

УДК 519.711.3

О ДУАЛЬНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ И ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ¹**А. Б. Куржанский, А. А. Усова**

В статье рассматриваются математические модели механики и теории электрических цепей в целях выявления в них подобной динамической структуры. На основе базовых аналогий между механическими и электрическими понятиями и законами авторы осуществляют построение цепи механических пружин и приводят эквивалентный электрический аналог, ссылаясь на примеры “удачных” заимствований, когда методы теории электрических цепей позволяют решать задачи стабилизации механической системы, образованной совокупностью взаимосвязанных механических подсистем.

Ключевые слова: механическая система, электрический контур, дуальность механических и электрических систем, стабилизация взаимодействия систем.

A. B. Kurzhanski, A. A. Usova. On the duality of mathematical models for problems in mechanics and in the theory of electrical circuits.

Mathematical models of mechanics and the theory of electrical circuits are considered, and a similar dynamic structure is revealed in them. Using basic analogies, a chain of mechanical springs and an equivalent electrical analog are constructed. Examples of “successful” borrowings are given, when the methods of the theory of electrical circuits can be used to solve stabilization problems for a mechanical system formed by a set of interconnected mechanical subsystems.

Keywords: mechanical system, electrical circuit, duality of mechanical and electrical systems, stabilization of interconnected systems.

MSC: 93-02, 93D25, 93D15, 93C85

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-115-127

Введение

Представленная статья носит обзорный характер и вместе с тем предлагает к рассмотрению электрический аналог модели “дискретизированной” струны, исследованию которой посвящены, например, работы [1; 2]. Авторы через описание известных аналогий между механическими системами и электрическими контурами показывают, как из элементарных блоков, следуя логике описания механической системы, составить математически аналогичную ей электрическую цепь. Необходимость выяснения двойственности природы математических моделей механических и электрических систем обусловлена следующими причинами:

1. Взаимосвязи между объектами разной природы помогают лучше понять и описать изучаемые процессы.
2. Однообразие в поведении систем, дающее близкие по структуре математические модели, позволяет заимствовать методы решения задач, возникающих, казалось бы, из совершенно не связанных между собою областей знаний.
3. Связь между механическими системами и электрическими цепями дает возможность:
 - представить механическую систему в виде эквивалентной электрической цепи [1; 2], что упрощает экспериментальную часть исследований;
 - электрическую цепь описать в привычных механических терминах для более ясного понимания сути изучаемых явлений.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках проекта 19-11-00105.

Т а б л и ц а 1

Основные законы механики и теории электрических цепей

Механическая система	Электрическая цепь
I закон Ньютона $\sum_{k \in \{\text{Объект}\}}^m \text{Force}_k = 0$	I закон Кирхгофа $\sum_{j \in \{\text{Узел}\}}^n \text{Current}_j = 0$
II закон Ньютона $F = M \cdot a$	Закон Ома $U = R \cdot I$
<ul style="list-style-type: none"> • Закон сохранения энергии • Закон сохранения импульса • Принцип Д'Аламбера — Лагранжа и другие базовые принципы механики 	II закон Кирхгофа (при условии отсутствия ЭДС) $\sum_{k \in \{\text{Контур}\}}^m \text{Voltage}_k = 0$

Для описания поведения электротехнических систем используются законы Кирхгофа, а также законы Ома и сохранения заряда. Описание динамики механических систем основывается на законах Ньютона, базовых законах механики — законах сохранения импульса и энергии, а также на принципе Д'Аламбера — Лагранжа (см. табл. 1).

1. Базовые аналогии

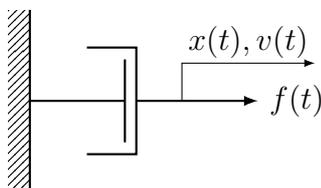
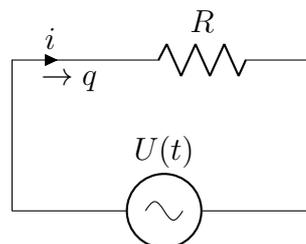
Обратимся к элементарным аналогиям между механическими и электрическими блоками. В механической системе исследуется движение точки x некоторой массы M , электрическим аналогом которого служит перемещение заряда q в электрическом контуре. Ассоциируя силу f с напряжением U , можно заметить некоторые динамические сходства.

Скорость и ток. Скорость v в механической системе соответствует току i в эквивалентном электрическом контуре. С точки зрения динамики коэффициент трения B есть аналог сопротивления R (рис. 1, 2):

$$Bv(t) = B\dot{x}(t) = f(t) \quad \text{и} \quad Ri(t) = R\dot{q}(t) = U(t).$$

Инерция и индуктивность. Масса M движущегося объекта в механической системе ассоциируется с индуктивностью L катушки в соответствующем электрическом контуре. Законы движения тела под воздействием силы $f(t)$ и заряда по электрическому контуру с идеальной катушкой индуктивности L (рис. 3, 4) описываются следующими уравнениями:

$$M\dot{v}(t) = M\ddot{x}(t) = f(t) \quad \text{и} \quad L\frac{di}{dt} = L\ddot{q}(t) = U(t).$$

Рис. 1. Трение с коэффициентом B .Рис. 2. Резистор с сопротивлением R .

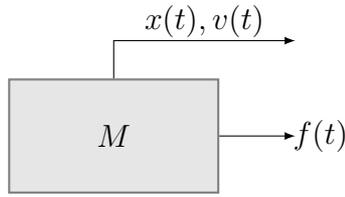


Рис. 3. Движущийся объект массой M .

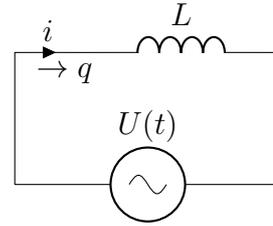


Рис. 4. Катушка с индуктивностью L .

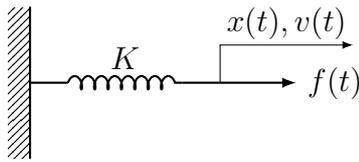


Рис. 5. Пружина жесткостью K .

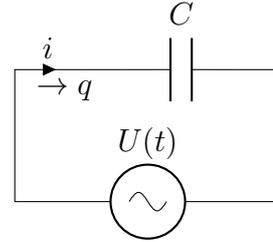


Рис. 6. Конденсатор емкости C .

Жесткость и емкость. Изменение позиции x материальной точки в механической системе соответствует общему электрическому заряду, накопленному в конденсаторе эквивалентной электрической цепи. Коэффициент жесткости K обратно пропорционален емкости конденсатора C (рис. 5, 6):

$$Kx(t) = K \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = f(t) \quad \text{и} \quad \frac{1}{C}q(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = U(t).$$

В итоге можно следующим образом представить динамические аналогии между механической системой и электрическим контуром (табл. 2):

Т а б л и ц а 2

Базовые динамические аналогии

Механическая система	Электрическая цепь
x — положение центра масс	q — электрический заряд
F — сила	U — напряжение
v — скорость ($v = \dot{x}$)	i — ток ($i = \dot{q}$)
M — масса ($M \frac{dv}{dt} = F$)	L — индуктивность ($L \frac{di}{dt} = U$)
B — коэффициент трения ($Bv = F$)	R — сопротивление ($Ri = U$)
K — коэффициент жесткости:	$1/C$ — обратная емкость:
$K \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = K(x - x_0) = F$	$\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = U$
E_K — энергия пружины:	E_C — энергия конденсатора:
$E_K = \frac{1}{2} Kx^2$	$E_C = \frac{1}{2} CU^2$
E_M — энергия массы:	E_L — энергия индуктора:
$E_M = \frac{1}{2} Mv^2$	$E_L = \frac{1}{2} Li^2$

Указанные динамические связи позволяют рассмотреть более сложные модели, которые блочным образом можно скомпоновать, следуя базовым аналогиям. В частности, классическая механическая линейная система (рис. 7), состоящая из закрепленного на пружине с жесткостью K блока некоторой массы M , движущегося с трением B , описывается дифференциальным

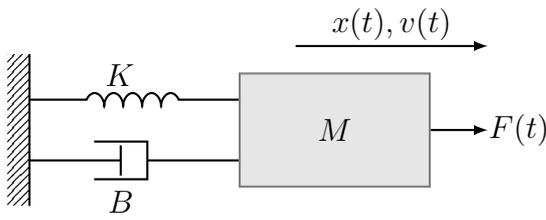


Рис. 7. Линейная механическая система.

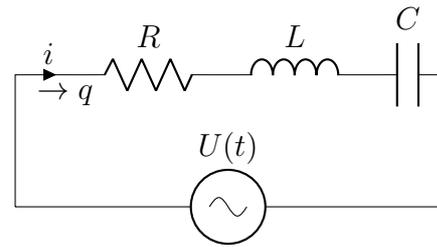


Рис. 8. Электрический контур.

уравнением

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + K(x - x_0) = F \quad \text{или} \quad M\frac{dv}{dt} + Bv + K \int v(t)dt = F.$$

Однако ввиду аналогий, приведенных в табл. 2, такие же уравнения описывают динамику движения заряда в электрическом контуре, изображенном на рис. 8:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U \quad \text{или} \quad L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i(t)dt = U.$$

2. Сложные системы

Сложные динамические системы, состоящие из взаимосвязанных блоков, можно найти как в механических приложениях, так и в электрических цепях.

Механическая система. Рассмотрим трехблочную механическую структуру [1, гл. 4; 3] (рис. 9), в которой каждый из объектов массы M_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) подвешен к другому на пружине жесткости K_i соответственно. Более того, первый и второй блоки движутся с трением B_i ($i \in \{1, 2\}$).

Переменные x_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) отвечают центру масс блоков. Переменные x_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) принимают нулевые значения, когда блоки находятся в состоянии покоя под воздействием только гравитационных сил. Расписывая силы, действующие на каждый из блоков, получим сле-

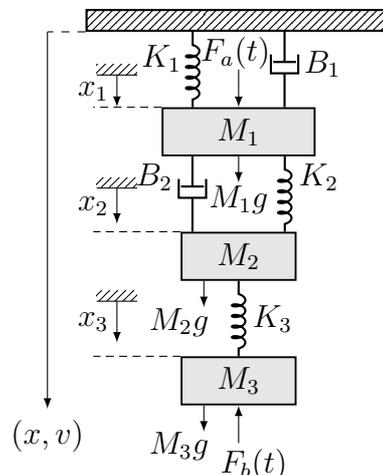


Рис. 9. Механическая блочная система.

дующую динамическую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_a(t) = M_1 \dot{v}_1(t) + (B_1 + B_2)v_1(t) - B_2v_2(t) + K_1x_1(t) + K_2x_2(t), \\ 0 = M_2 \dot{v}_2(t) - B_2v_1(t) + B_2v_2(t) - K_2x_2(t) + K_3x_3(t), \\ -F_b(t) = M_3 \dot{v}_3(t) - K_3x_3(t), \\ \dot{x}_1(t) = v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = v_1(t) - v_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = v_2(t) - v_3(t). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

В классической матричной форме система (2.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{K_2}{M_1} & 0 & -\frac{B_1 + B_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} & 0 \\ 0 & \frac{K_2}{M_2} & -\frac{K_3}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_3}{M_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a \\ -F_b \end{pmatrix}.$$

Здесь роль управления играют внешние силы $(F_a, F_b)^\top$, действующие на систему. Полное состояние системы $(x, v)^\top$ есть выход, т. е.

$$y = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbb{I}_6,$$

где \mathbb{I}_n — единичная матрица порядка n .

Электрический контур. Используя приведенные выше аналогии, нетрудно осуществить переход от механической цепи к электрическому контуру. Динамика системы переписывается с учетом того, что $L_i = M_i$, $C_i = K_i^{-1}$ и $R_i = B_i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$). Ток i_k , в каждом из контуров ($k \in \{1, 2, 3\}$) ассоциируется со скоростью v_k каждого из блоков механической системы, положение x_k аналогично заряду q_k , а роль сил $F_a(t)$ и $F_b(t)$ играют напряжения $U_a(t)$ и $U_b(t)$ соответственно на концах электрической цепи. В итоге механическая система, изображенная на рис. 9, превращается в электрический контур, представленный на рис. 10 (см., например, [3; 4]).

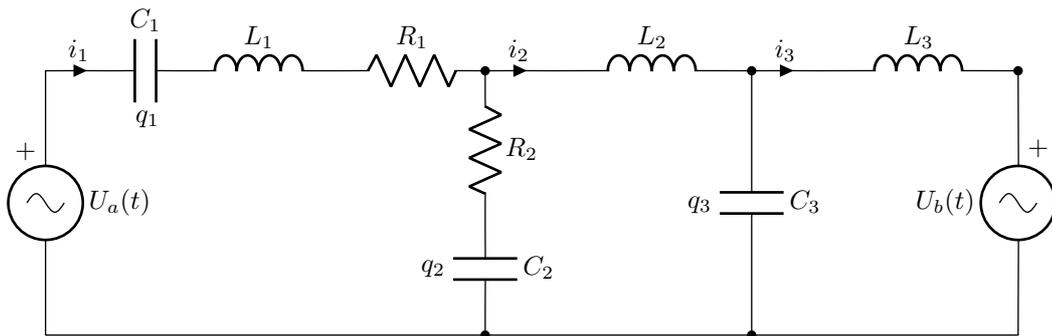


Рис. 10. Электрический контур.

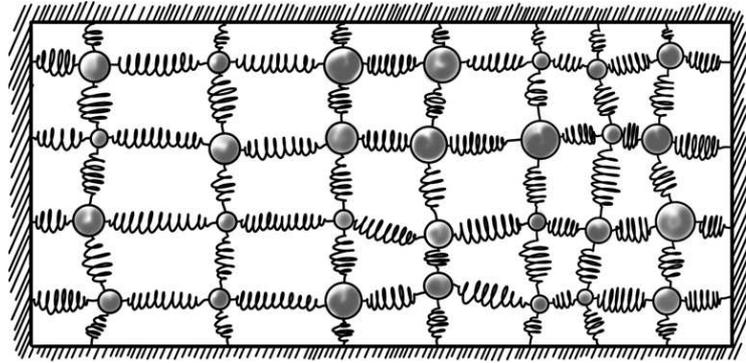


Рис. 11. Плоская сетка пружинных блоков.

Полученная динамическая система принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} U_a(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_1(t) - R_2i_2(t) + \frac{1}{C_1}q_1(t) + \frac{1}{C_2}q_2(t), \\ 0 = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - R_2i_1(t) + R_2i_2(t) - \frac{1}{C_2}q_2(t) + \frac{1}{C_3}q_3(t), \\ -U_b(t) = L_3 \frac{di_3(t)}{dt} - \frac{1}{C_3}q_3(t), \\ \dot{q}_1(t) = i_1(t), \\ \dot{q}_2(t) = i_1(t) - i_2(t), \\ \dot{q}_3(t) = i_2(t) - i_3(t). \end{array} \right.$$

Таким образом, две системы различной природы обладают одинаковыми динамическими свойствами и поведением.

Следующим вопросом в изучении механических движений и электрических цепей является наращивание количества звеньев в их моделях (см. работы [1; 2]). В частности, для приведенного выше примера увеличение механической цепи можно осуществить за счет наращивания количества промежуточных блоков типа (M_2, K_2, B_2) . Для ситуации же с электрическим контуром аналогичным образом “размножаем” среднее звено, отвечающее току i_2 .

Известно, что увеличение количества блоков ведет к тому, что последовательность пружинок будет вести себя подобно струне, подчиняясь волновому уравнению (электрический аналог — телеграфные уравнения).

Вместе с тем открытым остается вопрос не об увеличении количества блоков в цепи той же размерности, а об аналогиях между механическими системами пружинок (мембраны) и электрическими контурами большей размерности [1; 2]. Как, например, будет выглядеть электрический контур для аналогичной системы пружин, изображенных на рис. 11?

3. Стабилизация телеоператорных систем

Приведенные в предыдущем разделе наблюдения дают возможность заимствовать методы исследования одних явлений для изучения других. В частности, широко на практике используются методы стабилизации телеоператорных систем, основанные на преобразовании рассеивания, природа которого носит волновой характер.

Телеоператор — это система, позволяющая выполнять некие действия (*operation*) на расстоянии (*tele-*). В классическую структуру телеоператорной системы входят пять подсистем, а именно оператор (мастер, ставящий задачу), робот-мастер, который напрямую взаимодействует с оператором, канал связи, подчиненный (удаленный) робот и внешняя среда, с кото-

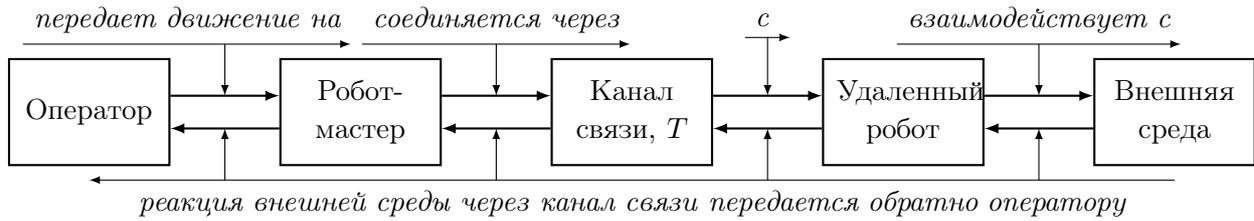


Рис. 12. Структура телеоператора.

рой взаимодействует удаленный манипулятор (рис. 12). Часто предполагают, ссылаясь на ряд исследований (например, [5]), что оператор действует как пассивная система. Робот-мастер, удаленный подчиненный робот и та среда, с которой взаимодействует последний, также во многих ситуациях подчиняются требованию пассивности. Единственное звено в этой системе, не являющееся пассивным и приводящее к дестабилизации всей конструкции [6], — это коммуникационный канал, в котором даже постоянные временные задержки передачи данных негативно влияют на устойчивость системы [7; 8].

Таким образом, возникла задача проектирования такого контроллера, который, во-первых, гарантирует устойчивость всей телеоператорной системы и, во-вторых, решает задачу отслеживания траектории в условиях постоянных задержек по времени в коммуникационном канале. Сразу отметим, что данная задача успешно решена (см. [7–10; 11, гл. 2.6]) при помощи преобразования рассеивания, которое позволяет построить управление, обеспечивающее \mathcal{L}_2 -устойчивость, независимую от задержки, и гарантирует решение задачи отслеживания траектории.

3.1. Динамика телеоператорных систем

Рассмотрим динамическую модель телеоператорной системы (рис. 13). Локальная часть телеоператора, включающая подсистемы оператора (*Human operator*) и мастер-манипулятора (*Master manipulator*), описывается уравнением Эйлера — Лагранжа

$$M_m(q_m)\ddot{q}_m + C_m(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m = \tau_h - \tau_m,$$

где q_m — положение звеньев робота мастера; τ_h — обобщенные силы, описывающие влияние оператора на этот робот; τ_m — обобщенные силы, информация о которых передается от удаленного робота посредством канала связи. Выходным сигналом от локального робота являются скорости \dot{q}_m , передающиеся на удаленную сторону и транслирующиеся оператору. Оператор, взаимодействующий с локальным роботом, ведет себя пассивным образом [5], что описывается

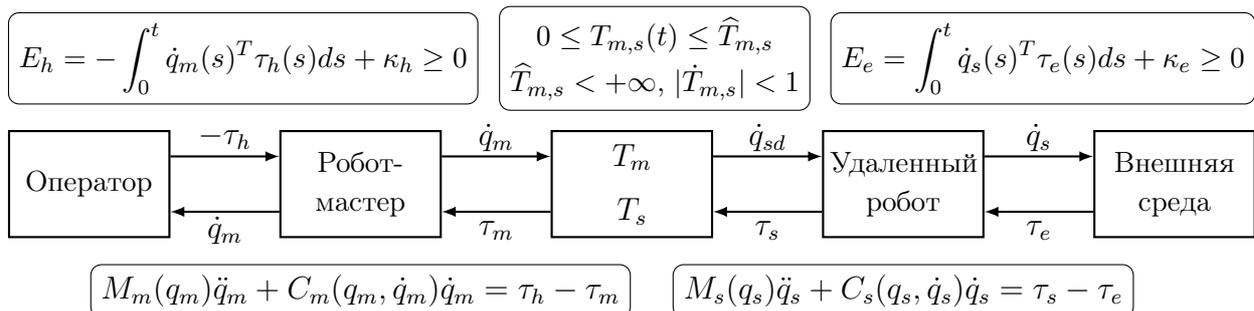


Рис. 13. Динамика телеоператорной системы.

интегралом энергии

$$E_h = \int_0^t (-\tau_h(s))^T \dot{q}_m(s) ds + \kappa_h \geq 0. \quad (3.1)$$

Удаленная часть системы, включающая подсистемы подчиненного робота (Slave) и внешней среды (*Environment*), с которой взаимодействует последний, обладает динамикой

$$M_s(q_s)\ddot{q}_s + C_s(q_s, \dot{q}_s)\dot{q}_s = \tau_s - \tau_e.$$

Здесь q_s — обобщенные координаты звеньев удаленного манипулятора; τ_e — обобщенные силы, испытываемые роботом вследствие взаимодействия с внешней средой; τ_s — силы, вызванные движением удаленного робота и передающиеся в качестве обратной связи на локальную сторону телеоператора. Предполагается, что внешняя среда есть пассивная подсистема, т. е. справедливо неравенство

$$E_e = \int_0^t (\tau_e(s))^T \dot{q}_s(s) ds + \kappa_e \geq 0. \quad (3.2)$$

Канал связи характеризуется задержками в передаче данных с локальной стороны на удаленную $T_m(t)$ и обратно $T_s(t)$, которые, вообще говоря, могут быть непостоянными. Однако предполагается, что известна конечная верхняя оценка времени задержки \hat{T}_i ($0 \leq \hat{T}_i < +\infty$) и ее изменение ограничено сверху $|\dot{\hat{T}}_i(t)| < 1$ ($i \in \{m, s\}$).

Согласно механическим свойствам динамики Эйлера — Лагранжа для телеоператорной системы присущи следующие свойства:

1. Матрицы инерции M_i ограничены:

$$\lambda_{\min}(M_i)\mathbb{I}_{n_i} \leq M_i \leq \lambda_{\max}(M_i)\mathbb{I}_{n_i}, \quad i \in \{m, s\},$$

где $\lambda_{\min}(M)$, $\lambda_{\max}(M)$ — наименьшее и наибольшее собственное значение матрицы M соответственно; \mathbb{I}_{n_i} — единичная матрица порядка n_i . Важно отметить, что матрицы инерции положительно определены.

2. Матрица $\dot{M}_i(q_i(t)) - (C_i(q_i(t), \dot{q}_i(t)) + C_i^\top(q_i(t), \dot{q}_i(t)))$ является кососимметрической ($i \in \{m, s\}$).
3. Кориолисовы и центробежные силы ограничены:

$$\exists \kappa_{C_i} > 0: |C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i| \leq \kappa_{C_i} |\dot{q}_i|^2 \quad \forall q_i, \dot{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i \in \{m, s\}.$$

В работе [8] показано, что телеоператор, взаимодействующий с удаленной подсистемой даже с постоянной задержкой по времени, теряет свойство устойчивости. Поэтому задача состоит в том, чтобы построить такие управления τ_m и τ_s , которые стабилизируют взаимодействие локальной и удаленной подсистем в условиях как постоянных, так и переменных задержек по времени. Дополнительно преследуется цель решения задачи отслеживания траектории, когда в свободном пространстве, т. е. в условиях отсутствия помех, вносимых наличием внешней среды, удаленный робот строго следует той траектории, которую описывает локальный манипулятор.

3.2. Управление на базе оператора рассеивания

Основная идея решения указанной задачи состоит в представлении коммуникационного канала связи как подсистемы, обладающей свойствами и поведением линии электропередач без потерь.

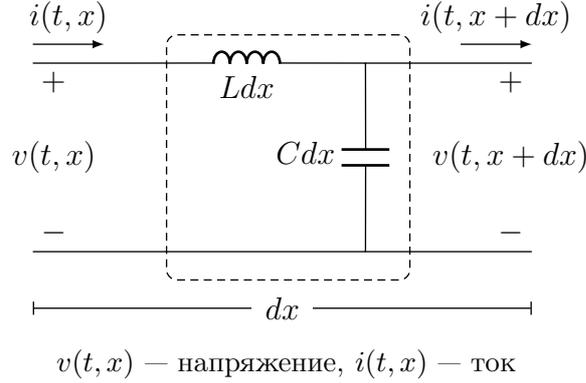


Рис. 14. Бесконечно малый сегмент линии электропередач без потерь.

Линия электропередач без потерь длины ℓ может быть описана как бесконечная серия элементов, состоящих из катушки индуктивностью L и конденсатора с емкостью C между двумя проводниками (см., например, [7; 11, подразд. 1.1.2]). Каждый элемент рассматривается как бесконечно малый отрезок линии передач длины dx (рис. 14). Поведение линии передач описывается телеграфными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} &= -C \frac{\partial v(t, x)}{\partial t}, \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} &= -L \frac{\partial i(t, x)}{\partial t}, \quad x \in [0, \ell]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решением телеграфных уравнений (3.3) служат функции

$$\begin{aligned} v(t, x) &= f^+(\omega vt - \omega x) + f^-(\omega vt + \omega x), \quad x \in [0, \ell], \\ i(t, x) &= \frac{f^+(\omega vt - \omega x)}{Z_0} - \frac{f^-(\omega vt + \omega x)}{Z_0}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

где f^+ представляет волну, идущую в положительном направлении оси x (слева направо), а f^- — волну, идущую справа налево; ω — волновая частота ([рад/м]); $v = 1/\sqrt{LC}$ — скорость распространения волны; $Z_0 = \sqrt{L/C}$ — волновое сопротивление; $T = \ell/v = \ell\sqrt{LC}$ — задержка распространения волны на расстояние ℓ , т. е. задержка в передаче информации по каналу связи длины ℓ со скоростью v . Обозначим “положительную” волну как $f^+(\omega vt - \omega x) = s^+(t, x)$, а “отрицательную” — как $f^-(\omega vt + \omega x) = s^-(t, x)$. По определению аргументов у волновых функций $f^+(\cdot)$ и $f^-(\cdot)$ и равенства $\ell = vT$ на правом конце $x = \ell$ линии передач справедливы соотношения

$$\begin{aligned} s^+(t, \ell) &= f^+(\omega vt - \omega x)|_{x=\ell=vT} = f^+(\omega v(t - T)) = s^+(t - T, 0), \\ s^-(t, \ell) &= f^-(\omega vt + \omega x)|_{x=\ell=vT} = f^-(\omega v(t + T)) = s^-(t + T, 0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, значение волновой переменной $s^+(t, x)$ на правом конце канала связи $x = \ell$ совпадает с ее же значением в начальной точке $x = 0$ с учетом сдвига по времени на задержку T , т. е. $s^+(t, 0) = s^+(t + T, \ell)$. Аналогично для обратной волны значение волновой переменной $s^-(t, x)$, переданное с удаленного конца $x = \ell$, совпадает со значением, принятым на начальном конце $x = 0$ линии передач с учетом задержки T , т. е. $s^-(t, \ell) = s^-(t + T, 0)$.

Взаимосвязь между исходными переменными напряжением $v(t, x)$, током $i(t, x)$ и волновыми переменными $s^+(t, x)$, $s^-(t, x)$ описывается матрицей \mathbf{P} :

$$\begin{pmatrix} s^+(t, x) \\ s^-(t, x) \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} v(t, x) \\ i(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & Z_0 \\ 1 & -Z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Значит, благодаря свойству (3.4) передача через канал связи не исходных сигналов $v(t, x)$, $i(t, x)$, а их линейной комбинации $s^+(t, x)$, $s^-(t, x)$ (3.5) позволит избежать искажения информации и нивелирует влияние помехи, связанной с задержкой по времени.

Данная аналогия с линией электропередач без потерь и легла в основу управления телеоператором с целью устранения неустойчивости, вызванной задержками в канале связи. Вводя в качестве управлений функции

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_m(t) \\ \mathbf{v}_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^-(t, 0) \\ s^+(t, 0) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s(t) \\ \mathbf{v}_s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^+(t, \ell) \\ s^-(t, \ell) \end{pmatrix},$$

получаем, исходя из свойства (3.4), правило взаимодействия подсистем, которое будет задаваться равенством

$$\mathbf{u}_s(t) = \mathbf{v}_m(t + T), \quad \mathbf{u}_m(t) = \mathbf{v}_s(t + T). \quad (3.6)$$

3.3. Устойчивость телеоператора с волновым законом управления

Итак, перенесем идею преобразования исходных сигналов, передающихся посредством канала связи, на язык исходных управлений τ_m и τ_s , задача синтеза которых и решается. Искомые начальные входно-выходные сигналы $(\tau_{md}^\top, \dot{q}_{md}^\top)^\top$ и удаленные входно-выходные сигналы $(\dot{q}_{sd}^\top, \tau_{sd}^\top)^\top$ — по существу, напряжение $v(t, \cdot)$ и ток $i(t, \cdot)$ на разных концах канала связи. Используя замену (3.5), переходим к волновым сигналам

$$\begin{aligned} \tau_{md}(t) + b\dot{q}_{md}(t) &= \mathbf{v}_m(t) = s^+(t, 0), & \tau_{md}(t) - b\dot{q}_{md}(t) &= \mathbf{u}_m(t) = s^-(t, 0), \\ \tau_{sd}(t) + b\dot{q}_{sd}(t) &= \mathbf{u}_s(t) = s^+(t, \ell), & \tau_{sd}(t) - b\dot{q}_{sd}(t) &= \mathbf{v}_s(t) = s^-(t, \ell). \end{aligned}$$

Здесь положительный параметр b , заменивший волновое сопротивление Z_0 , есть один из параметров управления, специфический выбор которого позволяет, например, устранить эффект “отражения волн”, присущий линиям электропередач (подробнее см. [7, разд. 4.3]).

В итоге с учетом свойства (3.6) передаваемых волновых сигналов взаимодействие начальной и удаленной подсистем описывается равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{md}(t) &= \tau_{sd}(t + T_s) + b(\dot{q}_{md}(t) - \dot{q}_{sd}(t + T_s)), \\ \tau_{sd}(t) &= \tau_{md}(t + T_m) + b(\dot{q}_{md}(t + T_m) - \dot{q}_{sd}(t)), \end{aligned}$$

которые гарантируют передачу данных через канал связи без потерь.

В качестве искомых управлений, гарантирующих решение задачи отслеживания траектории $(q_{md}^\top, \dot{q}_{md}^\top)^\top$ и $(q_{sd}^\top, \dot{q}_{sd}^\top)^\top$, используются классические PD-контроллеры (*Proportional-Derivative controllers*) вида

$$\begin{aligned} \tau_m &= B_m \dot{q}_m + \tau_{md}, & \tau_{md} &= K_m \tilde{q}_m + K_{dm} \dot{\tilde{q}}_m, \\ \tau_s &= -B_s \dot{q}_s + \tau_{sd}, & \tau_{sd} &= -K_s \tilde{q}_s - K_{ds} \dot{\tilde{q}}_s, \end{aligned}$$

где $\tilde{q}_i = q_i - q_{id}$ ($i \in \{m, s\}$).

На рис. 15 изображена схема управления телеоператором, которая обеспечивает устойчивость всей системы и решает задачу отслеживания траектории $(q_{md}^\top, \dot{q}_{md}^\top)^\top$. В работе [12] доказано следующее утверждение.

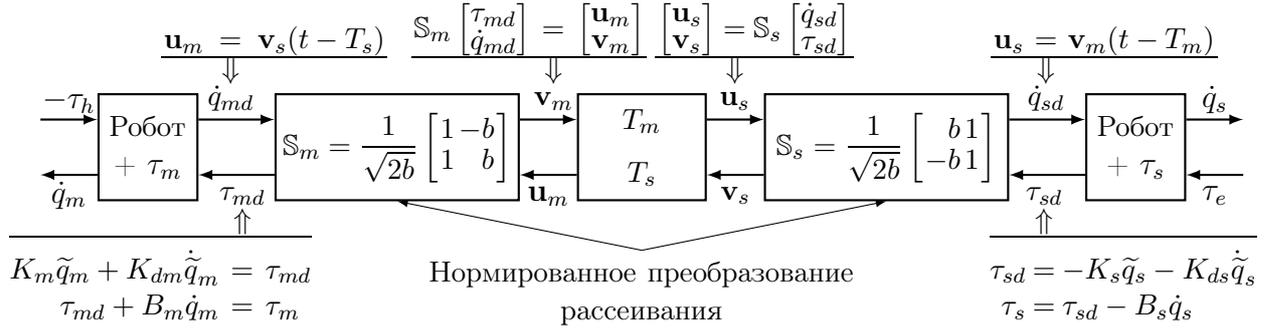


Рис. 15. Управление на базе оператора рассеивания.

Теорема [12, разд. 5.3, теорема 3]. *Для произвольных положительных параметров b, K_{di}, K_i, B_i контроллера и при любой постоянной задержке T_i система ведет себя устойчиво, и ее скорости \dot{q}_i асимптотически сходятся к нулю ($i \in \{m, s\}$).*

Доказательство приведенной теоремы проводится (см. [12, Appendix B; 7, разд. 4.2, утверждение 4]) путем построения функции Ляпунова вида $V = V_1 + V_2 + V_3$, где

$$V_1 = \frac{1}{2} \dot{q}_m^\top M_m \dot{q}_m + \frac{1}{2} \dot{q}_s^\top M_s \dot{q}_s,$$

$$V_2 = E_h + E_s,$$

$$V_3 = \int_0^t (\dot{q}_{md}^\top \tau_{md} - \dot{q}_{sd}^\top \tau_{sd}) ds + \frac{1}{2} K_m |\tilde{q}_m|^2 + \frac{1}{2} K_s |\tilde{q}_s|^2;$$

причем E_h и E_s суть энергии пассивных подсистем оператора (3.1) и внешней среды (3.2), с которыми взаимодействуют локальный и удаленный роботы соответственно.

В качестве вывода отметим, что применение аналогии между механическими переменными (скорость и сила) и электрическими величинами (ток и напряжение) позволило построить такое управление, которое обеспечивает пассивность коммуникационного блока телеоператорной системы и стабилизирует систему целиком, несмотря на возможные задержки при передаче данных.

Заключение

В представленной статье освещены вопросы дуальности механических и электрических систем. Рассмотрены основные элементы каждой из систем и указаны примеры построения их аналогов. В качестве приложений показана модель телеоператорной системы с пассивными блоками, дестабилизация которой возникает вследствие временных задержек в коммуникационной подсистеме. Посредством аналогии с электрическими цепями показано, что передача волновых переменных для электрических систем вместо механических величин (силы и скорости) через канал связи позволяет стабилизировать телеоператорную систему целиком. Переход к волновым переменным осуществляется за счет применения оператора рассеивания к входно-выходным параметрам начальной и удаленной подсистем телеоператора.

В качестве развития представленной тематики сформулирована задача, связанная с увеличением размерности механических систем, т. е. с рассмотрением не одномерной, а многомерной системы пружин (переход от струн к мембранам). И, как следствие, возникает задача построения соответствующего аналога — многомерного электрического контура.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes: Theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1. (Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85).
2. **Абрамова В.В.** О задачах наблюдения и управления для осциллирующей цепи: дипломная работа / фак. вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова; науч. рук. А. Б. Куржанский, 2020. 34 с.
3. **Akbaba M., Dalcı A., Gökdağ M.** Modeling and simulation of complex mechanical systems using electrical circuit analog // Internat. Conf. on Advanced Technologies: Computer Engineering and Science (ICATCES'18): Proceedings. 2018. P. 630–634.
4. **Akbaba M.** Modeling and simulation of dynamic mechanical systems using electric circuit analogy // Turkish J. Engineering. 2021. Vol. 5, no. 3. P. 111–117. doi: 10.31127/tuje.695769.
5. **Hogan N.** Controlling impedance at the man/machine interface // Proc. of the IEEE Conf. on Robotics and Automation. 1989. P. 1626–1631. doi: 10.1109/ROBOT.1989.100210.
6. **Hill D.J., Moylan P.J.** Stability results for nonlinear feedback systems // Automatica. 1977. Vol. 13, no. 4. P. 377–382. doi: 10.1016/0005-1098(77)90020-6.
7. **Nuño E., Basañez L., Ortega R.** Passivity-based control for bilateral teleoperation: A tutorial // Automatica. 2011. Vol. 4, no. 3. P. 485–495.
8. **Anderson R.J., Spong M.W.** Bilateral control of teleoperators with time delay // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. Vol. AC-34, no. 5. P. 494–501.
9. **Polushin I.G.** A generalization of the scattering transformation for conic systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. Vol. 59, no. 7. P. 1989–1995. doi: 10.1109/TAC.2014.2304396.
10. **Usova A.A., Polushin I.G., Patel R.V.** Scattering-based stabilization of non-planar conic systems // Automatica. 2018. Vol. 93. P. 1–11.
11. **Usova Anastasiia.** *Generalized scattering-based stabilization of nonlinear interconnected systems*: Electronic Thesis and Dissertation Repository, 5821. 2018. 168 p. URL: <https://ir.lib.uwo.ca/etd/5821>.
12. **Anderson R.J., Spong M.W.** Asymptotic stability for force reflecting teleoperators with time delay // The International J. Robotics Research. 1992. Vol. 11, no. 2. P. 135–149. doi:10.1177/027836499201100204.

Поступила 4.06.2021

После доработки 26.07.2021

Принята к публикации 9.08.2021

Куржанский Александр Борисович
 академик РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
 зав. кафедрой
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 г. Москва
 e-mail: kurzhans@mail.ru

Усова Анастасия Александровна
 канд. физ.-мат. наук
 старший науч. сотрудник
 Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
 доцент
 Уральский федеральный университет
 г. Екатеринбург e-mail: ausova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: Theory and computation*, Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85, Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.

2. Abramova V.V. *O zadachakh nablyudeniya i upravleniya dlya ostsilliruyushchei tsepi* [Control and observation problems for an oscillating chain], graduate work, Department of Systems Analysis of the faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University (CMC MSU), Moscow: Lomonosov Moscow State University Publ., 2020, 34 p.
3. Akbaba M., Dalcali A., Gökdağ. M. Modeling and simulation of complex mechanical systems using electrical circuit analog In: *Internat. Conf. on Advanced Technologies: Computer Engineering and Science* (ICATCES'18): Proceedings. 2018. P. 630–634.
4. Akbaba M. Modeling and simulation of dynamic mechanical systems using electric circuit analogy. *Turkish J. Engineering*, 2021, vol. 5, no. 3, pp. 111–117. doi: 10.31127/tuje.695769.
5. Hogan N. Controlling impedance at the man/machine interface. *Proc. of the IEEE Conf. on Robotics and Automation*. 1989. P. 1626–1631. doi: 10.1109/ROBOT.1989.100210.
6. Hill D.J., Moylan P.J. Stability results for nonlinear feedback systems. *Automatica*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 377–382. doi: 10.1016/0005-1098(77)90020-6.
7. Nuño E., Basañez L., Ortega R. Passivity-based control for bilateral teleoperation: A tutorial. *Automatica*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 485–495.
8. Anderson R.J., Spong M.W. Bilateral control of teleoperators with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1989, vol. AC-34, no. 5, pp. 494–501.
9. Polushin I.G. A generalization of the scattering transformation for conic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, vol. 59, no. 7, pp. 1989–1995. doi: 10.1109/TAC.2014.2304396.
10. Usova A.A., Polushin I.G., Patel R.V. Scattering-based stabilization of non-planar conic systems. *Automatica*, 2018, vol. 93, pp. 1–11.
11. Usova Anastasiia. *Generalized scattering-based stabilization of nonlinear interconnected systems*. In: Electronic Thesis and Dissertation Repository, 5821. 2018. 168 p. URL: <https://ir.lib.uwo.ca/etd/5821>.
12. Anderson R.J., Spong M.W. Asymptotic stability for force reflecting teleoperators with time delay. *The International J. Robotics Research*, 1992, vol. 11, no. 2, pp. 135–149. doi:10.1177/027836499201100204.

Received June 4, 2021

Revised July 26, 2021

Accepted August 9, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00105).

Alexander Borisovich Kurzhanski, RAS Academician, Prof., Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: kurzhans@mail.ru.

Anastasiia Aleksandrovna Usova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: ausova@imm.uran.ru.

Cite this article as: A.B.Kurzhanski, A.A.Usova. On the duality of mathematical models for problems in mechanics and in the theory of electrical circuits, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 115–127.