, Парето, Борвейну, Джоффриону, конусной минимальности отдельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nash J.** Equillibrium points in N-person games // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 1950. Vol. 36, no. 1. P. 48–49. doi: 10.1073/pnas.36.1.48 .
2. **Nash J.** Non-cooperative games // Ann. Mathematics. 1951. Vol. 54, no. 2. P. 286–295. doi: 10.2307/1969529 .
3. **Zhukovskiy V.I.** Some problems of non-antagonistic differential games // Mathematical Methods in Operations Research: Proc. / ed. P. Kenderov. Sofia: Bulgaria Academy of Sciences, 1985. P. 103–195.
4. **Berge C.** Théorie générale des jeux a n personnes. Paris: Gauthier-Villar, 1957. 114 p.
5. **Вайсман К.С.** Равновесие по Бержу: автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук. СПб: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 1995.
6. **Вайсман К.С.** Равновесие по Бержу в одной дифференциальной игре // Сложные динамические системы: сб. науч. тр. Псков: Изд-во Псков. педагог. ин-та, 1994. С. 58–63.
7. **Вайсман К.С.** Существование гарантированного равновесия по Бержу в одной дифференциальной игре // Понтрягинские чтения–VI: тез. докл. Воронеж, 1995. С. 19.
8. **Вайсман К.С., Аймуханов Н.Ж.** Равновесие по Бержу в дифференциально-разностной игре // Сложные управляемые системы: межвуз. сб. науч. тр. М.: РосЗИТЛП, 1996. С. 90–93.
9. **Вайсман К.С., Жуковский В.И.** Свойства равновесия по Бержу // Тезисы докл. V школы "Математические проблемы экологии". Чита, 1994. С. 27–28.
10. **Вайсман К.С., Жуковский В.И.** Структура равновесных по Бержу решений // Тезисы докл. ВМШ "Понтрягинские чтения–V". Воронеж, 1994. С. 29.
11. **Zhukovskiy V.I., Vaisman K.S.** About one solution in non-cooperative game // Game Theory and Economics: Abstr. of N.N. Vorob'ev Memorial Conf. St.-Petersburg, 1996. P. 77.
12. **Гусейнов А.А., Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.** Математические основы Золотого правила. Теория нового, альтруистического уравновешивания конфликтов в противоположность "эгоистическому" равновесию по Нэшу. М.: URSS, 2016. 280 с.
13. **Bryant J.** A simple rational expectations Keynes type model // Quarterly J. Economics. 1983. Vol. 98, no. 3. P. 525–529. doi: 10.2307/1886025 .
14. **Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.** Парето-равновесные ситуации: достаточные условия и существование в смешанных стратегиях // Математическая теории игр и ее приложения. 2015. Т. 7, № 1. С. 74–91.
15. **Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.** Математические основы Золотого правила. I. Статический вариант // Математическая теории игр и ее приложения 2015. Т. 7. № 3. С. 16–47.
16. **Zhukovskiy V.I., Zhukovskaya L.V., Kudryavtsev K.N., Larbani M.** Strong coalitional equilibria in games under uncertainty // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, № 2. С. 189–207. doi: 10.35634/vm200204 .
17. **Гермейер Ю.Б.** Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 383 р.
18. **Гермейер Ю.Б.** Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. 327 с.
19. **Морозов В.В, Сухарев А.Г., Федоров В.В.** Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1986. 285 с.
20. **Borel E.** La théorie du jeu et les equations intégrales a noyau symétrique // Compes Rendus de l'Académic des Sciences. 1921. Vol. 173. P. 1304–1308.
21. **Neumann J. von** Zur Theorie der Gesellschaftspiele // Math. Ann. 1928. Vol. 100. P. 295–320.
22. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1969.

23. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
24. **Дмитрук А.В.** Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. М.: МАКС-ПРЕСС, 2012. 520 р.
25. **Glicksberg I.L.** A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 3, iss. 1. P. 170–174.
26. **Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.** Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 5, № 2. С. 3–45.

Поступила 21.04.2021
После доработки 28.05.2021
Принята к публикации 21.06.2021

Жуковский Владислав Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Кудрявцев Константин Николаевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
г. Челябинск
e-mail: kudrkn@gmail.com

REFERENCES

1. Nash J. Equillibrium points in N-person games. *Proc. Nat. Academ. Sci. USA*, 1950, vol. 36, no. 1, pp. 48–49. doi: 10.1073/pnas.36.1.48 .
2. Nash J. Non-cooperative games. *Ann. Mathematics*, 1951, vol. 54, no. 2, pp. 286–295. doi: 10.2307/1969529 .
3. Zhukovskiy V.I. Some problems of non-antagonistic differential games. In: *Mathematical Methods in Operations Research (ed. P. Kenderov)*, Sofia: Bulgaria Academy of Sciences, 1985, pp. 103–195.
4. Berge C. *Théorie générale des jeux a n personnes.* Paris: Gauthier-Villar, 1957, 114 p.
5. Vaisman K.S. *The Berge equilibrium.* THESIS: PhD thesis in Russian. Publisher: St. Petersburg University, St. Petersburg, Russia.
6. Vaisman K.S. Berge equilibrium in one differential game. In: *Slozhnye dinamicheskie sistemy: sbornik nauchnykh trudov.* Pskov: Pskovskii Pedagogicheskii Institut Publ., 1994, pp. 58–63 (in Russian).
7. Vaisman K.S. The existence of a guaranteed Berge equilibrium in one differential game. In: *Pontryagin Readings - VI: Abstract.* Voronezh, 1995, p. 19 (in Russian).
8. Vaisman K.S., Aimukhanov N.Zh. Berge equilibrium in differential-difference game. In: *Sophisticated Controlled Systems*: Interuniversity Collection of Scientific Papers. Moscow: RosZITLP, 1996, pp. 90–93 (in Russian). ISBN: 5-85507-077-8 .
9. Vaisman K.S., Zhukovskiy V.I. Properties of Berge equilibrium. In: *Abstract of Intern. Workshop “Mathematical Problems of Ecology”*, Chita, 1994, pp. 27–28 (in Russian).
10. Vaisman K.S., Zhukovskiy V.I. The structure of Berge equilibrium solutions. In: *Pontryagin Readings - V: Abstract*, Voronezh, 1994, p. 29 (in Russian).
11. Zhukovskiy V.I., Vaisman K.S. About one solution in non-cooperative game. In: *Game Theory and Economics: Abstract of N.N. Vorob’ev Memorial Conference.* St.-Petersburg, 1996, p. 77.
12. Guseinov A.A., Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. *Matematicheskie osnovy Zolotogo pravila: Teoriya novogo, al’truisticheskogo uravnoveshivaniya konfliktov v protivopolozhnost’ “egoisticheskomu” ravnovesiyu po Neshu* [Mathematical foundations of the Golden Rule: the altruistic way of the conflict solution as opposed to the selfish Nash equilibrium]. Moscow: URSS, 2016, 280 p. ISBN: 978-5-9710-3213-7 .
13. Bryant J. A simple rational expectations Keynes type model. *Quarterly J. Economics*, 1983, vol. 98, no. 3, pp. 525–529. doi: 10.2307/1886025 .
14. Zhukovskiy, V.I., Kudryavtsev, K.N. Pareto-optimal Nash equilibrium: Sufficient conditions and existence in mixed strategies. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, pp. 1500–1510. doi: 10.1134/S0005117916080154 .

15. Zhukovskiy, V.I., Kudryavtsev, K.N. Mathematical foundations of the Golden Rule. I. Static case. *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, pp. 1920–1940. doi: 10.1134/S0005117917100149 .
16. Zhukovskiy V.I., Zhukovskaya L.V., Kudryavtsev K.N., Larbani M. Strong coalitional equilibria in games under uncertainty. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 189–207. doi: 10.35634/vm200204 .
17. Germeier Yu.B. *Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsii* [Introduction to the operations research theory]. Moscow: Nauka Publ., 1971, 383 p.
18. Germeier Yu.B. *Igry s neprotivopolozhnymi interesami* [Games with non-antagonistic interests]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 327 p.
19. Morozov V.V., Sukharev A.G., Fedorov V.V. *Issledovanie operatsii v zadachakh i uprazhneniyakh* [Research of the operations in tasks and exercises]. Moscow: Nauka Publ., 1986, 285 p.
20. Borel E. The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels. *Econometrica*, 1953, vol. 21, no. 1, pp. 97–100. doi: 10.2307/1906946 .
21. Von Neumann J. Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Math. Ann.*, 1928, vol. 100, no. 1, pp. 295–320. doi: 10.1007/BF01448847 .
22. Lusternik L.A. Sobolev V.J. *Elements of functional analysis.* (International monographs on advanced mathematics and physics). Delhi: Hindustan Publishing Corp., 1974, 360 p. ISBN: 0470556501 . Original Russian text published in Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1965, 520 p.
23. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
24. Dmitruk A.V. *Vypuklyi analiz: Elementarnyi vvodnyi kurs* [Convex analysis: Elementary introductory course]. Moscow: MAKS-PRESS, 2012, 172 p. ISBN: 978-5-89407-472-6 .
25. Glicksberg I.L. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1952, vol. 3, no. 1, pp. 170–174. doi: 10.2307/2032478 .
26. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. Equilibrating conflicts under uncertainty. II. Analogue of a maximin. *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 3–45 (in Russian).

Received April 21, 2021
Revised May 28, 2021
Accepted June 21, 2021

Funding Agency: This work was supported jointly by the Russian Foundation for Basic Research and Chelyabinsk Oblast (project no. 20-41-740027).

Vladislav Iosifovich Zhukovskiy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: zhkvlad@yandex.ru .

Konstantin Nikolaevich Kudryavtsev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: kudrkn@gmail.com .

Cite this article as: V. I. Zhukovskiy, K. N. Kudryavtsev. On one hybrid equilibrium, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 71–86 .