ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.71

УСТОЙЧИВОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Х. Акча, В. И. Максимов

В статье рассматривается задача граничного управления дифференциальным уравнением с распределенными параметрами. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы заданное качество управляемого процесса, а именно, отслеживание решением этого уравнения решение другого уравнения, подверженного влиянию неизвестного возмущения. Методы решения подобного типа задач для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, хорошо известны и излагаются, в частности, в рамках теории позиционного управления. В настоящей работе мы исследуем задачу слежения, в которой роль объекта управления играет уравнение с распределенными параметрами. При этом предполагаем, что решения уравнений измеряются с ошибкой, а относительно возмущения известно лишь, что оно является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т.е может быть неограниченным. Учитывая данные особенности задачи, мы конструируем устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритмы ее решения, которые основаны на сочетании элементов теории некорректных задач с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига.

Ключевые слова: системы с распределенными параметрами, управление.

H. Akca, V. I. Maksimov. Stable boundary control of a parabolic equation.

A problem of boundary control is considered for a differential equation with distributed parameters. It is required to design an algorithm that forms a feedback control and guarantees a prescribed quality of the controlled process. More exactly, the solution of this equation should track the solution of another equation, which is subject to an unknown perturbation. Methods for solving problems of this type for systems described by ordinary differential equations are well known and are presented, in particular, within the theory of positional control. In the present paper, we study a tracking problem in which the role of the control object is played by an equation with distributed parameters. It is assumed that the solutions of the equations are measured with an error, and the only available information about the perturbation is that it is an element of the space of functions summable with the square of the Euclidean norm; i.e., the perturbation can be unbounded. Taking into account these features of the problem, we design solution algorithms that are stable under information disturbances and computational errors. The algorithms are based on a combination of elements of the theory of ill-posed problems with the extremal shift method known in the theory of positional differential games.

Keywords: systems with distributed parameters, control.

MSC: 93B52, 93C20

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-7-18

1. Введение. Постановка задачи

Теория управления системами с распределенными параметрами — один из важных разделов теории оптимизации. В последние годы в рамках указанной теории пристальное внимание уделялось задачам граничного управления (см., например, монографии [1–5]). При этом основное количество публикаций было посвящено задачам программного управления. В настоящей работе мы рассмотрим задачу позиционного граничного управления (см. также работы [6–13]). Суть обсуждаемой задачи такова. На фиксированном промежутке времени рассматриваются два параболических уравнения с краевыми условиями Неймана (второго рода) или Робина (третьего рода). Предполагается, что в краевых условиях одного из них присутствует неизвестное возмущение. В течение всего промежутка времени решения уравнений измеряются с ошибкой. Второе уравнение в краевых условиях содержит управляющее воздействие, которое необходимо формировать согласно законам обратной связи по результатам измерений таким образом, чтобы решения уравнений были близки в соответствующей метрике. Такова содержательная постановка рассматриваемой задачи.

Перейдем к строгой постановке. Сначала остановимся на случае, когда в качестве рассматриваемых уравнений берутся так называемые уравнения Шлогла (Schlogl). Уравнение Шлогла впервые было введено в работе [14] с целью описания химической реакции неравновесного фазового перехода. В нейрологии то же уравнение известно под названием уравнения Нагумо, моделирующего процесс активной передачи пульса. Оно представляет собой параболическое уравнение с кубической нелинейностью. Задачи управления этим уравнением рассматривались, например, в работах [15–18].

Итак, рассмотрим нелинейное уравнение с краевыми условиями Робина

$$\begin{aligned} &x_t(t,\eta) - x_{\eta\eta}(t,\eta) + K\varphi(x(t,\eta)) = b(t,\eta)u(t,\eta) \text{ в } Q_T,\\ &x_\eta(t,0) - Cx(t,0) = b_1(t)u_1(t) \text{ на } (0,\vartheta),\\ &x_\eta(t,L) + Cx(t,L) = b_2(t)u_2(t) \text{ на } (0,\vartheta),\\ &x(0,\eta) = x_0(\eta). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi(y) = (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$, $K \geq 0$ и $y_1 < y_2 < y_3$ — действительные числа, $Q_T = T \times (0,L)$, $L = \mathrm{const} \in (0,+\infty)$, $T = [0,\vartheta]$, $\vartheta > 0$, — конечный момент времени, $\vartheta \in (0,L)$, C — положительная постоянная, $u(\cdot)$, $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — входные воздействия, $b(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$, $b_1(\cdot)$ и $b_2(\cdot) \in L_\infty(T;\mathbb{R})$ — заданные функции. Ниже мы полагаем, что $x_0 \in L_\infty(0,L)$.

Следуя [15], функцию $x(\cdot) = x(\cdot;0,x_0,u(\cdot),u_1(\cdot),u_2(\cdot)) \in W(T) \cap L_\infty(Q_T)$ назовем решением (слабым) уравнения (1.1), если равенство

$$\int_0^\vartheta \big\langle x_t(t),\rho(t)\big\rangle\,dt + \int_0^\vartheta\int_0^L \big(x_\eta(t,\eta)\rho_\eta(t,\eta) + K\phi(x(t,\eta))\rho(t,\eta)\big)\,d\eta\,dt$$

$$+\int_0^\vartheta \big((Cx(t,0)+b_1(t)u_1(t))\rho(t,0)+(Cx(t,L)-b_2(t)u_2(t))\rho(t,L)\big)\,dt = \int_0^\vartheta\int_0^L b(t,\eta)u(t,\eta)\rho(t,\eta)\,d\eta\,dt$$

выполняется для всех $\rho \in L_2(T;H^1(0,L))$ и $x(0) = x_0$. Здесь символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает двойственность между соболевскими пространствами $H^1(0,L)$ и $(H^1(0,L))^*$,

$$W(T) = \big\{y(\cdot) \in L_2(T;H^1(0,L))\colon y_t(\cdot) \in L_2(T;(H^1(0,L))^*)\big\}.$$

Как известно, нормы в пространстве $H^1(0,L)$ могут быть введены по-разному. Мы будем использовать следующую норму:

$$|x(\cdot)|_{H^1(0,L)} = \left(|x(0)|^2 + |x(L)|^2 + \int_0^L x_\eta^2(\eta)d\eta\right)^{1/2}.$$

Здесь и всюду ниже символ $|\cdot|$ означает модуль числа.

В работе [15] доказана теорема существования и единственности решения.

Теорема 1 [15, Theorem 1]. *Пусть $u(\cdot) \in L_2(Q_T)$, $x_0(\eta) \in L_\infty(0,L)$ и $u_j(\cdot) \in L_p(T;\mathbb{R})$, $j = 1,2$, $p > 2$. Тогда существует единственное (слабое) решение уравнения* (1.1) *$x(\cdot)$ со следующими свойствами: $x(\cdot) \in L_\infty(Q_T) \cap W(T) \cap C((0,\vartheta] \times [0,L])$. Если, кроме того, $x_0(\eta) \in C(0,L)$, то $x(\cdot) \in C(T \times [0,L])$.*

Заметим, что $m_\phi = \inf\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} d\phi(x)/dx > -\infty$.

Введем обозначения

$$\mu = K|m_\phi|,$$

$|\cdot|_H$ — норма в пространстве $H = L_2(0, L)$, $(\cdot,\cdot)_H$ — скалярное произведение в этом же пространстве, $\tilde{u} = \{u, u_1, u_2\} \in H \times \mathbb{R}^2$,

$$|\tilde{u}|_1 = \left(|u|_H^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2\right)^{1/2}.$$

Обсуждаемая в работе задача состоит в следующем. Функция $\tilde{u}(\cdot) = \{u(\cdot), u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}$ в правой части (1.1) неизвестна. Известно лишь, что она принадлежит пространству $L_2(T; L_2(0, L)) \times L_p(T; \mathbb{R}) \times L_p(T; \mathbb{R})$, $p > 2$. Наряду с уравнением (1.1) имеется еще одно уравнение того же вида

$$\begin{aligned}
&w_t(t,\eta) - w_{\eta\eta}(t,\eta) + K\varphi(w(t,\eta)) = b(t,\eta)u^h(t,\eta) \text{ в } Q_T,\\
&w_\eta(t,0) - Cw(t,0) = b_1(t)u_1^h(t) \text{ на } (0,\vartheta),\\
&w_\eta(t,L) + Cw(t,L) = b_2(t)u_2^h(t) \text{ на } (0,\vartheta),\\
&w(0,\eta) = \xi_0^h(\eta) \in L_\infty(0,L).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

В каждый момент времени $t \in T$ измеряются решения уравнений (1.1) и (1.2). Эти измерения производятся с ошибками. А именно, вместо функций $x(\cdot)$ и $w(\cdot)$ становятся известными функции $\xi^h(\cdot) \in L_\infty(T; H^1(0, L))$ и $\psi^h(\cdot) \in L_\infty(T; H^1(0, L))$ со свойствами

$$|x(t) - \xi^h(t)|_{H^1(0,L)} \le h, \quad |w(t) - \psi^h(t)|_{H^1(0,L)} \le h \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{1.3}$$

Мы также полагаем, что начальные состояния уравнений (1.1) и (1.2) связаны соотношением

$$|x_0 - \xi_0^h|_{L_\infty(0,L)} \le h. \tag{1.4}$$

Здесь и всюду ниже $h \in (0, 1)$ — величина погрешности измерения. Требуется сконструировать функцию $\tilde{u}^{\alpha,h}(\cdot)$ (зависящую от параметров $\alpha \in (0, 1)$ и $h \in (0, 1)$) со свойствами

1) $\tilde{u}^{\alpha,h}(t) = \tilde{u}^{\alpha,h}(\xi^h(t), \psi^h(t))$;

2) при подходящем согласовании параметров h и $\alpha = \alpha(h)$ имеет место сходимость

$$w^h(\cdot) \to x(\cdot) \quad \text{в} \quad C(T; H) \cap L_2(T; H^1(0, L)) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{1.5}$$

Символ $w^h(\cdot) = w(\cdot; 0, \xi_0^h, \tilde{u}^h(\cdot))$ означает решение уравнения (1.2) с правой частью $\tilde{u}^h(t) = \tilde{u}^{\alpha(h),h}(t)$; т. е. $w^h(\cdot)$ есть решение уравнения

$$\begin{aligned}
&w_t^h(t,\eta) - w_{\eta\eta}^h(t,\eta) + K\varphi(w^h(t,\eta)) = b(t,\eta)u^h(t,\eta) \text{ в } Q_T,\\
&w_\eta^h(t,0) - Cw^h(t,0) = b_1(t)u_1^h(t) \text{ на } (0,\vartheta),\\
&w_\eta^h(t,L) + Cw^h(t,L) = b_2(t)u_2^h(t) \text{ на } (0,\vartheta),\\
&w^h(0,\eta) = \xi_0^h(\eta).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

З а м е ч а н и е. Аналогичная задача для уравнения вида (1.1) была исследована в работе [15]. Основной результат этой работы состоит в следующем. Имеется уравнение

$$g_t(t,\eta) - g_{\eta\eta}(t,\eta) + K\phi(g(t,\eta)) = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = (0,\vartheta) \times (0, L).$$

Известно его решение $g^{desi}(\cdot) \in H^2(Q_T)$, а также начальное состояние $g^{desi}(0)$. Всякое другое решение этого уравнения $g(t,\eta)$ с начальным состоянием $g(0,\eta) \in L_\infty(0, L)$ и граничными условиями

$$g_\eta(t,0) = C(g(t,0) - g^{desi}(t,0)) + g_\eta^{desi}(t,0), \quad g_\eta(t,L) = -C(g(t,L) - g^{desi}(t,L)) + g_\eta^{desi}(t,L)$$

удовлетворяет неравенству

$$|g(t) - g^{desi}(t)|_H \leq |g(0) - g^{desi}(0)|_H \exp(-\mu_1 t), \quad t \in T,$$

если $C \geq 1/(2L)$, $L^2 K < 1/(2\mu_1)$. Здесь $\mu_1 = 1/L^2 - 2K\mu$. Следовательно, если величина $|g(0) - g^{desi}(0)|_H$ мала, то отклонение $g(t)$ от $g^{desi}(t)$ тоже мало (при всех $t \in T$ в метрике пространства H). Этот результат можно трактовать как один из методов решения задачи слежения при точном измерении решений, т. е. при $\xi_1(t) = g^{desi}(t, 0)$, $\xi_2(t) = g^{desi}(t, L)$. При этом естественно считать

$$u_1(t, \xi_1(t)) = u_1(t, g^{desi}(t, 0)) = -Cg^{desi}(t, 0) + g_\eta^{desi}(t, 0),$$

$$u_1(t, \xi_2(t)) = u_2(t, g^{desi}(t, L)) = Cg^{desi}(t, L) + g_\eta^{desi}(t, L).$$

Отличие метода решения задачи слежения, описанного в данной работе, состоит в следующем. Во-первых, наш метод позволяет решать задачу слежения при неточном измерении решений. Во-вторых, в нашем случае одно из уравнений содержит неизвестное возмущение, в то время как в [15] такое возмущение отсутствует.

Аналогичная описанной выше задача будет исследована для параболического уравнения

$$x_t(t, \eta) - \Delta_L x(t, \eta) + c_0(\eta) x(t, \eta) = f(t, \eta) \quad \text{в} \quad T \times \Omega = Q, \quad T = [0, \vartheta], \tag{1.7}$$

с начальным

$$x(0, \eta) = x_0(\eta) \quad \text{в} \quad \Omega$$

и граничным

$$\left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_\Sigma = Du \quad \text{в} \quad (0, \vartheta] \times \Gamma = \Sigma$$

условиями. Таким образом, в данном случае речь идет о краевых условиях Неймана. Здесь

$\vartheta = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытая ограниченная область с липшицевой границей Γ,

Δ_L — оператор Лапласа, т. е. $\Delta_L y(\eta) = \sum\limits_{j=1}^n \dfrac{\partial^2 y(\eta)}{\partial \eta_j^2}$,

$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $x_0(\eta) \in H = L_2(\Omega)$,

$f(\cdot) \in L_2(T; H)$ и $c_0(\cdot) \in L_\infty(\Omega)$ — заданные функции,

$u(\cdot) \in L_2(T; U)$ — возмущение, U — гильбертово пространство (пространство возмущений),

D — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства U в пространство $L_2(\Gamma)$ (т. е. $D \in \mathcal{L}(U; L_2(\Gamma))$),

символ $\partial x/\partial n$ означает производную по внешней нормали.

Пусть

$$W_1(T) = \bigl\{x(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))\colon x_t(\cdot) \in L_2(T; (H^1(\Omega))^*)\bigr\},$$

где $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева ($(H^1(\Omega))^*$ — сопряженное к $H^1(\Omega)$ пространство). Именно, пространство функций $\phi(\eta) \in H$, обобщенные производные которых $D_j\phi$ ($D_j\phi$ — обобщенная производная функции $\phi(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ по аргументу η_j) принадлежат H. Скалярное произведение в пространстве $H^1(\Omega)$ в отличие от случая, когда речь шла об уравнении Шлогла, будем определять по формуле

$$\bigl(x, y\bigr)_{H^1(\Omega)} = \bigl(x, y\bigr)_H + \bigl(\nabla x, \nabla y\bigr) \quad (x, y \in H^1(\Omega)).$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_H$ — скалярное произведение в пространстве H, $|\cdot|_H$ — норма в H, символ ∇x означает градиент функции x, т. е. $\nabla x = (D_1 x(\eta), \ldots, D_n x(\eta))$,

$$\bigl(\nabla x, \nabla y\bigr) = \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega D_j x(\eta) D_j y(\eta)\, d\eta.$$

Функция $x(\cdot) \in W_1(T)$ называется (обобщенным) решением уравнения (1.7), если она удовлетворяет соотношению

$$\big\langle x_t(t), v\big\rangle + \big(\nabla x(t), \nabla v\big) + \int\limits_{\Omega} c_0(\eta)x(t,\eta)v(\eta)\,d\eta \tag{1.8}$$

$$= \big(f(t), v\big) + \int\limits_{\Gamma} (Du(t))(\sigma)v(\sigma)\,d\sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T$$

и, кроме того, $x(0) = x_0$. Здесь $v(\sigma)$ означает след функции $v \in H^1(\Omega)$ на границе Γ области Ω, символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — двойственность между $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))^*$.

Имеет место

Теорема 2 [5, с. 150]. *Для любых $x_0 \in H$, $u(\cdot) \in L_2(T;U)$ существует единственное обобщенное решение уравнения* (1.7), *которое удовлетворяет неравенству*

$$|x(\cdot)|_{W_1(T)} \le d_1\big(|f(\cdot)|_{L_2(T;H)} + |x_0|_H + |u(\cdot)|_{L_2(T;U)}\big).$$

Обсуждаемая в настоящей работе задача для уравнения (1.7) аналогична описанной выше для уравнения Шлогла. Наряду с уравнением (1.7) имеется уравнение

$$w_t^h(t,\eta) - \Delta_L w^h(t,\eta) + c_0(\eta)w^h(t,\eta) = f(t,\eta) \quad \text{в} \quad Q \tag{1.9}$$

с начальным

$$w^h(0,\eta) = \xi_0^h(\eta) \quad \text{в} \quad \Omega$$

и граничным

$$\frac{\partial w^h}{\partial n}\bigg|_{\Sigma} = Du^h \quad \text{в} \quad \Sigma$$

условиями. Заранее как воздействие $u(\cdot)$, так и отвечающее ему решение $x(\cdot)$ уравнения (1.7) не заданы. Таким образом, функция $u(\cdot)$ неизвестна. Известно лишь, что она является элементом пространства $L_2(T;U)$. В каждый момент времени $t \in T$ измеряются решения уравнений (1.7) и (1.9). Эти измерения неточны — вместо функций $x(\cdot)$ и $w^h(\cdot)$ вычисляются функции $\psi^h(\cdot)$, $\xi^h(\cdot) \in L_\infty(T;H^1(\Omega))$ со свойствами

$$|w^h(t) - \psi^h(t)|_{H^1(\Omega)} \le h, \quad |x(t) - \xi^h(t)|_{H^1(\Omega)} \le h \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{1.10}$$

Ниже полагаем, что начальное состояние уравнения (1.9) $\xi_0^h \in H$ удовлетворяет неравенству $|\xi_0^h - x_0|_H \le h$. Необходимо сконструировать функцию $u^h(\cdot) = u^{\alpha(h),h}(\cdot)$ таким образом, чтобы при соответствующем согласовании параметров h и $\alpha = \alpha(h)$ решение уравнения (1.9) отслеживало решение уравнения (1.7).

2. Решение задачи в случае краевых условий Робина

Итак, для решения задачи необходимо указать закон формирования управления $\tilde{u}^{\alpha,h}(\cdot)$ со свойством (1.5). Фиксируем функцию $\alpha = \alpha(h)\colon (0,1) \to (0,1)$. Пусть управление $\tilde{u}^h(\cdot) = \tilde{u}^{\alpha(h),h}(\cdot)$ в правой части (1.6) задается формулами

$$u^h(t,\eta) = u^{\alpha(h),h}(t,\eta) = -\alpha(h)^{-1}b(t,\eta)(\psi^h(t,\eta) - \xi^h(t,\eta))e^{-\mu t} \quad \text{при п.в.} \quad (t,\eta) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$u_1^h(t) = u_1^{\alpha(h),h}(t) = -\alpha^{-1}(h)b_1(t)(\psi^h(t,0) - \xi^h(t,0))e^{-\mu t} \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{2.2}$$

$$u_2^h(t) = u_2^{\alpha(h),h}(t) = -\alpha^{-1}(h)b_2(t)(\psi^h(t,L) - \xi^h(t,L))e^{-\mu t} \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{2.3}$$

Лемма 1. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $h\alpha^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Пусть управление* $\tilde{u}^h(\cdot)$ *задается формулами* (2.1)–(2.3). *Тогда имеет место неравенство*

$$\varepsilon(t) \le d^{(1)}(\alpha(h) + h\alpha^{-1}(h)), \quad t \in T.$$

Здесь

$$\varepsilon(t) = |\mu^h(t)|_H^2 + 2\max\{1, C\} \int\limits_0^t |\mu^h(s)|^2_{H^1(0,L)}\, ds, \quad t \in T,$$

$\mu^h(t) = w^h(t) - x(t)$, $x(\cdot)$ *и* $w^h(\cdot)$ — *решения уравнений* (1.1) *и* (1.6) *соответственно,* $d^{(1)}$ — *постоянная, не зависящая от* $u(\cdot)$, $u^h(\cdot)$, $x(\cdot)$ *и* $w^h(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем новые переменные y и z^h:

$$y(t,\eta) = e^{-\mu t} x(t,\eta), \quad z^h(t,\eta) = e^{-\mu t} w^h(t,\eta).$$

Тогда вместо уравнения (1.1) мы получим новое уравнение для y:

$$\begin{aligned}
&y_t(t,\eta) - y_{\eta\eta}(t,\eta) + e^{-\mu t} K\varphi(e^{\mu t} y(t,\eta)) + \mu y(t,\eta) = e^{-\mu t} b(t,\eta) u(t,\eta),\\
&y_\eta(t,0) - Cy(t,0) = e^{-\mu t} b_1(t) u_1(t),\\
&y_\eta(t,L) + Cy(t,L) = e^{-\mu t} b_2(t) u_2(t),\\
&y(0,\eta) = x_0(\eta).
\end{aligned}$$

В свою очередь, вместо уравнения (1.7) мы получим уравнение для z^h:

$$\begin{aligned}
&z^h_t(t,\eta) - z^h_{\eta\eta}(t,\eta) + e^{-\mu t} K\varphi(e^{\mu t} z^h(t,\eta)) + \mu z^h(t,\eta) = e^{-\mu t} b(t,\eta) u^h(t,\eta),\\
&z^h_\eta(t,0) - Cz^h(t,0) = e^{-\mu t} b_1(t) u^h_1(t),\\
&z^h_\eta(t,L) + Cz^h(t,L) = e^{-\mu t} b_2(t) u_2(t),\\
&z^h(0,\eta) = \xi^h_0(\eta).
\end{aligned}$$

Пусть

$$\mu^h(t,\eta) = z^h(t,\eta) - y(t,\eta),$$

$$\varrho(\tau,\eta) = \begin{cases} \mu^h(\tau,\eta), & \tau \in [0,s], \quad \eta \in [0,L],\\ 0, & \tau \in (s,\vartheta], \quad \eta \in [0,L]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^s \big(d|\mu^h(t)|_H^2/dt\big)\, dt + I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) = \int\limits_0^s I^h_\alpha(t)\, dt, \quad s \in T, \tag{2.4}$$

где

$$I_1(s) = \int\limits_0^s \int\limits_0^L (\mu^h_\eta(t,\eta))^2\, d\eta\, dt, \quad I_2(s) = \int\limits_0^s \int\limits_0^L \big(\Phi_t(z^h(t,\eta)) - \Phi_t(y(t,\eta))\big) \mu^h(t,\eta)\, d\eta\, dt,$$

$$\Phi_t(v) = Ke^{-\mu t}\phi(e^{\mu t} v) + \mu v, \quad I_3(s) = C \int\limits_0^s \big((\mu^h(t,0))^2 + (\mu^h(t,L))^2\big)\, dt,$$

$$I^h_\alpha(t) = e^{-\mu t} \mu^h(t,L) b_2(t) (u^h_2(t) - u_2(t)) - e^{-\mu t} \mu^h(t,0) b_1(t) (u^h_1(t) - u_1(t))$$

$$+ e^{-\mu t}(u^h(t) - u(t), b(t)\mu^h(t)), \quad \alpha = \alpha(h).$$

Функция $v \to \Phi_t(v)$ неубывающая. Поэтому

$$I_2(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, \vartheta]. \tag{2.5}$$

Воспользовавшись (2.4) и (2.5), получаем оценку

$$\int\limits_0^s \Big[1/2 d|\mu^h(t)|_H^2/dt + \max\{1, C\}|\mu^h(t)|^2_{H^1(0,L)} + \alpha\big((u_1^h(t))^2 - u_1^2(t)\big)$$

$$+ \alpha\big((u_2^h(t))^2 - u_2^2(t)\big) + \big(|u^h(t)|_H^2 - |u(t)|_H^2\big)\Big]\, dt \leq \int\limits_0^s J_\alpha^h(t)\, dt \quad \forall s \in T, \tag{2.6}$$

где

$$J_\alpha^h(t) = I_\alpha^h(t) + \alpha\big((u_2^h(t))^2 - u_2^2(t)\big) + \alpha\big((u_1^h(t))^2 - u_1^2(t)\big) + \alpha\big(|u^h(t)|_H^2 - |u(t)|_H^2\big),$$

которая имеет место при п.в. $t \in T$. В силу (2.6), (1.3) и (2.1)–(2.3) справедливо неравенство

$$\alpha \int\limits_0^\vartheta \big(|\tilde{u}^h(t)|_1^2 - |\tilde{u}(t)|_1^2\big)\, dt \leq \int\limits_0^\vartheta J_\alpha^h(t)\, dt \leq c_1 h \int\limits_0^\vartheta \big(|\tilde{u}^h(t)|_1 + |\tilde{u}(t)|_1\big)\, dt. \tag{2.7}$$

Здесь и ниже $\tilde{u}^h = \{u^h, u_1^h, u_2^h\}$, $\tilde{u} = \{u, u_1, u_2\}$, $c_j, j = 1, 2, \dots,$ — положительные постоянные. Следовательно,

$$\int\limits_0^\vartheta |\tilde{u}^h(t)|_1^2\, dt \leq \int\limits_0^\vartheta |\tilde{u}(t)|_1^2\, dt + c_1 h\alpha^{-1} \int\limits_0^\vartheta \big(|\tilde{u}^h(t)|_1 + |\tilde{u}(t)|_1\big)\, dt$$

$$\leq \int\limits_0^\vartheta \big(|\tilde{u}(t)|_1^2 + 0.5|\tilde{u}^h(t)|_1^2 + c_1^2(h\alpha^{-1})^2 + c_1 h\alpha^{-1}|\tilde{u}(t)|_1\big)\, dt. \tag{2.8}$$

В таком случае в силу (2.8)

$$\sup\Big\{\int\limits_0^\vartheta |\tilde{u}^h(t)|_1^2\, dt \colon h \in (0,1)\Big\} \leq c_2. \tag{2.9}$$

Далее, при п.в. $t \in T$ верно неравенство

$$|\tilde{u}^h(t)|_1 \leq c_3\big(h + |\mu^h(t)|_{H^1(0,L)}\big)\alpha^{-1}.$$

Поэтому в силу (1.3) и (2.1)–(2.3) из (2.7) получаем следующую оценку:

$$\int\limits_0^\vartheta J_\alpha^h(t)\, dt \leq c_1 h \int\limits_0^\vartheta \big(|\tilde{u}(t)|_1 + c_3(h + |\mu^h(t)|_{H^1(0,L)})\alpha^{-1}\big)\, dt$$

$$\leq \int\limits_0^\vartheta c_1 h|\tilde{u}(t)|_1 + c_1 c_3 h^2\alpha^{-1} + c_1 c_3 h|\mu^h(t)|_{H^1(0,L)}\alpha^{-1}\, dt.$$

Стандартным образом проверяется, можно ли указать число $C_0 > 0$ такое, что неравенство

$$|x(s)|^2_H + \int\limits_0^s |x(t)|^2_{H^1(0,L)}\,dt \le C_0\Big[|x_0|^2_H + |\phi(0)|^2 + \int\limits_0^s \big(|u(t)|^2_H + u_1^2(t) + u_2^2(t)\big)\,dt\Big] \quad \forall s \in T$$

выполняется равномерно по всем $u(\cdot) \in L_2(Q_T)$, $u_j(\cdot) \in L_p(T;\mathbb{R})$, $j = 1,2$, $p > 2$. Здесь $x(\cdot) = x(\cdot;0,x_0,u(\cdot),u_1(\cdot),u_2(\cdot))$ — решение уравнения (1.1). Воспользовавшись (2.9) и последним утверждением, заключаем

$$\sup\Big\{\int\limits_0^\vartheta |\mu^h(t)|_{H^1(0,L)}\,dt\colon h \in (0,1)\Big\} \le c_4.$$

Значит,

$$\int\limits_0^\vartheta J^h_\alpha(t)\,dt \le c_5 h\alpha^{-1}. \tag{2.10}$$

Из (2.6) и (2.9) в силу (2.10) получаем неравенство

$$|\mu^h(t)|^2_H + 2\max\{1,C\}\int\limits_0^t |\mu^h(\tau)|^2_{H^1(0,L)}\,d\tau \le |\mu^h(0)|^2_H + c_6 h\alpha^{-1} + c_7\alpha.$$

Лемма доказана.

Прямым следствием леммы 1 является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $h\alpha^{-1} \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда управление* $\tilde u^h(\cdot) = \tilde u^{\alpha(h),h}(\cdot)$ *вида* (2.1)–(2.3) *обеспечивает сходимость* (1.5), *т.е. решает задачу слежения для уравнения* (1.1).

3. Решение задачи в случае краевых условий Неймана

Прежде чем указать правило формирования $u^h(\cdot) = u^{\alpha(h),h}(\cdot)$, введем несколько операторов. Пусть оператор $B : U \to H^1(\Omega)$ задается по правилу

$$Bu = z \Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta_L z - c_0 z = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial z}{\partial n}\Big|_\Gamma = Du \quad \text{в} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

Иными словами, $z = Bu$ — обобщенное решение эллиптического уравнения (3.1), т. е. функция, из пространства $H^1(\Omega)$ удовлетворяющая соотношению

$$(\nabla z, \nabla v) + \int\limits_\Omega c_0(\eta)z(\eta)v(\eta)\,d\eta = \int\limits_\Gamma (Du)(\sigma)w(\sigma)\,d\sigma \quad \forall w \in H^1(\Omega). \tag{3.2}$$

Обратим внимание на тот факт, что встречающиеся в настоящем разделе постоянные d_j, c_j не зависят от $f(\cdot)$, x_0, $u(\cdot)$, а также от параметра h и функции $\alpha(h)$.

Заметим [5, с. 33], что если $|c_0|_H > 0$, то B — линейный оператор со свойством

$$|Bu|_{H^1(\Omega)} \le d_1|u|_U \quad \forall u \in U.$$

Введем два оператора

$$C_1 : U \to H^n = \underbrace{H \times \ldots \times H}_{n}, \quad C_1 u = \nabla Bu,$$

$$C_2 : U \to H, \quad C_2 u = c_0 B u.$$

Таким образом, $(C_1 u)(\eta) = \{D_1(Bu)(\eta), \dots, D_n(Bu)(\eta)\}$, $(C_2 u)(\eta) = c_0(\eta)(Bu)(\eta)$, $\eta \in \Omega$.

Теперь укажем правило формирования управления $u^h(\cdot)$. Фиксируем некоторую функцию $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \in (0,1)$. Пусть

$$u^h(t) = u^{\alpha(h),h}(t) = \Big(C_1^* \nabla(\xi^h(t) - x(t)) + C_2^*(\xi^h(t) - x(t))\Big)(2\alpha)^{-1}, \quad \alpha = \alpha(h), \tag{3.3}$$

где C_1^* и C_2^* означают сопряженные операторы. Таким образом, уравнение (1.9) имеет вид

$$w_t^h(t,\eta) - \Delta_L w^h(t,\eta) + c_0(\eta) w^h(t,\eta) = f(t,\eta) \quad \text{в} \quad Q \tag{3.4}$$

с начальным

$$w^h(0,\eta) = \xi_0^h(\eta) \quad \text{в} \quad \Omega$$

и граничным

$$\frac{\partial w^h}{\partial n}\bigg|_\Sigma = D\Big(C_1^* \nabla(\xi^h(t) - \psi^h(t)) + C_2^*(\xi^h(t) - \psi^h(t))\Big)(2\alpha)^{-1} \quad \text{в} \quad \Sigma$$

условиями. Решение этого уравнения ниже обозначаем символом $w^h(\cdot)$.

Учитывая правило определения оператора B (см. (3.1), (3.2)), можно сделать вывод, что решение уравнения (3.4) удовлетворяет соотношению

$$\big\langle w_t^h(t), v\big\rangle + \big(\nabla w^h(t), \nabla v\big) + \int\limits_\Omega c_0(\eta) w^h(t,\eta) v(\eta)\, d\eta$$

$$= \big(f(t), v\big)_H + \big(C_1^* \nabla v + C_2^* v, u^h(t)\big)_U \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T.$$

Лемма 2. *Пусть $c_0(\eta) \geq 0$ при п.в. $\eta \in \Omega$. Тогда функции $u^h(\cdot)$ вида (3.3) обеспечивают выполнение неравенства*

$$\sup_{t \in T} \bigg\{ \int\limits_0^t |\nabla(w^h(s) - x(s))|^2\, ds + |w^h(t) - x(t)|_H^2 \bigg\} \leq d_2\big(\alpha + h + h^2\alpha^{-1} + h^2\alpha^{-2}\big).$$

Доказательство. Пусть $\mu(t) = w^h(t) - x(t)$. Из (1.7) и (3.4) следует, что $\mu(t)$ является решением уравнения

$$\mu_t(t,\eta) - \Delta_L \mu(t,\eta) + c_0(\eta)\mu(t,\eta) = 0 \quad \text{в} \quad Q$$

с начальным

$$\mu(0,\eta) = \mu_0(\eta) \quad \text{в} \quad \Omega$$

и граничным

$$\frac{\partial \mu}{\partial n}\bigg|_\Sigma = D(u^h(t) - u(t)) \quad \text{в} \quad \Sigma$$

условиями. Здесь $\mu_0(\eta) = \xi_0^h(\eta) - x_0(\eta)$, $\eta \in \Omega$. Таким образом, $\mu(\cdot) \in W_1(T)$ и удовлетворяет соотношению

$$\big\langle \mu_t(t), v\big\rangle + \big(\nabla \mu(t), \nabla v\big) + \int\limits_\Omega c_0(\eta)\mu(t,\eta) v(\eta)\, d\eta \tag{3.5}$$

$$= \int\limits_\Gamma D\big(u^h(t) - u(t)\big)(\sigma) v(\sigma)\, d\sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T.$$

Учитывая правило определения оператора B (см. (3.1)), перепишем равенство (3.5) в следующем виде:

$$\big\langle \mu_t(t), v\big\rangle + \Big(\nabla(\mu(t) - B(u^h(t) - u(t))), \nabla v\Big)$$

$$= -\int c_0(\eta)\big(\mu(t,\eta) - B(u^h(t) - u(t))(\eta)\big)v(\eta)\,d\eta \quad \forall \quad v \in H^1(\Omega) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{3.6}$$

Положив в (3.6) $v = \mu(t)$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mu(t)|^2_H + |\nabla\mu(t)|^2 - \Big(\nabla B(u^h(t) - u(t)), \nabla\mu(t)\Big) + \alpha|u^h(t)|^2_U - \alpha|u(t)|^2_U = -\int\limits_\Omega c_0(\eta)\mu^2(t,\eta)\,d\eta$$

$$+\int\limits_\Omega c_0(\eta)B(u^h(t) - u(t))(\eta)\mu(t,\eta)\,d\eta + \alpha|u^h(t)|^2_U - \alpha|u(t)|^2_U \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{3.7}$$

Здесь $|\nabla\mu(t)| = (\nabla\mu(t), \nabla\mu(t))^{1/2}$. Заметим, что

$$J_t \equiv \Big(\nabla B(u^h(t) - u(t)), \nabla\mu(t)\Big) + \int\limits_\Omega c_0(\eta)B(u^h(t) - u(t))(\eta)\mu(t,\eta)\,d\eta$$

$$= \Big(u^h(t) - u(t), C_1^*\nabla\mu(t) + C_2^*\mu(t)\Big)_U.$$

Значит,

$$I_t \equiv 0.5\frac{d}{dt}|\mu(t)|^2_H + |\nabla\mu(t)|^2 + \alpha|u^h(t)|^2_U - \alpha|u(t)|^2_U$$

$$\le \Big(u^h(t) - u(t), C_1^*\nabla\mu(t) + C_2^*\mu(t)\Big)_U - \tilde{c}_0|\mu(t)|_H + \alpha|u^h(t)|^2_U - \alpha|u(t)|^2_U \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{3.8}$$

где $\tilde{c}_0 = \inf\{c_0(\eta)\colon \eta \in \Omega\}$. Кроме того, ввиду (1.10) справедливо неравенство

$$\left|\Big(\nabla B(u^h(t) - u(t)), \nabla(\xi^h(t) - \psi^h(t))\Big) + \int\limits_\Omega \Big(c_0(\eta)B(u^h(t) - u(t))(\eta), \xi^h(t,\eta) - \psi^h(t,\eta)\Big)\,d\eta - J_t\right|$$

$$\le c_1 h|u^h(t) - v(t)|_U. \tag{3.9}$$

В таком случае из (3.8), (3.9), учитывая (3.3), выводим

$$I_t \le -\tilde{c}_0|\mu(t)|^2_H + c_1 h|u^h(t) - u(t)|_U. \tag{3.10}$$

В силу непрерывности вложения пространства $H^1(\Omega)$ в пространство H верно неравенство

$$|u^h(t)|_U \le c_2\big(h + |\nabla\mu(t)|\big)(2\alpha)^{-1}. \tag{3.11}$$

Из (3.10), учитывая (3.11), получаем

$$I_t \le -\tilde{c}_0|\mu(t)|^2_H + c_1 h|u(t)|_U + c_3 h^2(2\alpha)^{-1} + c_3 h|\nabla\mu(t)|(2\alpha)^{-1}. \tag{3.12}$$

Далее, имеем

$$c_3 h|\nabla\mu(t)|(2\alpha)^{-1} \le c_4 h^2\alpha^{-2} + 0.5|\nabla\mu(t)|^2.$$

Поэтому из (3.12) выводим оценку

$$0.5\varepsilon_t(t) + \alpha(|u^h(t)|^2_U - |u(t)|^2_U) \le -\tilde{c}_0|\mu(t)|^2_H + c_1 h|u(t)|_U + c_3 h^2(2\alpha)^{-1} + c_4 h^2\alpha^{-2}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Из леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $h\alpha^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда управление* $u^h(\cdot) = u^{\alpha(h),h}(\cdot)$ *вида* (3.3) *обеспечивает сходимость* (1.5), *т.е. решает задачу слежения для уравнения* (1.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lasiecka I., Triggiani R.** Control theory for partial differential equations: Continuous and approximation theories. I: Abstract parabolic systems. Cambridge, 2000. 648 p.
2. **Tucshak M., Weiss G.** Observation and control for operator semigroups. Berlin: Birkhäuser, 2009. 483 p. doi: 10.1007/978-3-7643-8994-9 .
3. **Pandolfi L.** Distributed systems with persistent memory: Control and moment problems. Berlin: Springer, 2014. 152 p. doi: 10.1007/978-3-319-12247-2 .
4. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Науч. кн., 1999. 360 с.
5. **Tröltzsch F.** Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. Rhode Island, 2010. 408 p.
6. **Корбич Ю.С., Максимов В.И., Осипов Ю.С.** Динамическое моделирование управлений в некоторых параболических системах // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, № 3. С. 355–360.
7. **Осипов Ю.С., Пандолфи Л., Максимов В.И.** Задача робастного граничного управления: случай краевых условий Дирихле // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 3. С. 310–312.
8. **Maksimov V., Pandolfi L.** Dynamical reconstruction of inputs for contraction semigroup system. Boundary input case // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 103, no. 2. P. 401–420. doi: 10.1023/A:1021709004193 .
9. **Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov V.I.** Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: The case of Dirichlet boundary conditions // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2001. Vol. 9, no. 2. P. 149–162. doi: 10.1515/jiip.2001.9.2.149 .
10. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматика и телемеханика. 2009. № 4. С. 18–30.
11. **Максимов В.И., Осипов Ю.С.** О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 1. С. 14–26.
12. **Maksimov V.I.** On reconstruction of boundary controls in a parabolic equations // Advances in Diff. Eq. 2009. Vol. 14, no. 11–12. P. 1193–1211.
13. **Maksimov V.I.** On the tracking of a trajectory and a control by the feedback principle // Control Theory Appl. / ed. Vito G. Massari. N Y: Nova Science Publishers, 2011. P. 55–81.
14. **Sclögl F.** Chemical reaction models for non-equilibrium phase-transitions // Zeitschrift für Physik. 1972. Vol. 253. P. 147–161. doi: 10.1007/BF01379769 .
15. **Gugat M., Tröltzsch F.** Boundary feedback stabilization of the Schlögl system // Automatica. 2015. Vol. 51, no. 1. P. 192–199. doi: 10.1016/j.automatica.2014.10.106 .
16. **Buchholz R., Engel H., Kanimann E., Tröltzsch F.** On the optimal control Schlögl-model // Comput. Optim. Appl. 2013. Vol. 5, no. 1. P. 153–185. doi: 10.1007/s10589-013-9550-y .
17. **Casas E., Rull C., Tröltzsch F.** Sparse optimal control of the Schlögl and FitzHugh–Nagumo systems // Comput. Methods Appl. Math. 2013. Vol. 13, iss. 4. P. 415–442. doi: 10.1515/cmam-2013-0016 .
18. **Breiten T., Kunisch K.** Riccati based feedback control of the monodomain equations with the FitzHugh–Nagumo model // SIAM J. Contr. Optim. 2014. Vol. 52, no. 6. P. 4057–4081. doi: 10.1137/140964552 .

Поступила 31.01.2021
После доработки 10.02.2021
Принята к публикации 15.02.2021

Haydar Akca, Prof.,
Abu Dhabi University, College of Arts and Sciences
Department of Applied Sciences and Mathematics, UAE
e-mail: akcahy@yahoo.com

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lasiecka I., Triggiani R. *Control theory for partial differential equations: Continuous and approximation theories. I: Abstract parabolic systems.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 648 p. doi: 10.1017/CBO9781107340848 .
2. Tucshak M., Weiss G. *Observation and control for operator semigroups.* Berlin: Birkhäuser, 2009, 483 p. doi: 10.1007/978-3-7643-8994-9 .
3. Pandolfi L. *Distributed systems with persistent memory: Control and moment problems.* Berlin: Springer, 2014, 152 p. doi: 10.1007/978-3-319-12247-2 .
4. Fursikov A.V. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications.* Providence: American Mathematical Soc., 1999, 305 p. ISBN: 082189790X . Original Russian text published in Fursikov A.V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya.* Novosibirsk: Nauchnaya kniga Publ., 1999, 360 p.
5. Tröltzsch F. *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications.* Providence, Rhode Island: AMS, 2010, 408 p. ISBN: 0821849042 .
6. Korbich Yu.S., Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Dynamic simulation of controls in certain parabolic systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1990, vol. 54, no. 3, pp. 293–297. doi: 10.1016/0021-8928(90)90127-V .
7. Osipov Y., Pandolfi L., Maksimov V. The problem of robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions. *Dokl. Math.*, 2000, vol. 62, no. 2, pp. 205–207.
8. Maksimov V., Pandolfi L. Dynamical reconstruction of inputs for contraction semigroup systems: boundary input case. *J. Optim. Theory Appl.*, 1999, vol. 103, no. 2, pp. 401–420. doi: 10.1023/A:1021709004193 .
9. Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov V.I. Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2001, vol. 9, no. 2, pp. 149–162. doi: 10.1515/jiip.2001.9.2.149 .
10. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. N.N. Krasovskii's extremal shift method and problems of boundary control. *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 4, pp. 577–588. doi: 10.1134/S0005117909040043 .
11. Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Infinite-horizon boundary control of distributed systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 14–25. doi: 10.1134/S0965542516010139 .
12. Maksimov V. On reconstruction of boundary controls in a parabolic equation. *Adv. Differ. Equ.*, 2009, vol. 14, no. 11–12, pp. 1193–1211.
13. Maksimov V.I. On the tracking of a trajectory and a control by the feedback principle. In: *Control Theory and its Applications.* Vito G. Massari (ed.), N Y: Nova Science Publ., 2011, pp. 55–81.
14. Sclögl F. Chemical reaction models for non-equilibrium phase-transitions. *Zeitschrift für Physik*, 1972, vol. 253, pp. 147–161. doi: 10.1007/BF01379769 .
15. Gugat M., Tröltzsch F. Boundary feedback stabilization of the Schlögl system. *Automatica*, 2015, vol. 51, pp. 192–199. doi: 10.1016/j.automatica.2014.10.106 .
16. Buchholz R., Engel H., Kammann E., Tröltzsch F. On the optimal control of the Schlögl-model. *Comput. Optim. Appl.*, 2013, vol. 56, no. 1, pp. 153–185. doi: 10.1007/s10589-013-9550-y .
17. Casas E., Rull C., Tröltzsch F. Sparse optimal control of the Schlögl and FitzHugh–Nagumo systems. *Comput. Methods Appl. Math.*, 2013, vol. 13, no. 4, pp. 415–442. doi: 10.1515/cmam-2013-0016 .
18. Breiten T., Kunisch K. Riccati based feedback control of the monodomain equations with the FitzHugh–Nagumo model. *SIAM J. Contr. Optim.*, 2014, vol. 52, no. 6, pp. 4057–4081. doi: 10.1137/140964552 .

Received January 31, 2021
Revised February 10, 2021
Accepted February 15, 2021

Haydar Akca, Prof., Abu Dhabi University, College of Arts and Sciences, Department of Applied Sciences and Mathematics, P.O. Box 59911, Abu Dhabi, UAE, e-mail: akcahy@yahoo.com .

Vyacheslav Ivanovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .

Cite this article as: H. Akca, V. I. Maksimov. Stable boundary control of a parabolic equation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 7–18 .