ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЭКСПЛУАТИРУЕМЫХ ПОПУЛЯЦИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ИМПУЛЬСНЫМ ОТБОРОМ[1]

А. А. Давыдов, Д. А. Мельник

Динамика популяции, распределенной на торе, описывается уравнением типа Колмогорова — Петровского — Пискунова — Фишера в дивергентной форме. Популяция эксплуатируется путем периодического отбора постоянной распределенной измеримой доли ее плотности. Мы доказываем, что существует доля отбора, доставляющая максимум среднего временного дохода в натуральном виде, т. е. доля, обеспечивающая оптимальный стационарный отбор в долгосрочной перспективе.

Ключевые слова: распределенная популяция, уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова — Фишера, импульсное управление, оптимальное решение.

A. A. Davydov, D. A. Melnik. Optimal states of distributed exploited populations with periodic impulse selection.

The dynamics of a population distributed on a torus is described by an equation of the Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov–Fisher type in the divergence form. The population is exploited by periodic sampling of a constant distributed measurable ratio of its density. We prove that there exists a sampling ratio maximizing the time-averaged income in kind, i.e., a ratio that provides an optimal stationary exploitation in the long run.

Keywords: distributed population, Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov–Fisher equation, impulse control, optimal solution.

MSC: 49J15

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-99-107

1. Введение

Анализ динамики распределенных популяций и ее изменения при различного рода воздействиях на среду обитания или саму популяцию находится в фокусе внимания различных исследовательских групп. Например, модели такой динамики изучались в работах [4; 8; 13; 14] (где также есть и обширная библиография других исследований на эту тему). В последние десятилетия задачи рационального природопользования, сохранения окружающей среды и биоразнообразия (см., например, [7; 14; 19]) повысили востребованность результатов в этой области и усилили внимание ученых к этой тематике [3; 5; 8; 11; 13; 17].

Начиная с середины тридцатых годов прошлого века при анализе динамики плотности распределенной популяции (вещества, энергии, информации и т. п.) с диффузией и насыщением стали активно использоваться модели типа Колмогорова — Петровского — Пискунова — Фишера [12; 15]. Периодичность среды распределения этой плотности естественно приводит к таким моделям на окружности или торе. Например, пластина с периодичностью в двух направлениях, поквартальные посадки леса в шахматном порядке “лиственные — хвойные породы”, поверхность пчелиных сот или другие плоские среды с подобными замощениями доставляют модели на двумерном торе, а процессы в центре достаточно большой трехмерной периодической конструкции естественно рассматривать как процессы на трехмерном торе.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (первый автор — результаты о свойствах функционала качества, проект № 0718-2020-0025) и Российского научного фонда (оба автора — основная теорема, проект № 19-11-00223).

В настоящей работе мы изучаем эксплуатируемую популяцию, распределенную на торе, динамика плотности которой описывается уравнением типа Колмогорова — Петровского — Пискунова — Фишера

$$p_t = (\alpha_{i,j} p_{x_j})_{x_i} + ap - bp^2, \tag{1.1}$$

где по одинаковым индексам идет суммирование, а аргументы функций опущены. Здесь x — точка n-мерного тора $\mathbb{T}^n$, $n \geq 1$; $p = p(x,t)$ — плотность изучаемой популяции в этой точке в момент времени t, а параметры уравнения — матричная функция $\alpha = (\alpha_{i,j})$ и функции a, b на торе — характеризуют диффузию популяции, ее показатели роста и внутривидовой конкуренции в этой точке соответственно. Относительно этих функций предполагаем, что

— элементы матрицы α дифференцируемы, и их производные, а также показатели роста и конкуренции удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым положительным показателем;

— показатель конкуренции положителен, а матрица α положительно определена, т. е. существуют такие положительные константы α_0 и b_0, что для любой точки x тора и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, верно

$$0 < b_0 \leq b(x) \quad \text{и} \quad 0 < \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(x) \xi_i \xi_j.$$

Такие же условия наложены на параметры уравнения (1.1) в работе [4], где изучалась стабилизация плотности распределенной популяции с такой динамикой в периодической среде к стационарному состоянию, включая анализ выживания популяции в долгосрочной перспективе.

Относительно эксплуатации популяции мы предполагаем, что она происходит путем отбора с некоторым положительным периодом T одной и той же измеримой доли плотности популяции q, удовлетворяющей ограничению $0 \leq q \leq 1$. Такие доли отбора будем называть *допустимыми*. Периодичность отбора может быть обусловлена, например, сезонностью отбора или спроса [7; 19]. Таким образом, плотность популяции в точке x тора в момент времени t отбора меняется скачком

$$p(x, t+) = (1 - q(x)) p(x, t-). \tag{1.2}$$

Эту форму эксплуатации можно трактовать как импульсное управление динамикой популяции, и эта форма по существу отличается от постоянного отбора, рассматривавшегося в [9; 10].

Отметим, что в силу наложенных условий на параметры уравнения (1.1) решение (без учета отбора) для любого начального измеримого ограниченного распределения плотности существует и единственно, продолжается на все последующие времена и имеет класс $C^{2+\beta, 1+\beta/2}$ с некоторым положительным β во времена, отделенные от начального, в частности, непрерывно дифференцируемым по пространственной переменной и времени (см., например, [4; 16], а также [18]). Учитывая это, здесь и ниже будем считать, что в точках сбора плотность популяции непрерывна слева, в частности, в (1.2) имеем $p(x, t-) = p(x,t)$. Таким образом, после очередного отбора в момент времени t заданной доли плотности популяции изменение этой плотности до следующего отбора доставляется решением задачи Коши для этого уравнения с начальными данными, доставляемыми (1.2). Принимая во внимание, что эти начальные данные, вообще говоря, лишь измеримы, возникает естественный вопрос с определением решения и его связи с начальными условиями. Поэтому под решением уравнения (1.1) будем понимать функцию, лежащую в $W_2^{1,0}(\mathbb{T}^n \times (0, \tau))$ при любом конечном $\tau > 0$ и удовлетворяющую равенству

$$\int\limits_{Q_\infty} (-p\eta_t + \alpha_{i,j} p_{x_j} \eta_{x_i}) dx dt - \int\limits_{\mathbb{T}^n} p\eta|_{t=0} dx = \int\limits_{Q_\infty} [ap - bp^2] \eta dx dt, \tag{1.3}$$

где $Q_\infty = \mathbb{T}^n \times (0, \infty)$ для любой дифференцируемой функции η с ограниченным носителем (см. [16, гл. I, формула (3.2_3)]; здесь, как и выше, по одинаковым индексам идет суммирование, а аргументы функций опущены).

Основная задача — обеспечить максимальный средний временной доход от эксплуатации популяции в натуральном виде, т. е. найти такую допустимую долю отбора и подходящую динамику $p = p(x,t)$ плотности популяции, что функционал

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{T}^n} q(x)p(x,kT)dx \tag{1.4}$$

принимает наибольшее значение. Здесь нулевое время — это начало процесса, а момент $t = T$ — время первого отбора плотности популяции. Мы доказываем, что существует допустимая доля отбора, которая обеспечивает максимальный средний временной доход от эксплуатации популяции в натуральном виде на подходящем T-периодическом решении уравнения (1.1).

Отметим, что результат остается справедливым и для динамики (1.1) при более слабых ограничениях на параметры уравнения, например, функции a и b можно взять кусочно-непрерывными или просто измеримыми и ограниченными, или вместо члена реакции в логистической форме использовать произвольную непрерывную функцию f, $f = f(x,p), f(x,0) \equiv 0$, дважды дифференцируемую по плотности p, строго вогнутую по ней, а также отрицательную при достаточно больших ее значениях. Также можно рассматривать и более общий вид функционала качества, например, когда подынтегральная функция в (1.4) учитывает имеющийся в распоряжении ресурс для отбора доли популяции, его распределение в ареале обитания и сложность обнаружения или отбора плотности популяции в различных точках ареала. Такие функционалы рассматривались в работах [3; 5; 6], в которых диффузия плотности популяции отсутствовала и, таким образом, закон восстановления популяции был поточечным.

Также отметим, что если популяция вымирает при отсутствии эксплуатации, то значение функционала (1.4) будет нулевым при любом выборе допустимой доли отбора, и тогда любая из них обеспечивает это значение функционала и таким образом является наилучшей. Это, конечно, указывает на неестественность рассматриваемой постановки задачи в таких случаях. Здесь актуальными становятся задачи получения максимального дохода от эксплуатации на бесконечном горизонте без усреднения по времени, но, возможно, с дисконтированием. С задачами такого вида можно ознакомиться в работе [1] или обзоре [2].

2. Основные результаты

Здесь сформулированы основные результаты работы: сначала о свойствах функционала качества (1.4) на множестве допустимых долей отбора, а затем о существовании такой доли отбора, которая доставляет максимальное значение этого функционала.

2.1. О свойствах функционала качества

В силу наложенных условий на параметры уравнения (1.1) достаточно большая положительная константа M является суперрешением этого уравнения, что нетрудно видеть. При отсутствии отбора (т. е. при $q = 0$) плотность популяции с ненулевым ограниченным неотрицательным измеримым начальным распределением (в частности, при $p(x,0) = M$) при $t \to \infty$ стремится равномерно по тору к стационарному неотрицательному предельному распределению p_∞, $p_\infty = p_\infty(x)$ [4]. Это предельное распределение, таким образом, является глобальным аттрактором решений с ненулевыми неотрицательными начальными распределениями. Отсюда непосредственно вытекают

Предложение 1. *Для любого допустимого отбора и любого ограниченного неотрицательного измеримого начального распределения популяции значение функционала качества* (1.4) *определено и не превосходит* $\int_{\mathbb{T}^n} p_\infty(x)q(x)dx$, *в частности, этот функционал ограничен.*

Предложение 2. *При выбранной допустимой доле отбора в ходе поиска наибольшего значения функционала качества* (1.4) *достаточно ограничиться неотрицательными начальными распределениями популяции* $p_0 = p_0(x)$, *не превосходящими* p_∞, *т. е.* $0 \le p_0 \le p_\infty$.

В силу предложения 1 при нулевом предельном распределении популяции p_∞ нулевым является и значение функционала качества (1.4) для любых допустимого отбора и ограниченного неотрицательного измеримого начального распределения популяции.

Если предельное распределение p_∞ ненулевое, то оно всюду положительное, а однозначно определенное (главное) собственное число λ, для которого разрешима задача

$$-(\alpha(x)\phi_x)_x - a(x)\phi = \lambda\phi, \quad \phi > 0, \tag{2.1}$$

на торе, отрицательно (отметим, что при наложенных условиях на α и a это решение имеет класс $C^{2+\beta}$ с некоторым $\beta > 0$, и после нормировки, например, $||\phi||_2 = 1$, оно однозначно определяется; здесь и ниже $||\cdot||_2$ — норма в $L_2(\mathbb{T}^n)$). Верно и обратное: если это значение отрицательно, то предельное распределение популяции p_∞ положительно [4]. Нулевое решение уравнения (1.1) называется *устойчивым*, если это значение неотрицательно, и *неустойчивым* в противном случае.

Таким образом, $p_\infty \equiv 0$ и $p_\infty > 0$, если нулевое решение устойчиво и неустойчиво соответственно. В последнем случае справедливо

Предложение 3. *Если* $p_\infty > 0$, *то существуют допустимая доля отбора и неотрицательное начальное распределение популяции, для которых значение функционала качества* (1.4) *положительно. В частности, точная верхняя грань значений этого функционала по всем допустимым долям отбора и начальным неотрицательным ограниченным распределениям популяции также положительна.*

2.2. Существование оптимального решения

Биологический смысл предложения 3 очень простой: если без эксплуатации популяция выживает, а именно $p_\infty > 0$, то существует допустимая доля отбора, которая обеспечивает положительный средний временной доход (1.4) от эксплуатации, т. е. эксплуатацию популяции в долгосрочной перспективе с таким доходом в натуральном виде.

Естественным является вопрос существования допустимой доли отбора и подходящего начального распределения популяции, которые доставляют максимум этого дохода. На него отвечает следующая теорема.

Теорема. *Если* $p_\infty > 0$, *то существуют допустимая доля отбора и неотрицательное начальное распределение популяции, для которых значение функционала качества* (1.4) *максимально возможное.*

3. Доказательства

Сначала мы доказываем предложение 3, а затем основной результат — теорему.

3.1. Доказательство предложения 3

Поскольку $p_\infty > 0$, то собственное число λ задачи (2.1) отрицательно [4]. Возьмем однозначно определенную положительную собственную функцию ϕ, $||\phi||_2 = 1$, этой задачи и, подставив функцию $p = \delta\phi$ при некотором положительном числе δ в правую часть уравнения (1.1), получим

$$(\alpha(x)\delta\phi_x(x))_x + a(x)\delta\phi(x) - b(x)\delta^2\phi^2(x) = \delta\phi(x)[-\lambda - \delta b(x)\phi(x)].$$

При достаточно малом $\delta = \delta_0 > 0$ выражение в квадратных скобках в правой части последнего уравнения положительно в силу отрицательности числа λ и ограниченности функций b и ϕ. Следовательно, положительная дифференцируемая функция $\phi_0 = \delta_0 \phi$ является стационарным субрешением уравнения (1.1), и, в частности, для решения p этого уравнения с начальным распределением $p(x, 0) = \phi_0(x)$ всюду на торе справедливо неравенство

$$p(x, 0) < p(x, T). \tag{3.1}$$

Для этого решения в момент времени $t = T$ произведем отбор плотности популяции с долей

$$q = 1 - \max_{x \in \mathbb{T}^n} \frac{p(x, 0)}{p(x, T)}. \tag{3.2}$$

Эта доля отбора постоянна на торе, положительна в силу непрерывности функций в (3.1) и допустима, что нетрудно видеть. Для значения плотности популяции $p(x, T+) = (1 - q)p(x, T)$ после такого отбора имеем

$$(1 - q)p(x, T) = p(x, T) \max_{x \in \mathbb{T}^n} \frac{p(x, 0)}{p(x, T)} \geq p(x, 0).$$

Таким образом, это значение не меньше, чем начальная плотность популяции.

Следовательно, в силу обобщенного принципа максимума для квазилинейных равномерно параболических уравнений (см. [16, гл. 3, теорема 7.1]) после каждого последующего отбора плотности популяции с долей отбора (3.2) мы будем получать начальное распределение плотности популяции для ее эволюции до следующего отбора не меньшее, чем $p(x, 0)$, т. е. $p(x, kT+) \geq p(x, 0)$ для любого натурального k. Отсюда находим, что для эволюции плотности популяции с начальным распределением $p(x, 0)$ и T-периодическим отбором с долей q из (3.2) верно

$$p(x, kT) \geq p(x, T).$$

Последнее неравенство вместе с неравенством (3.1) приводит к следующей оценке снизу для значения функционала (1.4) при выбранной доле отбора q и решении p:

$$\varliminf_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{T}^n} q(x)p(x, kT)dx \geq q \int_{\mathbb{T}^n} p(x, T)dx > q \int_{\mathbb{T}^n} p(x, 0)dx = q \int_{\mathbb{T}^n} \phi_0(x)dx.$$

Но функция ϕ_0 всюду положительна по своему выбору, и доля отбора q также положительна. Следовательно, справедливо утверждение предложения 3.

3.2. Доказательство теоремы

Зафиксируем допустимую долю отбора q, $q = q(x)$, и рассмотрим плотность популяции p, доставляемую при таком отборе решением уравнения (1.1) с начальным распределением, равным предельному распределению p_∞ (при отсутствии отбора). В силу стационарности этого предельного распределения имеем $p(x, T) = p_\infty(x)$. Следовательно, $0 \leq p(x, T+) = (1 - q(x))p_\infty(x) \leq p_\infty(x)$, поскольку $0 \leq q(x) \leq 1$. Отсюда в силу обобщенного принципа максимума имеем

$$0 \leq p(x, 2T) \leq p(x, T)$$

и, используя дополнительно индукцию по номеру отбора, аналогично находим

$$0 \leq p(x, (k + 1)T) \leq p(x, kT)$$

для любого натурального k.

Таким образом, получаем невозрастающую последовательность неотрицательных функций $\{p(\cdot, kT)\}_{k=1}^{\infty}$ на торе

$$p_{\infty}(x) = p(x,T) \geq p(x,2T) \geq p(x,3T) \geq \cdots \geq p(x,kT) \cdots \geq 0.$$

Следовательно, она сходится на торе поточечно к некоторой предельной неотрицательной функции $p_q, p_q = p_q(x)$. Эта сходимость равномерная, поскольку в предположениях, сделанных на коэффициенты уравнения (1.1), производные его решения по пространственной переменной становятся ограниченными, если по времени отступить от начального момента (или момента отбора) и взять ограниченные измеримые начальные данные (см. [16, гл. 5, теорема 3.1]).

Отсюда получаем, что эта предельная функция p_q удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой, а сходимость к ней является равномерной. В частности, функция p_q непрерывна, а начальные условия для эволюции плотности в соответствии с уравнением (1.1) после последнего отбора и до последующего сходятся сильно к предельному начальному условию $(1-q)p_q$ в равномерной метрике, т. е.

$$p(x, kT+) = (1-q(x))p(x,kT) \rightrightarrows (1-q(x))p_q(x)$$

при $k \to \infty$.

Понятно, что предельное начальное условие приводит к T-периодическому решению P_q, $P_q = P_q(x,t)$, для эволюции плотности популяции в соответствии с уравнением (1.1) при выбранном отборе и что при $k \to \infty$ последовательность плотностей популяции $\tilde{p}_k$, $\tilde{p}_k(x,t) := p(x, kT+t)$, $t \geq 0$, сходится к этой функции равномерно на $\mathbb{T}^n \times \{t \geq 0\}$.

В частности, значение нашего функционала качества (1.4) для выбранной доли отбора q и начального распределения плотности $p(x,0) = p_{\infty}(x)$ вычисляется как

$$F(q) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} p_q(x) q(x) dx. \tag{3.3}$$

Для этой доли отбора это значение является максимально возможным значением функционала (1.4) по всем измеримым ограниченным начальным распределениям популяции на торе в силу предложения 2 и обобщенного принципа максимума.

Теперь рассмотрим точную верхнюю грань $F_{\max}$ значений функционала (3.3) и максимизирующую последовательность допустимых долей отбора $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ и соответствующих T-периодических решений эволюции плотности популяции $\{P_{q_m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Последовательность $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ лежит в ограниченном выпуклом замкнутом множестве допустимых долей отбора в пространстве $L_2(\mathbb{T}^n)$. В силу этого из нее можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность с пределом в этом множестве. Не нарушая общности, считаем что сама последовательность является таковой, и она слабо сходится к некоторой допустимой доле отбора q_{∞}.

Рассмотрим теперь последовательность соответствующих предельных T-периодических решений $\{P_{q_m}\}_{m=1}^{\infty}$ и последовательности функций на торе $\{P_{q_m}(\cdot, T/k)\}_{m=1}^{\infty}$ при натуральных $k = 2, 3, \ldots$. В предположениях, сделанных на коэффициенты уравнения (1.1), и в силу ограниченности начальных данных производные этих решений по пространственной переменной становятся ограниченными, если отступить от начального момента времени [16]. Следовательно, каждая из последовательностей функций $\{P_{q_m}(\cdot, T/k)\}_{m=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна и ограничена, и в силу теоремы Арцела — Асколи из нее можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Сначала сделаем это при $k=2$, затем из отобранных выберем равномерно сходящуюся при $k=3$ и так далее. После этого выберем диагональную последовательность соответствующих решений: первое решение — это первое решение из первой отобранной подпоследовательности, второе — это второе из второй и так далее. В итоге мы получим последовательность решений, равномерно сходящуюся к некоторому решению P_∞ на $\mathbb{T}^n \times [\tau, T]$ при любом положительном τ, $0 < \tau \le T$. Соответствующие начальные условия также сходятся слабо в силу слабой сходимости отобранной последовательности долей отбора и равномерной сходимости значений этих решений при $t = T$.

Отсюда получаем, что P_∞ удовлетворяет уравнению (1.3) при начальных условиях

$$P_\infty(x, 0) = (1 - q_\infty(x))P_\infty(x, T),$$

поскольку ему удовлетворяют соответствующие допредельные функции. Следовательно, решение P_∞ является T-периодическим решением, соответствующим доле отбора q_∞.

Но при $m \to \infty$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} P_{q_m}(x, T) q_m(x) dx \to F_{\max}.$$

Откуда сразу получаем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} P_\infty(x, T) q_\infty(x) dx = F_{\max}$$

в силу слабой сходимости последовательности $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ и равномерной сходимости отобранных решений на $\mathbb{T}^n \times [\tau, T]$ при любом положительном τ, $0 < \tau \le T$.

Следовательно, пара из допустимой доли отбора q_∞ и T-периодическая эволюция плотности P_∞ при такой доле отбора доставляют максимально возможное значение функционала качества (1.4).

Теорема доказана.

Авторы признательны В. Н. Денисову, А. И. Назарову, М. Д. Сурначеву и Т. А. Суслиной за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асеев С.М., Бесов К.О., Каниовский С.Ю.** Оптимизация экономического роста в модели Дасгупты — Хила — Солоу — Стиглица при непостоянной отдаче от расширения масштабов производства // Тр. МИАН. 2019. Vol. 304. P. 83–122.
2. **Асеев С.М., Вельов В.М.** Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // Успехи мат. наук. 2019. Vol. 74, № 6 (450). С. 3–54.
3. **Беляков А.О., Давыдов А.А.** Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Vol. 22, № 2. С. 38–46.
4. **Berestycki H., Francois H., Roques L.** Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence // J. Math. Biology. 2005. Vol. 51, № 1. С. 75–113. doi: 10.1007/s00285-004-0313-3 .
5. **Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M.** Optimal cyclic exploitation of renewable resources // J. Dyn. Control Syst. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 475–494. doi: 10.1007/s10883-015-9271-x .
6. **Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M.** Optimal cyclic harvesting of renewable resource // Dokl. Math. 2017. Vol. 96, no. 2. P. 472–474. doi: 10.1134/S1064562417050180 .
7. **Cohen P.J., Foale, S.J.** Sustaining small-scale fisheries with periodically harvested marine reserves // Marine Policy. 2013. Vol. 37. P. 278–287. doi: 10.1016/j.marpol.2012.05.010 .
8. **Daners D., Medina P.** Abstract evolution equations. Periodic problems and applications. London: Longman Scientific & Technical, 1992. 249 p. (Pitman Research Notes in Mathematics Series; vol. 279.)
9. **Давыдов А.А.** Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией // Тр. МИАН. 2020. Vol. 310. P. 135–142. doi: 10.4213/tm4143 .
10. **Davydov A.A.** Optimal steady state of distributed population in periodic environment // AIP Conf. Proc. 2021. Vol. 2333, art.-no. 120007. doi: 10.1063/5.0041960 .
11. **Du Y., Peng R.** The periodic logistic equation with spatial and temporal degeneracies // Trans. Amer. Math. Soc. 2012. Vol. 364. P. 6039–6070. doi: 10.1090/S0002-9947-2012-05590-5 .
12. **Fisher R. A.** The wave of advance of advantageous genes // Annals of Eugenics. 1937. Vol. 7, no. 4. P. 353–369. doi: 10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x .

13. **Henderson K., Loreau M.** An ecological theory of changing human population dynamics // People Nature. 2019. Vol. 1, no. 1. P. 31–43. doi: 10.1002/pan3.8 .
14. **Hess P.** Periodic-parabolic boundary value problems and positivity. N Y: John Wiley & Sons, 1991. 139 p. (Pitman Research Notes in Math. Ser.; vol. 247).
15. **Kolmogorov A.N., Petrovskii I.G., Piskunov N.S.** A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem // Bull. Moscow Univ. Math. Mech. 1937. Vol. 1, no. 6. P. 1–26. Reprinted in: V.M. Tikhomirov (ed.) Selected Works of A.N. Kolmogorov, 1991, vol. 1, Dordrecht: Kluwer, 1991, pp. 242–270.
16. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. 736 p.
17. **Medina P.K.** Feedback stabilizability of time-periodic parabolic equations // Dynamics Reported. Dynamics Reported (Expositions in Dynamical Systems) / eds. C.K.R.T. Jones, U. Kirchgraber, H.O. Walther. Vol 5. Berlin; Heidelberg: Springer, 1996. doi: 10.1007/978-3-642-79931-0_2 .
18. **Nadin G.** Existence and uniqueness of the solution of a space-time periodic reaction-diffusion equation // J. Diff. Eq. 2010. Vol. 249, no. 6. P. 1288–1304. doi: 10.1016/j.jde.2010.05.007 .
19. **Undersander D., Albert B., Cosgrove D., Johnson D., Peterson P.** Pastures for profit: A guide to rotational grazing (A3529). Madison: Cooperative Extension Publishing, University of Wisconsin-Extension, 2002. 43 p.

Поступила 30.03.2021
После доработки 12.04.2021
Принята к публикации 19.04.2021

Давыдов Алексей Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Национальный исследовательский технологический университет МИСиС
г. Москва
e-mail: davydov@mi-ras.ru

Мельник Джамиля Артуровна
студент
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: dzhamilya.saidzhanova@gmail.com

REFERENCES

1. Aseev S.M., Besov K.O., Kaniovski S.Yu. Optimal policies in the Dasgupta–Heal–Solow–Stiglitz model under nonconstant returns to scale. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 304, pp. 74–109. doi: 10.1134/S0081543819010061 .
2. Aseev S.M., Veliov V.M. Another view of the maximum principle for infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russian Math. Surveys*, 2019, vol. 74, no. 6, pp. 963–1011. doi: 10.1070/RM9915 .
3. Belyakov A., Davydov A.A. Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 14–21. doi: 10.1134/S0081543817090036 .
4. Berestycki H., Francois H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence. *J. Math. Biol.*, 2005, vol. 51, no. 1, pp. 75–113. doi: 10.1007/s00285-004-0313-3 .
5. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources. *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 475–494. doi: 10.1007/s10883-015-9271-x .
6. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic harvesting of renewable resource. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 96, no. 2, pp. 472–474. doi: 10.1134/S1064562417050180 .
7. Cohen P.J., Foale S.J. Sustaining small-scale fisheries with periodically harvested marine reserves. *Marine Policy*, 2013, vol. 37, pp. 278–287. doi: 10.1016/j.marpol.2012.05.010 .
8. Daners D., Medina P. *Abstract evolution equations, periodic problems and applications.* London: Longman Scientific & Technical, 1992, Pitman Research Notes in Mathematics Series 279, 249 p. ISBN: 0-582-09635-9 .

9. Davydov A.A. Existence of optimal stationary states of exploited populations with diffusion. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 310, pp. 124–130. doi: 10.1134/S0081543820050090 .
10. Davydov A.A. Optimal steady state of distributed population in periodic environment. *AIP Conf. Proc.*, 2021, vol. 2333, art.-no. 120007. doi: 10.1063/5.0041960 .
11. Du Y., Peng R. The periodic logistic equation with spatial and temporal degeneracies. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2012, vol. 364, pp. 6039–6070. doi: 10.1090/S0002-9947-2012-05590-5 .
12. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics*, 1937, vol. 7, no. 4, pp. 353–369. doi: 10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x .
13. Henderson K., Loreau M. An ecological theory of changing human population dynamics. *People Nature*, 2019, vol. 1, no. 1, pp. 31–43. doi: 10.1002/pan3.8 .
14. Hess P. *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity.* N Y: John Wiley & Sons, 1991, Pitman Research Notes in Mathematics Ser., vol. 247, 139 p. ISBN: 0-582-06478-3 .
15. Kolmogorov A.N., Petrovskii I.G., Piskunov N.S. A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem. *Bull. Moscow Univ. Math. Mech.*, 1937, vol. 1, no. 6, pp. 1–26. Reprinted in: V.M. Tikhomirov (ed.) Selected Works of A. N. Kolmogorov, vol. 1, Dordrecht: Kluwer, 1991, pp. 242–270. ISBN: 90-277-2796-1 .
16. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Providence, R.I.: AMS, 1968, 648 p. ISBN: 978-0-8218-1573-1 . Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa*. Moscow: Nauka Publ., 1967, 736 p.
17. Medina P.K. Feedback stabilizability of time-periodic parabolic equations. In: C.K.R.T. Jones, U. Kirchgraber, H.O. Walther (eds.) *Dynamics Reported*. Dynamics Reported (Expositions in Dynamical Systems), vol. 5. Berlin; Heidelberg: Springer, 1996, pp. 26–98. doi: 10.1007/978-3-642-79931-0_2 .
18. Nadin G. Existence and uniqueness of the solution of a space-time periodic reaction-diffusion equation. *J. Diff. Eq.*, 2010, vol. 249, no. 6, pp. 1288–1304. doi: 10.1016/j.jde.2010.05.007 .
19. Undersander D., Albert B., Cosgrove D., Johnson D., Peterson P. *Pastures for profit: A guide to rotational grazing (A3529).* Cooperative Extension Publishing, University of Wisconsin-Extension, 2002.

Received March 30, 2021
Revised April 12, 2021
Accepted April 19, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (the first author, results on the properties of the quality functional, project no. 0718-2020-0025) and by the Russian Science Foundation (both authors, main theorem, project no. 19-11-00223).

Alexey Alexandrovich Davydov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119992 Russia; National University of Science and Technology MISIS, Moscow, 119049 Russia, e-mail: davydov@mi-ras.ru .

Dzhamilia Arturovna Melnik, undergraduate student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119992 Russia. e-mail: dzhamilya.saidzhanova@gmail.com .

Cite this article as: A. A. Davydov, D. A. Melnik. Optimal states of distributed exploited populations with periodic impulse selection, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 99–107 .