ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.952

О КРИТЕРИЯХ МИНИМАКСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ С КОИНВАРИАНТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА[1]

М. И. Гомоюнов

В статье рассмотрены уравнения Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными дробного порядка, возникающие в задачах оптимального управления динамическими системами, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями с дробными производными Капуто. Для верхних, нижних и минимаксных (обобщенных) решений таких уравнений установлен ряд критериев, выраженных в терминах нелокальных условий стабильности относительно характеристических дифференциальных включений, удовлетворяющих определенному набору требований, а также в виде неравенств для подходящим образом введенных производных функционалов по многозначным направлениям. В частности, данные критерии позволяют согласовать между собой результаты о существовании и единственности минимаксных решений краевых задач для рассматриваемых уравнений Гамильтона — Якоби, полученные ранее при различных предположениях.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона — Якоби, коинвариантные производные, производные дробного порядка, минимаксные решения, характеристические дифференциальные включения, производные по многозначным направлениям.

M. I. Gomoyunov. Criteria of minimax solutions for Hamilton–Jacobi equations with coinvariant fractional-order derivatives.

We consider Hamilton–Jacobi equations with coinvariant fractional-order derivatives, which arise in optimal control problems for dynamical systems whose evolution is described by differential equations with Caputo fractional derivatives. For upper, lower, and minimax (generalized) solutions of such equations, a number of criteria are established, which are expressed in terms of nonlocal conditions of stability with respect to characteristic differential inclusions satisfying a certain set of requirements and in the form of inequalities for suitably introduced derivatives of functionals in multivalued directions. In particular, these criteria make it possible to establish a correspondence between the results on the existence and uniqueness of minimax solutions of boundary value problems for the considered Hamilton–Jacobi equations obtained earlier under various assumptions.

Keywords: Hamilton–Jacobi equations, coinvariant derivatives, fractional-order derivatives, minimax solutions, characteristic differential inclusions, derivatives in multivalued directions.

MSC: 35F21, 35D99, 26A33

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-25-42

Введение

В рамках теории минимаксных (обобщенных) решений уравнений Гамильтона — Якоби (см., например, [1; 2]) отдельное внимание уделяется поиску различных критериев верхних, нижних и минимаксных решений. Как правило, согласно подходам и методам из теории позиционных дифференциальных игр (см., например, [3–5]) и соответствующим унификационным конструкциям (см., например, [6], а также [7]), верхние и нижние решения уравнения Гамильтона — Якоби изначально определяются как функции, удовлетворяющие некоторым нелокальным условиям стабильности относительно так называемых характеристических дифференциальных включений, связанных с гамильтонианом уравнения (см., например, [1, разд. 2], [2, разд. 6], а также [8]). При этом минимаксное решение есть не что иное как функция, которая является одновременно верхним и нижним решением. Отметим, что данные условия стабильности функций выражают собой свойства слабой инвариантности их надграфиков

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 19-71-00073).

и подграфиков относительно характеристических дифференциальных включений. Важными для приложений принято считать утверждения о том, что определения верхних и нижних решений не зависят от выбора конкретных характеристических дифференциальных включений, а минимаксное решение может быть независимо определено в терминах свойств слабой инвариантности его графика (см., например, [2, теорема 6.4]). Известны также другие нелокальные определения минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби, в том числе с использованием понятия классических характеристик (см., например, [9, разд. 7.3]).

Нелокальные условия стабильности удобны, в частности, при исследовании вопросов существования и единственности минимаксных решений краевых задач для уравнений Гамильтона — Якоби. Однако на практике при отыскании минимаксных решений проверить выполнение этих условий напрямую для той или иной функции, как правило, достаточно трудно. В этом отношении более удобны инфинитезимальные выражения условий стабильности и соответственно инфинитезимальные критерии верхних и нижних решений, формулируемые в терминах различных конструкций негладкого анализа. Такие критерии были получены, в числе прочих, в виде неравенств для производных по направлениям, для сопряженных производных, для суб- и супердифференциалов (см., например, [1, теорема 9.1; 2, теорема 6.4], а также [10]). Подчеркнем, что последний из упомянутых критериев устанавливает взаимосвязь минимаксного и вязкостного подходов к понятию обобщенного решения уравнений Гамильтона — Якоби.

Целью настоящей статьи, продолжающей работы [11; 12], является вывод подходящих аналогов некоторых из указанных нелокальных и инфинитезимальных критериев для верхних, нижних и минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными дробного порядка. Уравнения такого вида, с одной стороны, естественным образом возникают [13] при формализации принципа динамического программирования в задачах оптимального управления динамическими системами, эволюция которых описывается при помощи дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто (см., например, [14–16]). С другой стороны, рассматриваемые уравнения Гамильтона — Якоби в определенном смысле обобщают класс уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными первого порядка, который исследовался, например, в [17–21] в связи с задачами динамической оптимизации систем с запаздыванием. В частности, развитые в [18–21] конструкции минимаксных решений во многом составляют основу представленных в настоящей статье результатов. При этом особенности, связанные со спецификой операций интегрирования и дифференцирования дробного порядка, учитываются благодаря использованию установленных в [22] (см. также [12, разд. 2.1]) свойств множеств решений задач Коши для дифференциальных включений с дробными производными Капуто и подходящих определений дробных производных функционалов по многозначным направлениям [11]. В качестве одного из приложений данных в статье критериев отметим возможность установить связь между результатами работы [11], в которой изучался случай однородного гамильтониана, и соответствующими результатами работы [12], полученными в общем случае неоднородного гамильтониана.

1. Обозначения

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство n-мерных векторов со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$. Для $R \geqslant 0$ через $B(R)$ обозначим замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в нуле.

Для любого $t \in [0, T]$ в согласии с [14, определение 2.3] рассмотрим множество $\mathrm{AC}^\alpha([0, t], \mathbb{R}^n)$ функций $x : [0, t] \to \mathbb{R}^n$, для каждой из которых найдется измеримая по Лебегу и существенно ограниченная функция $f : [0, t] \to \mathbb{R}^n$ такая, что справедливо представление

$$x(\tau) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\tau \frac{f(\xi)}{(\tau - \xi)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\xi, \quad \tau \in [0, t]. \tag{1.1}$$

Здесь второе слагаемое является дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка α от функции $f(\cdot)$ (см., например, [14, определение 2.1]); Γ — гамма-функция. Множество $\mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ есть линейное пространство, и всякая функция $x(\cdot)\in \mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ непрерывна (см., например, [14, замечание 3.3]). Пространство $\mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ снабдим равномерной нормой

$$\|x(\cdot)\|_{[0,t]} = \max_{\tau\in[0,t]} \|x(\tau)\|, \quad x(\cdot)\in \mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

В соответствии с [14, теорема 2.4] для каждой функции $x(\cdot)\in \mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$ при почти всех (п.в.) $\tau\in[0,t]$ существует дробная производная Капуто порядка α, определяемая по правилу (см., например, [15, разд. 2.4], а также [16, гл. 3])

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int\limits_0^\tau \frac{x(\xi)-x(0)}{(\tau-\xi)^\alpha}\,\mathrm{d}\xi.$$

Кроме того, если для некоторой измеримой по Лебегу и существенно ограниченной функции $f(\cdot)$ выполнено равенство (1.1), то $({}^C D^\alpha x)(\tau) = f(\tau)$ при п.в. $\tau\in[0,t]$.

Обозначим через G множество пар $(t,w(\cdot))$ таких, что $t\in[0,T]$ и $w(\cdot)\in \mathrm{AC}^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$. Следуя [21, разд. 1] (см. также, например, [19] и [13]), на множестве G введем метрику

$$\operatorname{dist}\big((t,w(\cdot)),(t',w'(\cdot))\big) = \max\big\{\operatorname{dist}^*\big((t,w(\cdot)),(t',w'(\cdot))\big),\operatorname{dist}^*\big((t',w'(\cdot)),(t,w(\cdot))\big)\big\},$$

где $(t,w(\cdot))$, $(t',w'(\cdot))\in G$ и

$$\operatorname{dist}^*\big((t,w(\cdot)),(t',w'(\cdot))\big) = \max_{\tau\in[0,t]}\min_{\tau'\in[0,t']}\sqrt{|\tau-\tau'|^2+\|w(\tau)-w'(\tau')\|^2}.$$

Отметим, что в силу [21, лемма 1.1] (см. также, например, [13, утверждение 8.2]) отображение

$$[0,T]\times \mathrm{AC}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)\ni (t,x(\cdot))\mapsto (t,x_t(\cdot))\in G \tag{1.3}$$

непрерывно. Здесь и далее $x_t(\cdot)$ — сужение функции $x(\cdot)$ на отрезок $[0,t]$, т. е. $x_t(\tau)=x(\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Для $(t,w(\cdot))\in G$ положим

$$X(t,w(\cdot)) = \big\{x(\cdot)\in \mathrm{AC}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n):\ x_t(\cdot)=w(\cdot)\big\}. \tag{1.4}$$

Пусть $G^0=\{(t,w(\cdot))\in G\colon t<T\}$. Рассмотрим функционал $\varphi: G\to\mathbb{R}$. Согласно [13] (см. также [11]) функционал φ называется коинвариантно (ci-) дифференцируемым порядка α в точке $(t,w(\cdot))\in G^0$, если существуют такие $\partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot))\in\mathbb{R}$ и $\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot))\in\mathbb{R}^n$, что для любой функции $x(\cdot)\in X(t,w(\cdot))$ при всех $\tau\in(t,T)$ выполняется соотношение

$$\varphi(\tau,x_\tau(\cdot))-\varphi(t,w(\cdot)) = \partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot))(\tau-t)+\int\limits_t^\tau\langle\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot)),({}^C D^\alpha x)(\xi)\rangle\,\mathrm{d}\xi + o(\tau-t), \tag{1.5}$$

где $o(\cdot)$ может зависеть от t и $x(\cdot)$, $o(\delta)/\delta\to 0$ при $\delta\to+0$. В этом случае величины $\partial_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot))$ и $\nabla^\alpha\varphi(t,w(\cdot))$ называются ci-производными порядка α функционала φ в точке $(t,w(\cdot))$.

Для $t\in[0,T]$ через $\mathrm{Lip}([0,t],\mathbb{R})$ обозначим линейное пространство липшицевых функций $z:[0,t]\to\mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|\cdot\|_{[0,t]}$, определяемой аналогично (1.2), и положим

$$Z(t) = \big\{z(\cdot)\in \mathrm{Lip}([0,T],\mathbb{R}):\ z(\tau)=0,\ \tau\in[0,t]\big\}. \tag{1.6}$$

2. Уравнение Гамильтона — Якоби

В статье рассматривается уравнение Гамильтона — Якоби с ci-производными порядка α

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + H\big(t, w(t), \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))\big) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G^0. \tag{2.1}$$

Неизвестным здесь является функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$. Функция $H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, называемая гамильтонианом, задана и удовлетворяет следующим условиям:

(H_1) Функция H непрерывна.

(H_2) Существует $c \geqslant 0$ такое, что для любых $\tau \in [0, T]$ и x, s, $s' \in \mathbb{R}^n$ выполнена оценка (условие Липшица по переменной s)

$$|H(\tau, x, s) - H(\tau, x, s')| \leqslant c(1 + \|x\|)\|s - s'\|.$$

(H_3) Для любого $R \geqslant 0$ найдется $\lambda \geqslant 0$ такое, что, каковы бы ни были $\tau \in [0, T]$, x, $x' \in B(R)$ и $s \in \mathbb{R}^n$, справедливо неравенство (условие Липшица по переменной x)

$$|H(\tau, x, s) - H(\tau, x', s)| \leqslant \lambda(1 + \|s\|)\|x - x'\|.$$

Отметим, что работы [11; 12] посвящены изучению минимаксных решений задачи Коши для уравнения (2.1) при заданном на правом конце краевом условии

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n), \tag{2.2}$$

где $\sigma\colon \mathrm{AC}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — некоторый непрерывный функционал. При этом в работе [11] предполагается, что помимо условий (H_1)–(H_3) гамильтониан H обладает свойством положительной однородности по переменной s (см. условие (H_4) в разд. 7). Однако, поскольку для основных результатов настоящей статьи наличие того или иного краевого условия вида (2.2) не является принципиальным, далее будут рассматриваться верхние, нижние и минимаксные решения уравнения (2.1), а не задачи Коши (2.1), (2.2).

3. Характеристические комплексы

Прежде чем переходить к определению верхних, нижних и минимаксных решений уравнения (2.1), введем понятия верхнего и нижнего характеристических комплексов этого уравнения (см., например, [2, разд. 6.2], а также [21, разд. 5]).

Для непустого множества Ψ и многозначного отображения

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Psi \ni (\tau, x, \psi) \mapsto E(\tau, x, \psi) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

рассмотрим следующие условия:

(E_1) Каковы бы ни были $\tau \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\psi \in \Psi$, множество $E(\tau, x, \psi)$ непусто, выпукло и компактно в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

(E_2) Для любого $\psi \in \Psi$ многозначное отображение $[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (\tau, x) \mapsto E(\tau, x, \psi) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ полунепрерывно сверху (относительно метрики Хаусдорфа).

(E_3) Существует $c \geqslant 0$ такое, что для любого $\psi \in \Psi$ при всех $\tau \in [0, T]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка (условие подлинейного роста по переменной x)

$$\max\big\{\|f\|\colon (f, g) \in E(\tau, x, \psi)\big\} \leqslant c(1 + \|x\|).$$

(E_4^+) Для любых $\tau \in [0,T]$ и $x,\ s \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\sup_{\psi \in \Psi} \min_{(f,g) \in E(\tau,x,\psi)} \big(\langle s, f \rangle - g \big) = H(\tau, x, s).$$

(E_4^-) Для любых $\tau \in [0,T]$ и $x,\ s \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\inf_{\psi \in \Psi} \max_{(f,g) \in E(\tau,x,\psi)} \big(\langle s, f \rangle - g \big) = H(\tau, x, s).$$

Тогда, если выполнены условия (E_1)–(E_3) и (E_4^+) (соответственно условия (E_1)–(E_3) и (E_4^-)), пара (Ψ, E) называется верхним (соответственно нижним) характеристическим комплексом уравнения (2.1). Совокупность всех верхних характеристических комплексов обозначим через $\mathcal{E}^+(H)$, а нижних — через $\mathcal{E}^-(H)$.

Заметим, что совокупности $\mathcal{E}^\pm(H)$ непусты. Действительно, пусть c_H — минимальное из чисел c, для которых выполнено предположение (H_2). Тогда если взять $c \geqslant c_H$ и определить многозначное отображение $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\tau, x, s) \mapsto E_c(\tau, x, s) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ согласно равенству (см., например, [2, формула (6.4)], а также [21, формула (4.2)] и [19])

$$E_c(\tau, x, s) = \big\{ (f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} :\ \|f\| \leqslant c(1 + \|x\|),\ g = \langle s, f \rangle - H(\tau, x, s) \big\}, \tag{3.1}$$

где $\tau \in [0,T]$ и $x,\ s \in \mathbb{R}^n$, то будет справедливо включение $(\mathbb{R}^n, E_c) \in \mathcal{E}^+(H) \cap \mathcal{E}^-(H)$.

Далее, зафиксируем $(\Psi, E) \in \mathcal{E}^+(H) \cup \mathcal{E}^-(H)$ и $\psi \in \Psi$. Для $(t, w(\cdot)) \in G$ рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения с дробной производной Капуто

$$\big(({}^C D^\alpha x)(\tau), \dot{z}(\tau) \big) \in E(\tau, x(\tau), \psi), \quad (x(\tau), z(\tau)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad \tau \in [t, T], \tag{3.2}$$

где $\dot{z}(\tau) = \mathrm{d}z(\tau)/\mathrm{d}\tau$, при начальном условии

$$x(\tau) = w(\tau), \quad z(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, t]. \tag{3.3}$$

Под решением этой задачи понимается пара функций $(x(\cdot), z(\cdot)) \in X(t, w(\cdot)) \times Z(t)$ (см. (1.4) и (1.6)), удовлетворяющая дифференциальному включению (3.2) при п.в. $\tau \in [t, T]$. Множество всех решений задачи (3.2), (3.3) обозначим через $\mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E, \psi)$. Отметим, что в теории минимаксных решений дифференциальное включение (3.2) часто называют характеристическим, а элементы множества $\mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E, \psi)$ — обобщенными характеристиками уравнениями (2.1).

С опорой на свойства (E_1)–(E_3) многозначного отображения E, подобно [22] (см. также [12, разд. 2.1] и [21, разд. P2]), может быть установлена справедливость следующих утверждений. Пусть $(t, w(\cdot)) \in G$, $\varepsilon \geqslant 0$ и $\mathrm{Sol}_\varepsilon(t, w(\cdot), E, \psi)$ — множество решений задачи Коши для дифференциального включения

$$\big(({}^C D^\alpha x)(\tau), \dot{z}(\tau) \big) \in \big[E(\tau, x(\tau), \psi) \big]^\varepsilon, \quad (x(\tau), z(\tau)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad \tau \in [t, T],$$

при начальном условии (3.3). Здесь и далее через $[E]^\varepsilon$ обозначается замкнутая ε-окрестность множества $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Тогда, во-первых, множество $\mathrm{Sol}_\varepsilon(t, w(\cdot), E, \psi)$ является непустым компактом в $\mathrm{AC}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}([0,T], \mathbb{R})$. Во-вторых, если для каждого $i \in \mathbb{N}$ заданы $\varepsilon_i \geqslant 0$ и $(x^{(i)}(\cdot), z^{(i)}(\cdot)) \in \mathrm{Sol}_{\varepsilon_i}(t, w(\cdot), E, \psi)$, причем $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$, то из последовательности $\{(x^{(i)}(\cdot), z^{(i)}(\cdot))\}_{i \in \mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой паре функций $(x^{(0)}(\cdot), z^{(0)}(\cdot)) \in \mathrm{Sol}_0(t, w(\cdot), E, \psi) = \mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E, \psi)$. Наконец, в-третьих, каковы бы ни были $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Sol}_\varepsilon(t, w(\cdot), E, \psi)$, $t' \in [t, T]$ и $(x'(\cdot), z'(\cdot)) \in \mathrm{Sol}_\varepsilon(t', x_{t'}(\cdot), E, \psi)$, имеет место включение $(x'(\cdot), z''(\cdot)) \in \mathrm{Sol}_\varepsilon(t, w(\cdot), E, \psi)$, где $z''(\tau) = z(\tau)$, $\tau \in [0, t']$, и $z''(\tau) = z(t') + z'(\tau)$, $\tau \in (t', T]$. В частности, данные утверждения позволяют проводить доказательства некоторых из приведенных в статье результатов непосредственно по тем же схемам, как и для уравнений Гамильтона — Якоби с ci-производными первого порядка, в связи с чем ниже часть доказательств опускается и лишь сопровождается соответствующими ссылками.

4. Верхние, нижние и минимаксные решения

Для функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$ и характеристического комплекса $(\Psi, E) \in \mathcal{E}^+(H) \cup \mathcal{E}^-(H)$ рассмотрим следующие условия:

(φ_1^+) Каковы бы ни были $(t, w(\cdot)) \in G^0$, $\vartheta \in (t, T]$, $\psi \in \Psi$ и $\eta > 0$, найдется пара функций $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E, \psi)$ такая, что $\varphi(\vartheta, x_\vartheta(\cdot)) - z(\vartheta) \leqslant \varphi(t, w(\cdot)) + \eta$.

(φ_1^-) Каковы бы ни были $(t, w(\cdot)) \in G^0$, $\vartheta \in (t, T]$, $\psi \in \Psi$ и $\eta > 0$, найдется пара функций $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E, \psi)$ такая, что $\varphi(\vartheta, x_\vartheta(\cdot)) - z(\vartheta) \geqslant \varphi(t, w(\cdot)) - \eta$.

В согласии с [12] верхние, нижние и минимаксные решения уравнения (2.1) определяются следующим образом.

О п р е д е л е н и е 1. Верхним (соответственно нижним) решением уравнения (2.1) называется полунепрерывный снизу (соответственно сверху) функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию (φ_1^+) (соответственно условию (φ_1^-)) для комплекса $(\mathbb{R}^n, E_c)$ при некотором $c \geqslant c_H$. Минимаксным решением уравнения (2.1) называется функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$, который является одновременно верхним и нижним решением этого уравнения.

Напомним, что через c_H обозначается минимальное из чисел c, для которых выполнено предположение (H_2), многозначное отображение E_c определяется равенством (3.1).

Данное определение удобно использовать [12] при исследовании вопросов существования и единственности минимаксного решения уравнения (2.1) при краевом условии (2.2). Однако для того чтобы выяснить, будет ли тот или иной функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ минимаксным решением уравнения (2.1), зачастую удобнее проверять условия (φ_1^+) и (φ_1^-), равно как и их инфинитезимальные аналоги (см. условия (φ_2^+) и (φ_2^-) в разд. 6), не для конкретного характеристического комплекса $(\mathbb{R}^n, E_c)$, а для некоторых специальным образом подобранных верхнего и нижнего характеристических комплексов соответственно. Корректность такого перехода в определении верхнего (соответственно нижнего) решения от комплекса $(\mathbb{R}^n, E_c)$ к произвольному верхнему комплексу $(\Psi^+, E^+) \in \mathcal{E}^+(H)$ (соответственно нижнему комплексу $(\Psi^-, E^-) \in \mathcal{E}^-(H)$) обосновывается в следующем разделе.

5. Нелокальные критерии

Имеет место

Утверждение 1. *Если полунепрерывный снизу функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (φ_1^+) для некоторого комплекса $(\Psi_*, E_*) \in \mathcal{E}^+(H)$, то он удовлетворяет условию (φ_1^+) для любого комплекса $(\Psi, E) \in \mathcal{E}^+(H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем комплексы (Ψ_*, E_*), $(\Psi, E) \in \mathcal{E}^+(H)$ и определим число $c \geqslant c_H$, при котором оба этих комплекса удовлетворяют условию (E_3). Возьмем полунепрерывный снизу функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ и предположим, что условие (φ_1^+) выполняется для (Ψ_*, E_*). По аналогии с [21, утверждение 5.3] (см. также [20, утверждение 1]) проверяется, что тогда функционал φ будет удовлетворять условию (φ_1^+) также и для комплекса $(\mathbb{R}^n, E_c)$ (см. (3.1)). Покажем, что отсюда следует выполнение условия (φ_1^+) для (Ψ, E).

Пусть заданы $(t, w(\cdot)) \in G^0$, $\vartheta \in (t, T]$ и $\psi \in \Psi$. Докажем, что существует пара функций $(x^{(0)}(\cdot), z^{(0)}(\cdot)) \in \mathrm{Sol} = \mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E, \psi)$, для которой $\varphi(\vartheta, x^{(0)}_\vartheta(\cdot)) - z^{(0)}(\vartheta) \leqslant \varphi(t, w(\cdot))$. Заметим, что для этого достаточно для всякого $\zeta > 0$ построить функции

$$(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Sol}, \quad (x'(\cdot), z'(\cdot)) \in X(t, w(\cdot)) \times Z(t) \tag{5.1}$$

таким образом, чтобы были справедливы неравенства

$$\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{[0,T]} \leqslant \zeta, \quad z'(\vartheta) \leqslant z(\vartheta) + \zeta, \quad \varphi(\vartheta, x'_\vartheta(\cdot)) - z'(\vartheta) \leqslant \varphi(t, w(\cdot)) + \zeta. \tag{5.2}$$

Действительно, для каждого $i \in \mathbb{N}$, полагая $\zeta = 1/i$, определим соответствующие функции $(x^{(i)}(\cdot), z^{(i)}(\cdot))$ и $(x'^{(i)}(\cdot), z'^{(i)}(\cdot))$. Множество Sol компактно в $\mathrm{AC}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}([0,T],\mathbb{R})$, поэтому можно считать, что последовательность $\{(x^{(i)}(\cdot), z^{(i)}(\cdot))\}_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой паре функций $(x^{(0)}(\cdot), z^{(0)}(\cdot)) \in \mathrm{Sol}$. Стало быть, согласно первому неравенству в (5.2) получаем $\|x^{(0)}(\cdot) - x'^{(i)}(\cdot)\|_{[0,T]} \to 0$ при $i \to \infty$, откуда выводим $\mathrm{dist}\big((\vartheta, x^{(0)}_\vartheta(\cdot)), (\vartheta, x'^{(i)}_\vartheta(\cdot))\big) \to 0$ при $i \to \infty$ в силу непрерывности отображения (1.3). Тогда с учетом полунепрерывности снизу функционала φ, а также второго и третьего неравенств в (5.2) имеем

$$\varphi(\vartheta, x^{(0)}_\vartheta(\cdot)) - z^{(0)}(\vartheta) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \big(\varphi(\vartheta, x'^{(i)}_\vartheta(\cdot)) - z^{(i)}(\vartheta)\big)$$
$$\leqslant \liminf_{i\to\infty} \big(\varphi(\vartheta, x'^{(i)}_\vartheta(\cdot)) - z'^{(i)}(\vartheta) + 1/i\big) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \big(\varphi(t, w(\cdot)) + 2/i\big) = \varphi(t, w(\cdot)).$$

Следовательно, пара функций $(x^{(0)}(\cdot), z^{(0)}(\cdot))$ является искомой.

Итак, зафиксируем $\zeta > 0$ и построим функции (5.1), для которых выполнены неравенства (5.2). Рассмотрим множество

$$X_* = \big\{x(\cdot) \in X(t, w(\cdot)) \colon \ \|({}^C D^\alpha x)(\tau)\| \leqslant c(1 + \|x(\tau)\|) \text{ при п.в. } \tau \in [t,T]\big\}. \tag{5.3}$$

Отметим (см., например, [22, теорема 1]), что множество X_* компактно в $\mathrm{AC}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$. Определим $R_* \geqslant 0$ так, чтобы имело место оценка $\|x(\cdot)\|_{[0,T]} \leqslant R_*$, $x(\cdot) \in X_*$. Учитывая полунепрерывность снизу функционала φ, выберем $M \in \mathbb{R}$ из условия $\varphi(T, x(\cdot)) \geqslant M$, $x(\cdot) \in X_*$. Далее, согласно [12, разд. 5.1.4] найдутся число $\varepsilon_0 > 0$ и непрерывные отображения $\nu_\varepsilon : G \to \mathbb{R}$ и $s_\varepsilon : G \to \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, обладающие следующими свойствами:

(*a*) Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функционал ν_ε является неотрицательным, и для любых функций $x(\cdot)$, $x'(\cdot) \in X_*$ выполняется оценка $\nu_\varepsilon(t, x_t(\cdot) - x'_t(\cdot)) = \nu_\varepsilon(t, w(\cdot) - w(\cdot)) \leqslant \varepsilon$.

(*b*) Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $x(\cdot)$, $x'(\cdot) \in X_*$. Тогда функция $\omega(\tau) = \nu_\varepsilon(\tau, x_\tau(\cdot) - x'_\tau(\cdot))$, $\tau \in [0,T]$, является липшицевой, и при п.в. $\tau \in [0,T]$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\dot\omega(\tau) \leqslant \big\langle s_\varepsilon(\tau, x_\tau(\cdot) - x'_\tau(\cdot)), ({}^C D^\alpha x)(\tau) - ({}^C D^\alpha x')(\tau)\big\rangle \\ - H\big(\tau, x(\tau), s_\varepsilon(\tau, x_\tau(\cdot) - x'_\tau(\cdot))\big) + H\big(\tau, x'(\tau), s_\varepsilon(\tau, x_\tau(\cdot) - x'_\tau(\cdot))\big).\end{aligned} \tag{5.4}$$

(*c*) Для любого $K > 0$ существует $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что, каковы бы ни были $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и $x(\cdot)$, $x'(\cdot) \in X_*$, если $\nu_\varepsilon(T, x(\cdot) - x'(\cdot)) \leqslant K$, то $\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{[0,T]} \leqslant \zeta$.

Поскольку множество Sol компактно в $\mathrm{AC}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}([0,T],\mathbb{R})$, найдется такое число $R^* \geqslant 0$, что $|z(T)| \leqslant R^*$, $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Sol}$. Возьмем число $K > 0$, удовлетворяющее условию

$$K \geqslant \varepsilon_0(1 + T - t) + R^* + \varphi(t, w(\cdot)) - M + \zeta.$$

По этому числу K определим число ε_* в соответствии со свойством (*c*), после чего выберем $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ из условия $(1 + \vartheta - t)\varepsilon \leqslant \zeta$. Наконец, поскольку отображения s_ε и (1.3) непрерывны, существует $\delta > 0$ такое, что если τ, $\tau' \in [0,T]$, $x(\cdot)$, $x'(\cdot) \in X_*$ и $|\tau - \tau'| \leqslant \delta$, то

$$c(1 + R_*)\|s_\varepsilon(\tau, x_\tau(\cdot) - x'_\tau(\cdot)) - s_\varepsilon(\tau', x_{\tau'}(\cdot) - x'_{\tau'}(\cdot))\| \leqslant \varepsilon/3. \tag{5.5}$$

Возьмем теперь $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим разбиение отрезка $[t,T]$ точками τ_j, $j \in \overline{1, k+1}$, так что выполнены соотношения $\tau_1 = t$, $\tau_j < \tau_{j+1}$ для всех $j \in \overline{1,k}$ и $\tau_{k+1} = T$. Потребуем, чтобы это разбиение содержало точку ϑ, то есть $\vartheta = \tau_{j_*}$ для некоторого $j_* \in \overline{2, k+1}$, и для диаметра этого разбиения было справедливо неравенство $\max\{\tau_{j+1} - \tau_j \colon j \in \overline{1,k}\} \leqslant \delta$.

По шагам данного разбиения построим одновременно функции $(x(\cdot), z(\cdot))$ и $(x'(\cdot),\ z'(\cdot))$ (см. (5.1)) следующим образом. Во-первых, положим $x(\tau) = x'(\tau) = w(\tau)$ и $z(\tau) = z'(\tau) = 0$

при $\tau \in [0,t]$. Далее, пусть $j \in \overline{1,k}$ и значения функций $(x(\cdot), z(\cdot))$ и $(x'(\cdot), z'(\cdot))$ на отрезке $[0,\tau_j]$ уже заданы. Определим значения этих функций на промежутке $(\tau_j, \tau_{j+1}]$. Обозначим

$$s_j = s_\varepsilon(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot) - x'_{\tau_j}(\cdot)). \tag{5.6}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$[0,T] \times \mathbb{R}^n \ni (\tau, x) \mapsto E_j(\tau, x) = \big\{(f,g) \in E(\tau, x, \psi) :\, g \geqslant \langle s_j, f\rangle - H(\tau, x, s_j)\big\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Из свойств (E_1)–(E_3) и (E_4^+) многозначного отображения E и непрерывности гамильтониана H (см. предположение (H_1)) следует, что множество $E_j(\tau, x)$ непусто, выпукло и компактно в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ для любых $\tau \in [0,T]$ и $x \in \mathbb{R}^n$, а многозначное отображение E_j полунепрерывно сверху и удовлетворяет условию подлинейного роста по переменной x. Поэтому (см., например, [12, утверждение 2.1]) найдется пара функций $(x^{[j]}(\cdot), z^{[j]}(\cdot)) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}([0,T], \mathbb{R})$ такая, что $x^{[j]}(\tau) = x(\tau)$, $z^{[j]}(\tau) = z(\tau)$, $\tau \in [0,\tau_j]$, и при п.в. $\tau \in [\tau_j, T]$ имеет место включение

$$\big(({}^C D^\alpha x^{[j]})(\tau), \dot{z}^{[j]}(\tau)\big) \in E_j(\tau, x^{[j]}(\tau)).$$

Кроме того, учитывая, что функционал φ удовлетворяет условию (φ_1^+) для $(\mathbb{R}^n, E_c)$, определим пару функций $(x'^{[j]}(\cdot), z'^{[j]}(\cdot)) \in \mathrm{Sol}(\tau_j, x'_{\tau_j}(\cdot), s_j, E_c)$, для которой выполнено неравенство

$$\varphi(\tau_{j+1}, x'^{[j]}_{\tau_{j+1}}(\cdot)) - z'^{[j]}(\tau_{j+1}) \leqslant \varphi(\tau_j, x'_{\tau_j}(\cdot)) + \zeta(\tau_{j+1} - \tau_j)/(T-t).$$

В итоге для $\tau \in (\tau_j, \tau_{j+1}]$ положим

$$x(\tau) = x^{[j]}(\tau), \quad z(\tau) = z^{[j]}(\tau), \quad x'(\tau) = x'^{[j]}(\tau), \quad z'(\tau) = z'(\tau_j) + z'^{[j]}(\tau).$$

Отметим, что непосредственно по построению для функций $(x(\cdot), z(\cdot))$ и $(x'(\cdot), z'(\cdot))$ справедливы включения (5.1) и $x(\cdot)$, $x'(\cdot) \in X_*$, имеет место оценка

$$\varphi(\tau_j, x'_{\tau_j}(\cdot)) - z'(\tau_j) \leqslant \varphi(t, w(\cdot)) + \zeta, \quad j \in \overline{1, k+1}, \tag{5.7}$$

и для каждого $j \in \overline{1,k}$ при п.в. $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ выполняются соотношения

$$\dot{z}(\tau) \geqslant \langle s_j, ({}^C D^\alpha x)(\tau)\rangle - H(\tau, x(\tau), s_j), \quad \dot{z}'(\tau) = \langle s_j, ({}^C D^\alpha x')(\tau)\rangle - H(\tau, x'(\tau), s_j). \tag{5.8}$$

Перейдем к доказательству неравенств (5.2). Сразу же заметим, что третье неравенство в (5.2) вытекает из оценки (5.7) при $j = j_*$. Более того, из этой же оценки при $j = k+1$ по выбору числа M выводим

$$z'(T) \geqslant \varphi(T, x'(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) - \zeta \geqslant M - \varphi(t, w(\cdot)) - \zeta. \tag{5.9}$$

Рассмотрим функцию $\mu(\tau) = \nu_\varepsilon(\tau, x_\tau(\cdot) - x'_\tau(\cdot)) - z(\tau) + z'(\tau) - \varepsilon(\tau - t)$, $\tau \in [0,T]$. Согласно свойству (b) функция $\mu(\cdot)$ является липшицевой и для любого $j \in \overline{1,k}$ при п.в. $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ в силу соотношений (5.4) и (5.8) справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(\tau) \leqslant \big\langle s_\varepsilon(\tau, x_\tau(\cdot) - x'_\tau(\cdot)) - s_j, ({}^C D^\alpha x)(\tau) - ({}^C D^\alpha x')(\tau)\big\rangle + H(\tau, x(\tau), s_j) - H(\tau, x'(\tau), s_j) \\ - H\big(\tau, x(\tau), s_\varepsilon(\tau, x_\tau(\cdot) - x'_\tau(\cdot))\big) + H\big(\tau, x'(\tau), s_\varepsilon(\tau, x_\tau(\cdot) - x'_\tau(\cdot))\big) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая определения (5.3) и (5.6) множества X_* и вектора s_j, свойство (H_2) гамильтониана H и выбор (5.5) числа δ, имеем $\dot{\mu}(\tau) \leqslant 0$ при п.в. $\tau \in [t,T]$. Стало быть, получаем $\mu(\vartheta) \leqslant \varepsilon$ и $\mu(T) \leqslant \varepsilon$, так как $\mu(t) \leqslant \varepsilon$ по свойству (a). Тогда, во-первых, принимая во внимание неотрицательность функционала ν_ε (см. свойство (a)) и выбор числа ε, выводим

$$z'(\vartheta) - z(\vartheta) = \mu(\vartheta) - \nu_\varepsilon(\vartheta, x_\vartheta(\cdot) - x'_\vartheta(\cdot)) + \varepsilon(\vartheta - t) \leqslant \varepsilon(1 + \vartheta - t) \leqslant \zeta,$$

а значит выполняется второе неравенство в (5.2). Во-вторых, в соответствии с оценкой (5.9) и выбором чисел R^* и K имеем

$$\nu_\varepsilon(T, x(\cdot) - x'(\cdot)) = \mu(T) + z(T) - z'(T) + \varepsilon(T-t) \leqslant \varepsilon(1+T-t) + R^* - M + \varphi(t, w(\cdot)) + \zeta \leqslant K,$$

откуда по выбору числа ε_* вытекает первое неравенство в (5.2). Утверждение доказано. □

В частности, из утверждения 1 следует, что если функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ полунепрерывен снизу и удовлетворяет условию (φ_1^+) для некоторого комплекса $(\Psi_*, E_*) \in \mathcal{E}^+(H)$, то этот функционал будет верхним решением уравнения (2.1), а, с другой стороны, всякое верхнее решение уравнения (2.1) удовлетворяет условию (φ_1^+) для любого комплекса $(\Psi, E) \in \mathcal{E}^+(H)$. Ясно, что аналогичные выводы могут быть сделаны и в отношении нижних решений уравнения (2.1). Таким образом, справедливо

Утверждение 2. *Если непрерывный функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (φ_1^+) и (φ_1^-) для некоторых комплексов $(\Psi_*^+, E_*^+) \in \mathcal{E}^+(H)$ и $(\Psi_*^-, E_*^-) \in \mathcal{E}^-(H)$ соответственно, то этот функционал будет минимаксным решением уравнения* (2.1). *С другой стороны, минимаксное решение уравнения* (2.1) *удовлетворяет условию (φ_1^+) для любого комплекса $(\Psi^+, E^+) \in \mathcal{E}^+(H)$ и условию (φ_1^-) для любого комплекса $(\Psi^-, E^-) \in \mathcal{E}^-(H)$.*

Отметим также следующий полезный критерий минимаксного решения уравнения (2.1).

Утверждение 3. *Пусть $c \geqslant c_H$. Непрерывный функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ является минимаксным решением уравнения* (2.1) *тогда и только тогда, когда для любых $(t, w(\cdot)) \in G^0$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существует такая пара функций $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E_c, s)$, что при всех $\tau \in [t, T]$ имеет место равенство $\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - z(\tau) = \varphi(t, w(\cdot))$.*

Доказательство этого утверждения проводится по схеме из [21, утверждение 5.2] (см. также [19, утверждение 6.1]).

6. Инфинитезимальные критерии

Настоящий раздел посвящен выводу более удобных для проверки инфинитезимальных критериев нелокальных свойств (φ_1^+) и (φ_1^-), участвующих в определении верхних, нижних и минимаксных решений уравнения (2.1).

В соответствии с [21, разд. 11] (см. также [18] и [11]) для функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$, точки $(t, w(\cdot)) \in G^0$ и непустого выпуклого компакта $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ определим следующие величины:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{d}}_-^\alpha\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid E\} &= \lim_{\varepsilon \to +0} \inf_{(x(\cdot), z(\cdot)) \in \widetilde{\Omega}} \liminf_{\delta \to +0} \big(\varphi(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) - z(t+\delta)\big)\delta^{-1}, \\ \widetilde{\mathrm{d}}_+^\alpha\{\varphi(t, w(\cdot)) \mid E\} &= \lim_{\varepsilon \to +0} \sup_{(x(\cdot), z(\cdot)) \in \widetilde{\Omega}} \limsup_{\delta \to +0} \big(\varphi(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) - z(t+\delta)\big)\delta^{-1}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где множество $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}(t, w(\cdot), E, \varepsilon)$ состоит из таких пар функций $(x(\cdot), z(\cdot)) \in X(t, w(\cdot)) \times Z(t)$ (см. (1.4) и (1.6)), что $(({}^C D^\alpha x)(\tau), \dot{z}(\tau)) \in [E]^\varepsilon$ при п.в. $\tau \in [t, T]$. Согласно принятой в указанных работах терминологии величины (6.1) могут трактоваться как некоторые специальные нижняя и верхняя (правые) производные вспомогательного функционала

$$\widetilde{\varphi}(t', w'(\cdot), r'(\cdot)) = \varphi(t', w'(\cdot)) - r'(t'), \quad t' \in [0, T], \quad w'(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0, t'], \mathbb{R}^n), \quad r'(\cdot) \in \mathrm{Lip}([0, t'], \mathbb{R}),$$

в точке $(t, w(\cdot), r(\cdot))$, где $r(\cdot) \in \mathrm{Lip}([0, t], \mathbb{R})$ и $r(t) = 0$, по многозначному направлению E.

Обозначим через $\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^+(H)$ (соответственно через $\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^-(H)$) совокупность всех характеристических комплексов $(\Psi, E) \in \mathcal{E}^+(H)$ (соответственно комплексов $(\Psi, E) \in \mathcal{E}^-(H)$) таких, что для любого $\psi \in \Psi$ многозначное отображение из условия (E_2) не только полунепрерывно сверху, но и непрерывно. Заметим, что при всяком $c \geqslant c_H$ определяемый равенством (3.1) комплекс $(\mathbb{R}^n, E_c)$ обладает этим дополнительным свойством, так что $(\mathbb{R}^n, E_c) \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^+(H) \cap \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^-(H)$.

Для функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$ и характеристического комплекса $(\Psi, E) \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^+(H) \cup \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^-(H)$ рассмотрим следующие условия:

(φ_2^+) Для любых $\psi \in \Psi$ и $(t, w(\cdot)) \in G^0$ выполнено дифференциальное неравенство

$$\widetilde{\mathrm{d}}_-^\alpha \big\{ \varphi(t, w(\cdot)) \bigm| E(t, w(t), \psi) \big\} \leqslant 0.$$

(φ_2^-) Для любых $\psi \in \Psi$ и $(t, w(\cdot)) \in G^0$ справедливо дифференциальное неравенство

$$\widetilde{\mathrm{d}}_+^\alpha \big\{ \varphi(t, w(\cdot)) \bigm| E(t, w(t), \psi) \big\} \geqslant 0.$$

По схеме из [21, теорема 13.1] (см. также [18, теорема 1]) проверяется, что имеет место

Утверждение 4. *Для всякого полунепрерывного снизу функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$ и любого комплекса $(\Psi^+, E^+) \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^+(H)$ условия (φ_1^+) и (φ_2^+) эквивалентны. Аналогично для всякого полунепрерывного сверху функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$ и любого комплекса $(\Psi^-, E^-) \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^-(H)$ условия (φ_1^-) и (φ_2^-) эквивалентны.*

Из утверждений 2 и 4 вытекает

Следствие 1. *Если непрерывный функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (φ_2^+) и (φ_2^-) для некоторых комплексов $(\Psi_*^+, E_*^+) \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^+(H)$ и $(\Psi_*^-, E_*^-) \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^-(H)$ соответственно, то этот функционал является минимаксным решением уравнения* (2.1)*. С другой стороны, минимаксное решение уравнения* (2.1) *удовлетворяет условию (φ_2^+) для любого комплекса $(\Psi^+, E^+) \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^+(H)$ и условию (φ_2^-) для любого комплекса $(\Psi^-, E^-) \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}^-(H)$.*

Конкретизируем свойства (φ_2^+) и (φ_2^-) для характеристического комплекса $(\mathbb{R}^n, E_c)$.

С этой целью для функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$, точки $(t, w(\cdot)) \in G^0$ и непустого выпуклого компакта $F \subset \mathbb{R}^n$ определим величины

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_-^\alpha \{\varphi(t, w(\cdot)) \mid F\} &= \lim_{\varepsilon \to +0} \inf_{x(\cdot) \in \Omega} \liminf_{\delta \to +0} \big(\varphi(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) \big) \delta^{-1}, \\
\mathrm{d}_+^\alpha \{\varphi(t, w(\cdot)) \mid F\} &= \lim_{\varepsilon \to +0} \sup_{x(\cdot) \in \Omega} \limsup_{\delta \to +0} \big(\varphi(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) \big) \delta^{-1}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь через $\Omega = \Omega(t, w(\cdot), F, \varepsilon)$ обозначено множество функций $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ таких, что при п.в. $\tau \in [t, T]$ выполняется включение $({}^C D^\alpha x)(\tau) \in [F]^\varepsilon$, где $[F]^\varepsilon$ — замкнутая ε-окрестность множества F в $\mathbb{R}^n$. Величины (6.2) называются [11] нижней и верхней (правыми) производными порядка α функционала φ в точке $(t, w(\cdot))$ по многозначному направлению F.

Утверждение 5. *Для любого функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$ равенство*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathrm{d}}_-^\alpha \big\{ \varphi(t, w(\cdot)) \bigm| E_c(t, w(t), s) \big\} \\
&= \mathrm{d}_-^\alpha \left\{ \varphi(t, w(\cdot)) - \int_0^t \langle s, ({}^C D^\alpha w)(\tau) \rangle \, \mathrm{d}\tau \,\middle|\, B\big(c(1 + \|w(t)\|)\big) \right\} + H(t, w(t), s)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

справедливо при всех $c \geqslant c_H$, $s \in \mathbb{R}^n$ и $(t, w(\cdot)) \in G^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что первое слагаемое в правой части равенства (6.3) обозначает нижнюю производную порядка α вспомогательного функционала

$$\overline{\varphi}(t', w'(\cdot)) = \varphi(t', w'(\cdot)) - \int_0^{t'} \langle s, ({}^C D^\alpha w')(\tau) \rangle \, \mathrm{d}\tau, \quad (t', w'(\cdot)) \in G,$$

в точке $(t, w(\cdot))$ по многозначному направлению $F = B(c(1 + \|w(t)\|))$.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ в силу определения (3.1) множества $E_c(t, w(t), s)$, с одной стороны, каковы бы ни были функции $(x_*(\cdot), z_*(\cdot)) \in \widetilde{\Omega}(t, w(\cdot), E_c(t, w(t), s), \varepsilon)$, имеют место включение $x_*(\cdot) \in \Omega = \Omega(t, w(\cdot), B(c(1 + \|w(t)\|)), \varepsilon)$ и неравенство

$$z_*(\tau) \leqslant \int\limits_t^\tau \langle s, ({}^C D^\alpha x_*)(\xi) \rangle \, \mathrm{d}\xi - H(t, w(t), s)(\tau - t) + \varepsilon(\tau - t), \quad \tau \in [t, T],$$

а с другой стороны, для всякой функции $x^*(\cdot) \in \Omega$ и функции $z^*(\cdot) \in Z(t)$ такой, что

$$z^*(\tau) = \int\limits_t^\tau \langle s, ({}^C D^\alpha x^*)(\xi) \rangle \, \mathrm{d}\xi - H(t, w(t), s)(\tau - t), \quad \tau \in [t, T],$$

выполняется включение $(x^*(\cdot), z^*(\cdot)) \in \widetilde{\Omega}(t, w(\cdot), E_c(t, w(t), s), \varepsilon\sqrt{1 + \|s\|^2})$. Из данных фактов следует справедливость равенства (6.3), если принять во внимание определения (6.1) и (6.2) входящих в это равенство производных. Утверждение доказано. □

Ясно, что равенство (6.3) для соответствующих верхних производных может быть доказано аналогичным образом. Тогда с учетом следствия 1 приходим к следующему результату (в этой связи см., например, [21, теорема 12.1], а также [19, теорема 8.1]).

Следствие 2. *Пусть $c \geqslant c_H$. Непрерывный функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ будет минимаксным решением уравнения* (2.1) *в том и только том случае, когда для любых $s \in \mathbb{R}^n$ и $(t, w(\cdot)) \in G^0$ выполнена пара дифференциальных неравенств*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^\alpha_- \left\{ \varphi(t, w(\cdot)) - \int\limits_0^t \langle s, ({}^C D^\alpha w)(\tau) \rangle \, \mathrm{d}\tau \;\middle|\; B\big(c(1 + \|w(t)\|)\big) \right\} + H(t, w(t), s) \leqslant 0, \\
&\mathrm{d}^\alpha_+ \left\{ \varphi(t, w(\cdot)) - \int\limits_0^t \langle s, ({}^C D^\alpha w)(\tau) \rangle \, \mathrm{d}\tau \;\middle|\; B\big(c(1 + \|w(t)\|)\big) \right\} + H(t, w(t), s) \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Этот критерий минимаксного решения уравнения (2.1) представляется наиболее естественным из всех, приведенных выше, поскольку по своему виду дифференциальные неравенства (6.4) являются наиболее наглядным обобщением уравнения (2.1) на негладкий случай.

7. Случай однородного гамильтониана

В работе [11] минимаксные решения задачи Коши для уравнения (2.1) и краевого условия (2.2) изучались при следующем дополнительном предположении:

(H_4) Для любых $\tau \in [0, T]$, x, $s \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma \geqslant 0$ справедливо равенство (условие положительной однородности по переменной s)

$$H(\tau, x, \gamma s) = \gamma H(\tau, x, s).$$

При этом в [11] рассматривалось несколько иное определение минимаксного решения, которое в обозначениях, принятых в настоящей статье, можно сформулировать следующим образом.

Для непустого множества Ψ и многозначного отображения

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Psi \ni (\tau, x, \psi) \mapsto F(\tau, x, \psi) \subset \mathbb{R}^n$$

рассмотрим следующие условия:

(F_1) Каковы бы ни были $\tau \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\psi \in \Psi$, множество $F(\tau,x,\psi)$ непусто, выпукло и компактно в $\mathbb{R}^n$.

(F_2) Для любого $\psi \in \Psi$ многозначное отображение $[0,T] \times \mathbb{R}^n \ni (\tau,x) \mapsto F(\tau,x,\psi) \subset \mathbb{R}^n$ полунепрерывно сверху.

(F_3) Существует $c \geqslant 0$ такое, что для любого $\psi \in \Psi$ при всех $\tau \in [0,T]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка (условие подлинейного роста по переменной x)

$$\max\big\{\|f\|\colon f \in F(\tau,x,\psi)\big\} \leqslant c(1+\|x\|).$$

(F_4^+) Для любых $\tau \in [0,T]$ и $x,\ s \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\sup_{\psi\in\Psi}\ \min_{f\in F(\tau,x,\psi)} \langle s,f\rangle = H(\tau,x,s).$$

(F_4^-) Для любых $\tau \in [0,T]$ и $x,\ s \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\inf_{\psi\in\Psi}\ \max_{f\in F(\tau,x,\psi)} \langle s,f\rangle = H(\tau,x,s).$$

Через $\mathcal{F}^+(H)$ (соответственно через $\mathcal{F}^-(H)$) обозначим совокупность всех пар (Ψ,F), удовлетворяющих условиям (F_1)–(F_3) и (F_4^+) (соответственно условиям (F_1)–(F_3) и (F_4^-)). Заметим, что совокупности $\mathcal{F}^\pm(H)$ непусты в том и только том случае, когда выполнено условие (H_4) (примеры пар $(\Psi^\pm,F^\pm) \in \mathcal{F}^\pm(H)$ приведены, например, в [11, формула (5.2)]).

Далее, пусть $(\Psi^\pm,F^\pm) \in \mathcal{F}^\pm(H)$. Для $\tau \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\psi^\pm \in \Psi^\pm$ положим

$$E^\pm(\tau,x,\psi^\pm) = F^\pm(\tau,x,\psi^\pm) \times \{0\}. \tag{7.1}$$

Отметим, что справедливы включения $(\Psi^\pm,E^\pm) \in \mathcal{E}^\pm(H)$ (см., например, [21, формула (7.6)]). Будем говорить, что для функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$ и пары (Ψ^+,F^+) (соответственно пары (Ψ^-,F^-)) выполнено условие (φ_1^+) (соответственно условие (φ_1^-)), если это условие выполнено для характеристического комплекса (Ψ^+,E^+) (соответственно комплекса (Ψ^-,E^-)).

Определение 2. Верхним (соответственно нижним) решением уравнения (2.1) называется полунепрерывный снизу (соответственно сверху) функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию (φ_1^+) (соответственно условию (φ_1^-)) для некоторой пары $(\Psi^+,F^+) \in \mathcal{F}^+(H)$ (соответственно пары $(\Psi^-,F^-) \in \mathcal{F}^-(H)$). Минимаксным решением уравнения (2.1) называется функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$, который является одновременно верхним и нижним решением этого уравнения (в указанном в данном определении смысле).

Из утверждения 1 следует

Утверждение 6. *При дополнительном условии (H_4) определения 1 и 2 эквивалентны.*

Это утверждение позволяет согласовать результаты работы [11], полученные при условии (H_4), с результатами работы [12]. Так, например, теорема 1 из [11] может рассматриваться как частный случай теоремы 6.1 из [12].

Наконец, предположим, что для пар $(\Psi^\pm,F^\pm) \in \mathcal{F}^\pm(H)$ условие (F_2) выполняется с заменой свойства полунепрерывности сверху на свойство непрерывности. Тогда для определяемых по правилу (7.1) характеристических комплексов справедливы включения $(\Psi^\pm,E^\pm) \in \mathcal{E}^\pm_{\mathrm{C}}(H)$. Кроме того, непосредственно из определений (6.1) и (6.2) вытекает, что для любого функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$ при всех $\psi^\pm \in \Psi^\pm$ и $(t,w(\cdot)) \in G^0$ имеют место равенства

$$\widetilde{\mathrm{d}}^{\alpha}_{\mp}\big\{\varphi(t,w(\cdot)) \bigm| E^\pm(t,w(t),\psi^\pm)\big\} = \mathrm{d}^{\alpha}_{\mp}\big\{\varphi(t,w(\cdot)) \bigm| F^\pm(t,w(t),\psi^\pm)\big\}.$$

Таким образом, заключаем, что утверждение 4 является обобщением теоремы 3 из [11] на случай неоднородного гамильтониана H.

8. Пример

Проиллюстрируем полученные в статье результаты на примере, имеющем своей основной конструкции из [1, разд. 1, п. 3] (см. также [2, разд. 1.4]). Возьмем $n = 1$, $T = 2$ и $\alpha \in (0,1)$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с ci-производными порядка α

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + \sqrt{1 + \Gamma^2(\alpha)(2-t)^{2-2\alpha}\big(\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))\big)^2} = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G^0, \tag{8.1}$$

при заданном на правом конце краевом условии

$$\varphi(2, w(\cdot)) = w^2(2)/2, \quad w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,2], \mathbb{R}). \tag{8.2}$$

Поскольку для гамильтониана

$$H(\tau, s) = \sqrt{1 + \Gamma^2(\alpha)(2-\tau)^{2-2\alpha} s^2}, \quad \tau \in [0,2], \quad s \in \mathbb{R}, \tag{8.3}$$

выполнены предположения (H_1)–(H_3), а функционал $\sigma(w(\cdot)) = w^2(2)/2$, $w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,2], \mathbb{R})$, непрерывен, то минимаксное решение уравнения (8.1), удовлетворяющее условию (8.2), существует и единственно [12, теорема 6.1]. Опираясь на следствие 2, покажем, что это решение может быть найдено согласно формуле

$$\varphi(t, w(\cdot)) = \max_{\ell \in \mathbb{R}} \varkappa(t, w(\cdot), \ell), \quad (t, w(\cdot)) \in G, \tag{8.4}$$

где для $(t, w(\cdot)) \in G$ и $\ell \in \mathbb{R}$ обозначено

$$\begin{gathered} \varkappa(t, w(\cdot), \ell) = \ell a(t, w(\cdot)) + (2-t)\sqrt{1+\ell^2} - \ell^2/2, \\ a(t, w(\cdot)) = w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{({}^C D^\alpha w)(\tau)}{(2-\tau)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\tau. \end{gathered} \tag{8.5}$$

Отметим, что функционал $a : G \to \mathbb{R}$ из (8.5) непрерывен, ci-дифференцируем порядка α в каждой точке $(t, w(\cdot)) \in G^0$, причем $\partial_t^\alpha a(t, w(\cdot)) = 0$ и $\nabla^\alpha a(t, w(\cdot)) = 1/(\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha})$, и справедливо равенство $a(2, w(\cdot)) = w(2)$, $w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,2], \mathbb{R})$ (см. [13, разд. 12]). Стало быть, функционал $\varkappa : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ из (8.5) непрерывен и обладает следующим свойством ci-дифференцируемости порядка α: для любых $(t, w(\cdot)) \in G^0$, $\ell \in \mathbb{R}$ и $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ при всех $\tau \in (t, T)$ выполняется соотношение

$$\varkappa(\tau, x_\tau(\cdot), \ell) - \varkappa(t, w(\cdot), \ell) = -\sqrt{1+\ell^2}(\tau - t) + \frac{\ell}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}} \int\limits_t^\tau ({}^C D^\alpha x)(\xi) \, \mathrm{d}\xi + \ell o(\tau - t), \tag{8.6}$$

где $o(\cdot)$ зависит от t и $x(\cdot)$, но не зависит от ℓ, $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to +0$. Более того, для функционала $\varphi : G \to \mathbb{R}$ из (8.4) выводим

$$\varphi(2, w(\cdot)) = \max_{\ell \in \mathbb{R}} \big(\ell w(2) - \ell^2/2\big) = w^2(2)/2, \quad w(\cdot) \in \mathrm{AC}^\alpha([0,2], \mathbb{R}),$$

а значит функционал φ удовлетворяет краевому условию (8.2).

Далее, для $(t, w(\cdot)) \in G$ рассмотрим множество

$$L_0(t, w(\cdot)) = \big\{\ell \in \mathbb{R} : \varphi(t, w(\cdot)) = \varkappa(t, w(\cdot), \ell)\big\}. \tag{8.7}$$

Положим $G_* = \{(t, w(\cdot)) \in G \colon t \in [0,1),\ a(t, w(\cdot)) = 0\}$. Заметим, что для $(t, w(\cdot)) \in G \setminus G_*$ множество $L_0(t, w(\cdot))$ состоит из единственного элемента, который обозначим через $\ell_0(t, w(\cdot))$, а для $(t, w(\cdot)) \in G_*$ имеем $L_0(t, w(\cdot)) = \{\pm \ell_0(t, w(\cdot))\}$, где обозначено $\ell_0(t, w(\cdot)) = \sqrt{(2-t)^2 - 1}$.

Кроме того, если взять последовательность $\{(t_i, w_i(\cdot))\}_{i\in\mathbb{N}} \subset G$, сходящуюся к некоторой точке $(t_0, w_0(\cdot)) \in G$, и для каждого $i \in \mathbb{N}$ выбрать $\ell_i \in L_0(t_i, w_i(\cdot))$, то последовательность $\{\ell_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ будет ограничена в силу непрерывности функционала a. Из этого факта и непрерывности функционала $\varkappa$ вытекает непрерывность функционала φ. При этом в качестве следствия получаем, что все частичные пределы рассматриваемой последовательности $\{\ell_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ принадлежат множеству $L_0(t_0, w_0(\cdot))$.

Проверим, что для любых $s \in \mathbb{R}$ и $(t, w(\cdot)) \in G^0$ имеют место неравенства

$$p_-(s) + H(t,s) \leqslant 0, \quad p_+(s) + H(t,s) \geqslant 0, \tag{8.8}$$

где для краткости используются обозначения

$$p_\mp(s) = \mathrm{d}^\alpha_\mp\Big\{\varphi(t, w(\cdot)) - s\int_0^t ({}^C D^\alpha w)(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\Big|\; B\big(c_H(1+|w(t)|)\big)\Big\}$$

и $c_H = \Gamma(\alpha)2^{1-\alpha}$ — минимальное из чисел c, при которых для гамильтониана H из (8.3) выполнено предположение (H_2). Учитывая вид (8.4) функционала φ, а также указанные выше свойства функционала $\varkappa$ и многозначного отображения $G \ni (t, w(\cdot)) \mapsto L_0(t, w(\cdot)) \subset \mathbb{R}$ из (8.7), по схеме из [21, утверждение 11.3] (см. также [18, утверждение 3]) выводим

$$p_-(s) = \min_{f\in B(c_H(1+|w(t)|))}\ \max_{\ell\in L_0(t,w(\cdot))}\Big(-\sqrt{1+\ell^2} + \Big(\frac{\ell}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}} - s\Big)f\Big),$$

$$p_+(s) = \max_{f\in B(c_H(1+|w(t)|))}\ \max_{\ell\in L_0(t,w(\cdot))}\Big(-\sqrt{1+\ell^2} + \Big(\frac{\ell}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}} - s\Big)f\Big).$$

Стало быть, в случае $(t, w(\cdot)) \notin G_*$ имеем

$$p_\mp(s) = -\sqrt{1+\ell_0^2(t, w(\cdot))} \mp c_H(1+|w(t)|)\Big|\frac{\ell_0(t, w(\cdot))}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}} - s\Big|,$$

а в случае $(t, w(\cdot)) \in G_*$ получаем

$$p_-(s) = -\sqrt{1+\ell_0^2(t, w(\cdot))} - \begin{cases} c_H(1+|w(t)|)\Big|\dfrac{\ell_0(t, w(\cdot))}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}} - s\Big|, & \text{если } s > \dfrac{\ell_0(t, w(\cdot))}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}}, \\ 0, & \text{если } |s| \leqslant \dfrac{\ell_0(t, w(\cdot))}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}}, \\ c_H(1+|w(t)|)\Big|\dfrac{-\ell_0(t, w(\cdot))}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}} - s\Big|, & \text{если } s < \dfrac{-\ell_0(t, w(\cdot))}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}}, \end{cases}$$

$$p_+(s) = -\sqrt{1+\ell_0^2(t, w(\cdot))} + c_H(1+|w(t)|)\Big(\frac{\ell_0(t, w(\cdot))}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}} + |s|\Big).$$

Принимая во внимание данные выражения для величин $p_\mp(s)$, вид (8.3) гамильтониана H и выбор числа c_H, заключаем справедливость неравенств (8.8). Итак, по следствию 2 функционал φ из (8.4) является минимаксным решением уравнения (8.1).

Отметим, что задача Коши (8.1), (8.2) отвечает [13] задаче оптимального управления динамической системой, эволюция которой описывается дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \Gamma(\alpha)(2-\tau)^{1-\alpha}u(\tau), \quad x(\tau) \in \mathbb{R}, \quad u(\tau) \in [-1,1], \quad \tau \in [t,2], \tag{8.9}$$

при начальном условии $x_t(\cdot) = w(\cdot)$, где $(t, w(\cdot)) \in G$, на максимум показателя качества

$$J = x^2(2)/2 + \int_t^2 \sqrt{1-u^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \tag{8.10}$$

Рассмотрим многозначные отображения (см., например, [2, разд. 12.1])

$$[0,2] \times [-1,1] \ni (\tau, u) \mapsto E^+(\tau, u) = \big\{ \big(\Gamma(\alpha)(2-\tau)^{1-\alpha} u, -\sqrt{1-u^2} \big) \big\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$
$$[0,2] \ni \tau \mapsto E^-(\tau) = \mathrm{co} \big\{ \big(\Gamma(\alpha)(2-\tau)^{1-\alpha} u, -\sqrt{1-u^2} \big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \, u \in [-1,1] \big\},$$

где символ co обозначает выпуклую оболочку множества. Имеем $(\Psi^+ = [-1,1], E^+) \in \mathcal{E}^+(H)$ и $(\Psi^- = \{0\}, E^-) \in \mathcal{E}^-(H)$. Более того, согласно принципу динамического программирования (см. [13, теорема 6.1]) функционал цены $\rho : G \to \mathbb{R}$ в задаче (8.9), (8.10) удовлетворяет условиям (φ_1^+) и (φ_1^-) для указанных комплексов (Ψ^+, E^+) и (Ψ^-, E^-) соответственно. Тогда, применяя утверждение 2 с учетом непрерывности функционала ρ (см. [13, теорема 8.3]), получаем, что этот функционал является минимаксным решением уравнения (2.1). В итоге, поскольку для функционала ρ выполняется также и краевое условие (8.2), то функционалы ρ и φ из (8.4) обязаны совпадать. Другими словами, функционал φ является функционалом цены в задаче оптимального управления (8.9), (8.10).

В заключение покажем, что функционал φ не является ci-дифференцируемым порядка α в точках $(t, w(\cdot)) \in G_*$. Будем рассуждать от противного. Рассмотрим сначала функцию $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$, для которой $({}^C D^\alpha x)(\tau) = 0$ при п.в. $\tau \in [t, 2]$. В соответствии с (8.5) для любого $\tau \in (t, 1)$ имеем $a(\tau, x_\tau(\cdot)) = a(t, w(\cdot)) = 0$, а значит $(\tau, x_\tau(\cdot)) \in G_*$. Следовательно, при $\tau \to t + 0$ получаем $\ell_0(\tau, x_\tau(\cdot)) = \sqrt{(2-\tau)^2 - 1} \to \sqrt{(2-t)^2 - 1} = \ell_0(t, w(\cdot))$. Отсюда согласно определению (1.5) ci-дифференцируемости порядка α и соотношению (8.6) вытекает справедливость равенства

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = -\sqrt{1 + \ell_0^2(t, w(\cdot))}. \tag{8.11}$$

Далее, выберем функцию $x'(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ из условия $({}^C D^\alpha x')(\tau) = 1$ при п.в. $\tau \in [t, 2]$. Для каждого $\tau \in (t, 2]$, так как

$$a(\tau, x'_\tau(\cdot)) = a(t, w(\cdot)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^\tau \frac{1}{(2-\xi)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\xi = \frac{(2-t)^\alpha - (2-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} > 0,$$

то $(\tau, x'_\tau(\cdot)) \in G \setminus G_*$ и в силу (8.5) и (8.7) выполняется неравенство $\ell_0(\tau, x'_\tau(\cdot)) \geqslant 0$. Принимая во внимание указанные выше свойства многозначного отображения L_0 из (8.7) и неравенство $\ell_0(t, w(\cdot)) > 0$, получаем $\ell_0(\tau, x'_\tau(\cdot)) \to \ell_0(t, w(\cdot))$ при $\tau \to t + 0$. Стало быть, с учетом (1.5), (8.6) и (8.11) имеем

$$\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = \frac{\ell_0(t, w(\cdot))}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}}. \tag{8.12}$$

Возьмем теперь функцию $x''(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ такую, что $({}^C D^\alpha x'')(\tau) = -1$ при п.в. $\tau \in [t, 2]$. Тогда, проводя аналогичные рассуждения, приходим к соотношениям $\ell_0(\tau, x''_\tau(\cdot)) \to -\ell_0(t, w(\cdot))$ при $\tau \to t + 0$ и

$$-\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) = \frac{\ell_0(t, w(\cdot))}{\Gamma(\alpha)(2-t)^{1-\alpha}}. \tag{8.13}$$

Из (8.12) и (8.13) выводим $\ell_0(t, w(\cdot)) = 0$, что противоречит неравенству $\ell_0(t, w(\cdot)) > 0$ и тем самым завершает обоснование доказываемого утверждения. Таким образом, функционал φ не может рассматриваться как решение задачи Коши (8.1), (8.2) в классическом смысле. Более того, в силу [12, теорема 4.1] классического решения у этой задачи не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
2. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Basel: Birkhäuser, 1995. 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 .

3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Krasovskii N.N., Krasovskii A.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p. ISBN: 0-8176-3698-6.
6. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
7. **Ушаков В.Н., Паршиков Г.В.** Унификация дифференциального включения с параметром в задаче о сближении // Докл. АН. 2017. Т. 477, № 4. С. 406–409. doi: 10.7868/S0869565217340047.
8. **Субботин А.И., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** Обобщенные характеристики уравнений Гамильтона — Якоби // Известия АН. Техническая кибернетика. 1993. № 1. С. 190–197.
9. **Субботина Н.Н.** Метод характеристик для уравнений Гамильтона — Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20. С. 1–129.
10. **Subbotin A.I., Tarasyev A.M.** Stability properties of the value function of a differential game and viscosity solutions of Hamilton — Jacobi equations // Problems Control Inform. Theory. 1986. Vol. 15, № 6. P. 451–463.
11. **Гомоюнов М.И.** Минимаксные решения однородных уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными дробного порядка // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 106–125. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-106-125.
12. **Gomoyunov M.I.** Minimax solutions of Hamilton — Jacobi equations with fractional coinvariant derivatives // ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 2021. (статья послана в печать, arXiv:2011.11306). URL: https://arxiv.org/abs/2011.11306.
13. **Gomoyunov M.I.** Dynamic programming principle and Hamilton — Jacobi — Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020. Vol. 58, iss. 6. P. 3185–3211. doi: 10.1137/19M1279368.
14. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
15. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. NY: Elsevier, 2006. 540 p. ISBN: 0444518320.
16. **Diethelm K.** The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010. 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2.
17. **Kim A.V.** Functional differential equations. Application of i-smooth calculus. Dordrecht: Springer, 1999. 168 p. doi: 10.1007/978-94-017-1630-7.
18. **Лукоянов Н.Ю.** О свойствах функционала цены дифференциальной игры с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 3. С. 375–384.
19. **Lukoyanov N.Yu.** Functional Hamilton — Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. Vol. 8, № 3. P. 365–397.
20. **Лукоянов Н.Ю.** Минимаксные и вязкостные решения в задачах оптимизации наследственных систем // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 183–194.
21. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, 2011. 243 с.
22. **Гомоюнов М.И.** К теории дифференциальных включений с дробными производными Капуто // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 11. С. 1419–1432. doi: 10.1134/S0374064120110011.

Поступила 8.04.2021
После доработки 13.05.2021
Принята к публикации 15.06.2021

Гомоюнов Михаил Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

REFERENCES

1. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* [Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p.
2. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective.* Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 .
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p.
5. Krasovskii N.N., Krasovskii A.N. *Control under lack of information.* Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p. ISBN: 0-8176-3698-6 .
6. Krasovskii N.N. On the problem of unifying differential games. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, no. 1, pp. 269–273.
7. Ushakov V.N., Parshikov G.V. Unification of a differential inclusion with parameter in the guidance problem. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 96, no. 3, pp. 594–597. doi: 10.1134/S1064562417060205 .
8. Subbottin A.I., Taras'ev A.M., Ushakov V.N. Generalized characteristics of Hamilton–Jacobi equations. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 1994, vol. 32, no. 2, pp. 157–163.
9. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 135, no. 3, pp. 2955–3091. (Modern Math. Appl.; vol. 20). doi: 10.1007/s10958-006-0146-2 .
10. Subbotin A.I., Tarasyev A.M. Stability properties of the value function of a differential game and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Problems Control Inform. Theory,* 1986, vol. 15, no. 6, pp. 451–463.
11. Gomoyunov M.I. Minimax solutions of homogeneous Hamilton–Jacobi equations with fractional-order coinvariant derivatives. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 106–125 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-106-125 .
12. Gomoyunov M.I. Minimax solutions of Hamilton–Jacobi equations with fractional coinvariant derivatives. *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 2021. (submitted, arXiv:2011.11306). Available on: https://arxiv.org/abs/2011.11306 .
13. Gomoyunov M.I. Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems. *SIAM J. Control Optim.*, 2020, vol. 58, no. 6, pp. 3185–3211. doi: 10.1137/19M1279368 .
14. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Yverdon: Gordon and Breach Science Publ., 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641 . Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya.* Minsk: Nauka i tekhnika Publ., 1987, 688 p.
15. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations.* N Y: Elsevier, 2006, 540 p. ISBN: 0444518320 .
16. Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations.* Berlin: Springer, 2010, 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2 .
17. Kim A.V. *Functional differential equations. Application of i-smooth calculus.* Dordrecht: Springer, 1999, 168 p. doi: 10.1007/978-94-017-1630-7 .
18. Lukoyanov N.Yu. The properties of the value functional of a differential game with hereditary information. *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 3, pp. 361–370. doi: 10.1016/s0021-8928(01)00041-7 .
19. Lukoyanov N.Yu. Functional Hamilton–Jacobi type equations in *ci*-derivatives for systems with distributed delays. *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 2003, vol. 8, no. 3, pp. 365–397.
20. Lukoyanov N.Yu. Minimax and viscosity solutions in optimization problems for hereditary systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, suppl. 2, pp. S214–S225. doi: 10.1134/s0081543810060179 .
21. Lukoyanov N.Yu. Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei (Functional Hamilton–Jacobi equations and control problems with hereditary information). Ekaterinburg: Ural Federal University Publ., 2011, 243 p.

22. Gomoyunov M.I. To the theory of differential inclusions with Caputo fractional derivatives. *Diff. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1387–1401. doi: 10.1134/S0012266120110014 .

Received April 8, 2021
Revised May 13, 2021
Accepted June 15, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-00073).

Mikhail Igorevich Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com .

Cite this article as: M. I. Gomoyunov. Criteria of minimax solutions for Hamilton–Jacobi equations with coinvariant fractional-order derivatives, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 25–42 .