ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 519.977

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ

А. С. Бортаковский

Рассматривается задача оптимального управления переключаемой системой, вектор состояния которой содержит как непрерывные, так и дискретно меняющиеся компоненты. Непрерывная часть системы описывается дифференциальными уравнениями, а дискретная — рекуррентными. Дискретная часть осуществляет переключения режимов работы непрерывной части системы и сама находится под влиянием последней. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Они находятся в результате оптимизации функционала качества процесса управления, при этом не исключаются процессы с мгновенными многократными переключениями. При выводе необходимых условий оптимальности применяются малые вариации управлений дискретной частью и вариации моментов переключений, которые представляются игольчатыми вариациями управления непрерывной частью системы. Полученные условия из-за наличия мгновенных многократных переключений отличаются от традиционных уравнениями для вспомогательных переменных. Применение условий оптимальности демонстрируется на академическом примере.

Ключевые слова: гибридные системы, переключаемые системы, оптимальное управление.

A. S. Bortakovskii. Necessary optimality conditions for switching systems.

We consider an optimal control problem for a switching system whose state vector contains both continuous and discretely varying components. The continuous and the discrete parts of the system are described by differential and recursive equations, respectively. The discrete part switches the operating modes of the continuous part and is itself influenced by the latter. The switching times and their number are not predefined. They are found as a result of optimizing the quality functional of the control process; here processes with instantaneous multiple switchings are not excluded. In deriving the necessary optimality conditions, we use small variations of the controls of the discrete part and variations of the switching times, which are represented by needle variations of the control of the continuous part of the system. The obtained conditions differ from the traditional equations for auxiliary variables due to the presence of instantaneous multiple switchings. The application of the optimality conditions is demonstrated by an academic example.

Keywords: hybrid systems, switching systems, optimal control.

MSC: 34A34, 93C30

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-67-78

Введение

Переключаемые системы (ПС) служат математическими моделями многорежимных систем автоматического управления технологическими процессами и движущимися объектами (обзоры некоторых направлений приведены в [1; 2]). Функционирование таких систем представляется непрерывно-дискретными процессами, которые имеют разнородное описание [3; 4], включая импульсные системы [5], и относятся к гибридным системам (ГС). В статье рассматривается модель непрерывно-дискретной системы (НДС), в которой движение непрерывной части описывается дифференциальными уравнениями, а изменение состояния дискретной части (переключения) — рекуррентными. В отличие от [6] количество переключений и моменты переключений заранее не заданы и подлежат оптимизации. При этом не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени [2; 7]. Для общих моделей ГС доказаны достаточные [7; 8] и необходимые [9; 10] условия оптимальности. Рассматриваемые в статье модели ПС проще, так как управление непрерывным движением осуществляется только изменением состояния ее дискретной части. Необходимые условия оптимальности таких ПС доказываются для процессов с мгновенными многократными переключениями. Такие процессы, как правило, исключаются в задачах оптимизации ГС [5; 8–10], несмотря на то что именно они оказываются оптимальными не только в академических примерах, но и в приложениях, например, в задачах группового управления. Из-за наличия мгновенных многократных переключений полученные необходимые условия оптимальности отличаются от традиционных бо́льшим набором вспомогательных функций, удовлетворяющих сопряженным уравнениям и специальным промежуточным условиям. Применение доказанных условий демонстрируется на академическом примере, в котором оптимальный процесс имеет мгновенные многократные переключения.

1. Постановка задачи

Пусть на конечном промежутке времени $[t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени $t_1, \ldots, t_N$, образующие неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$:

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_{N+1} \triangleq t_F. \tag{1.1}$$

Движение ПС описывается уравнениями

$$\dot{x} = f(t, x(t), y(t)), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{1.2}$$

$$y_i = g(t_i, x(t_i), y_{i-1}, v_i), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.3}$$

где $x(t)$ — состояние непрерывной составляющей системы в момент времени

$$t \in T, \quad x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n;$$

y_i, v_i — состояние и управление дискретной составляющей системы в момент времени

$$t_i \in \mathcal{T}, \quad y \in Y \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in V \subset \mathbb{R}^q;$$

$\mathcal{N} \triangleq \{i = 0, 1, \ldots, N \,| t_i < t_{i+1}\}$ — множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i \triangleq [t_i, t_{i+1})$ непрерывного движения системы. При $t_i = t_{i+1}$ дифференциальное уравнение (1.2) не учитывается ($i \notin \mathcal{N}$), а промежуток T_i становится точкой $T_i = \{t_i\}$. Функции $f\colon T \times X \times Y \to \mathbb{R}^n$ и $g\colon T \times X \times Y \times V \to \mathbb{R}^m$ непрерывны на всей области определения вместе с частными производными первого порядка. При изменении состояния дискретной части согласно уравнению (1.3) исключаются так называемые *фиктивные* переключения, при которых состояние системы не изменяется ($y_i = y_{i-1}$) и фактического переключения нет. Возможное равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [2; 7].

Начальное состояние системы задано

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{1.4}$$

Условия (1.4) не исключают одного или нескольких переключений в начальный момент времени t_0, поскольку первые несколько моментов переключений (1.1) могут совпадать. Конечное состояние определяется первым достижением терминальной поверхности

$$(t_F, x(t_F), y_N) \in \mathbf{\Gamma}, \tag{1.5}$$

задаваемой системой уравнений $\Gamma(t_F, x_F, y_N) = 0$, где $\Gamma\colon [t_0, +\infty) \times X \times Y \to \mathbb{R}^k$ — вектор-функция, непрерывная на всей области определения вместе с частными производными первого порядка. Аналогичные терминальные условия могут быть на левом конце траектории либо связывать оба конца [11; 12].

Множество допустимых процессов $\mathcal{D}_0(t_0, x_0, y_0)$ образовано тройками $d = (x(\cdot), y(\cdot), v(\cdot))$, включающими траекторию $x(\cdot)$ непрерывной части системы — абсолютно непрерывную функцию $x\colon T \to X$, траекторию $y(\cdot)$ и управление $v(\cdot)$ дискретной составляющей системы — конечные последовательности

$$y(\cdot) \triangleq \{(t_i, y_i) | t_i \in \mathcal{T}, y_i \in Y, i = 1, \ldots, N\} \quad \text{и} \quad v(\cdot) \triangleq \{(t_i, v_i) | t_i \in \mathcal{T}, v_i \in V, i = 1, \ldots, N\},$$

которые удовлетворяют уравнениям движения (1.2), (1.3), начальным условиям (1.4) и терминальному ограничению (1.5). Подчеркнем, что множество моментов переключений $\mathcal{T}$ служит областью определения траектории $y(\cdot)$ и управления $v(\cdot)$, причем у разных допустимых траекторий количество переключений $N = |\mathcal{T}|$ и сами моменты переключений могут не совпадать. При этом не исключается случай отсутствия переключений, когда $N = 0$ и $\mathcal{T} = \varnothing$ — пустое множество по определению. При необходимости функцию $y(\cdot)$ будем доопределять на промежутках между моментами переключений, полагая ее непрерывной справа $y(t) = y_i$, $t \in T_i$, $i \in \mathcal{N}$.

Допустимый процесс ПС представляет собой совокупность траектории непрерывной составляющей системы, траектории и управления дискретной составляющей системы, причем функция $y(\cdot)$ согласно уравнению (1.2) служит управлением для непрерывной составляющей. В свою очередь траектория $x(\cdot)$ непрерывной части через уравнение (1.3) влияет на скачки состояний $y(\cdot)$. Отметим, что процесс управления определяется конечным числом параметров: количеством переключений N, моментами переключений $t_1, \ldots, t_N$, управлениями $v_1, \ldots, v_N$ и моментом t_F окончания процесса управления.

На множестве допустимых процессов $\mathcal{D}_0(t_0, x_0, y_0)$ задан функционал качества

$$I(d) = \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), y_i) dt + \sum_{i=1}^{N} g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, v_i) + F(t_F, x(t_F), y_N), \tag{1.6}$$

где функция $f^0\colon T \times X \times Y \to \mathbb{R}$ непрерывна почти при всех t и ограничена снизу, функция $F\colon [t_0, +\infty) \times X \times Y \to \mathbb{R}$ ограничена снизу, а функция $g^+\colon T \times X \times Y \times V \to \mathbb{R}_+$ неотрицательная. Последнее условие позволяет рассматривать каждое слагаемое g^+ в (1.6) как затраты (или “штраф”) при переключении $y_{i-1} \mapsto y_i$. Отметим, что количество переключений N и моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$ в функционале (1.6) не фиксированы и являются ресурсом управления.

Требуется найти минимальное значение функционала (1.6) и оптимальный процесс $d^* \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0, y_0)$, на котором это значение достигается:

$$I(d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0, y_0)} I(d). \tag{1.7}$$

Если наименьшего значения (1.7) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [12]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие неотрицательности функции g^+ в (1.6):

$$g^+(t, x, y, v) \geqslant \mathrm{const} > 0.$$

Применение таких “штрафов” в функционале качества исключает последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие. Отметим, что управляющие параметры в задаче (1.7) образуют “управляющий комплекс”, который включает количество переключений, моменты переключений, управления дискретной частью и момент окончания процесса управления. При заданном количестве переключений N имеется $N(q + 1) + 1$ управляющих параметров. Как правило, решение поставленной задачи $I \to \min$ сводится к решению ряда задач $I_N \to \min$ с фиксированным числом переключений N, которое последовательно увеличивается: $N = 0, 1, \ldots$. Отметим, что в прикладных задачах количество переключений, обычно, ограничено техническими требованиями.

2. Вариации функционала

Вывод условий оптимальности по методике [13] состоит в следующем: используя вариации управления, составляем уравнение для вариации траектории; выражаем вариацию функционала через вариации управления и траектории, исключаем из полученного выражения вариацию траектории, вводя вспомогательные переменные, удовлетворяющие сопряженной системе и условиям трансверсальности (в форме [14]). Будем сравнивать значения функционала (1.6) на опорном (невозмущенном) допустимом процессе $(x(\cdot), y(\cdot), v(\cdot))$ и возмущенном допустимом процессе $(\widetilde{x}(\cdot), \widetilde{y}(\cdot), \widetilde{v}(\cdot))$. Для ПС используем два типа вариаций управляющих параметров: либо малые изменения δv_i управления v_i и малую вариацию δt_F момента окончания, либо малые вариации δt_i моментов переключений t_i, $i = 1, \ldots, N$.

Рассмотрим первый случай. Малая вариация $\delta v(\cdot) = \widetilde{v}(\cdot) - v(\cdot)$ порождает малые вариации $\delta x(\cdot) = \widetilde{x}(\cdot) - x(\cdot)$ и $\delta y(\cdot) = \widetilde{y}(\cdot) - y(\cdot)$ траекторий ПС, которые описываются уравнениями

$$\delta \dot{x} = f_x[t]\delta x(t) + f_y[t]\delta y_i, \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.1}$$

$$\delta y_i = g_x[t_i]\delta x(t_i) + g_y[t_i]\delta y_{i-1} + g_v[t_i]\delta v_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.2}$$

Здесь и далее принято обозначение [13]: аргумент t, заключенный в квадратные скобки, означает, что функция вычислена на опорном режиме в указанный момент времени. Например, $f_x[t] = f_x(t, x(t), y(t))$. Вариации $\delta x(\cdot)$ и $\delta y(\cdot)$ имеют такой же порядок малости, что и $\delta v(\cdot)$. Уравнения в вариациях (2.1), (2.2) выполняются с точностью до $o\left(\|\delta v(\cdot)\|\right)$. Норму $\|\delta v(\cdot)\| = \max\{\delta v_1, \ldots, \delta v_N\}$ считаем величиной первого порядка малости.

Запишем вариацию функционала (1.6)

$$\delta I = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ f_x^0[t]\delta x(t) + f_y^0[t]\delta y_i \right\} dt + \sum_{i=1}^{N} \left\{ g_x^+[t_i]\delta x(t_i) + g_y^+[t_i]\delta y_{i-1} + g_x^+[t_i]\delta v_i \right\}$$
$$+ F_x[t_F]\delta x_F + F_y[t_F]\delta y_N, \tag{2.3}$$

где $\delta x_F = \delta x(t_F) + f[t_F]\delta t_F$. Теперь следует исключить в (2.3) вариации δx и δy при помощи вспомогательных функций. Для этого будем использовать тождество

$$\varphi_N(t_F) - \varphi_0(t_0) = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\varphi}_i(t)dt + \sum_{i=1}^{N} [\varphi_i(t_i) - \varphi_{i-1}(t_{i-})], \tag{2.4}$$

справедливое для скалярных функций φ_i, определенных соответственно в точках t_i, $i = 1, \ldots, N$, и абсолютно непрерывных на T_i, $i \in \mathcal{N}$. В тождестве (2.4) через t_{i-} обозначен момент времени непосредственно перед i-м скачком, т. е. $t_{i-} = t_i - 0$ при $t_{i-1} < t_i$ и $t_{i-} = t_{i-1}$ при $t_{i-1} = t_i$.

Введем функции Гамильтона — Понтрягина для непрерывной и дискретной составляющих системы

$$H(\psi, t, x, y) = \psi f(t, x, y) - f^0(t, x, y); \quad \widehat{H}(\eta, t, x, y, v) = \eta g(t, x, y, v) - g^+(t, x, y, v), \tag{2.5}$$

где $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^n)$, $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^m)$ — вспомогательные переменные.

Для промежутка T с разбиением (1.1) рассмотрим вспомогательные функции $\psi_i(\cdot)$, $\eta_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \ldots, N$, определенные на T_i и абсолютно непрерывные на ненулевых (по длине) промежутках T_i, $i \in \mathcal{N}$. Напомним, что $T_i = \{t_i\}$ при $t_i = t_{i+1}$, $i \notin \mathcal{N}$. Предполагаем, что вспомогательные функции, удовлетворяют

1) сопряженным уравнениям

$$\dot{\psi}_i(t) = -H_x(\psi_i(t), t, x(t), y_i); \quad \dot{\eta}_i(t) = -H_y(\psi_i(t), t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}; \tag{2.6}$$

2) промежуточным условиям

$$\begin{aligned} \psi_i(t_i) - \psi_{i-1}(t_{i-}) &= -\widehat{H}_x(\eta_i(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}, v_i), \\ \eta_{i-1}(t_{i-}) &= \widehat{H}_y(\eta_i(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}, v_i), \quad i = 1, \ldots, N; \end{aligned} \tag{2.7}$$

3) условию трансверсальности

$$\{F_t[t_F] - H[t_F]\}\delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi_N(t_F)\}\delta x_F + \{F_y[t_F] + \eta_N(t_F)\}\delta y_N = 0 \tag{2.8}$$

для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_t[t_F]\delta t_F + \Gamma_x[t_F]\delta x_F + \Gamma_y[t_F]\delta y_N = 0$. В (2.8), как и ранее, $H[t_F] = H(\psi(t_F), t_F, x(t_F), y_N)$ — значение функции на опорном режиме в момент t_F.

Записываем тождество (2.4) для функций $\varphi_i(t) = \psi_i(t)\delta x(t)$ и $\varphi_i(t) = \eta_i(t)\delta y(t)$. Учитывая непрерывность $\delta x(\cdot)$, постоянство $\delta y(t) = \delta y_i$ на T_i, а также равенства $\delta x(t_0) = 0$ и $\delta y(t_0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \psi_N(t_F)\delta x(t_F) - \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \big[\dot\psi_i(t)\delta x(t) + \psi_i(t)\delta\dot x(t)\big]dt - \sum_{i=0}^{N}[\psi_i(t_i) - \psi_{i-1}(t_{i-})]\delta x(t_i) = 0, \\ \eta_N(t_F)\delta y_N - \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \dot\eta_i(t)\delta y_i dt - \sum_{i=0}^{N}[\eta_i(t_i)\delta y_i - \eta_{i-1}(t_{i-})\delta y_{i-1}] = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Добавляем эти выражения в правую часть (2.3). Сумма терминальных членов при этом станет нулевой. Действительно, учитывая равенство $\delta x(t_F) = \delta x_F - f[t_F]\delta t_F$, имеем

$$\psi_N(t_F)\delta x(t_F) + f^0[t_F]\delta t_F = \psi_N(t_F)\{\delta x_F - f[t_F]\delta t_F\} + f^0[t_F]\delta t_F = \psi_N(t_F)\delta x(t_F) - H[t_F]\delta t_F.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\{F_t[t_F] + f^0[t_F]\}\delta t_F + F_x[t_F]\delta x_F + F_y[t_F]\delta y_N + \psi_N(t_F)\delta x(t_F) + \eta_N(t_F)\delta y_N \\ &= \{F_t[t_F] - H[t_F]\}\delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi_N(t_F)\}\delta x_F + \{F_y[t_F] + \eta_N(t_F)\}\delta y_F = 0 \end{aligned}$$

согласно условию трансверсальности (2.8).

Преобразуем интегральные члены после добавления к правой части (2.3) левых частей (2.9). С учетом уравнения в вариациях (2.1) и сопряженных уравнений (2.6) подынтегральная функция будет равна нулю

$$\begin{aligned} f_x^0[t]\delta x(t) + f_y^0[t]\delta y_i - \dot\psi_i(t)\delta x(t) - \psi_i(t)\delta\dot x(t) - \dot\eta(t)\delta y_i = f_x^0[t]\delta x(t) + f_y^0[t]\delta y_i \\ + \{\psi_i(t)f_x[t] - f_x^0[t]\}\delta x(t) - \psi_i(t)\{f_x[t]\delta x(t) + f_y[t]\delta y_i\} + \{\psi_i(t)f_y[t] - f_y^0[t]\}\delta y_i = 0. \end{aligned}$$

Осталось преобразовать суммы. Записываем все слагаемые, относящиеся к моменту t_i,

$$\begin{aligned} g_x^+[t_i]\delta x(t_i) + g_y^+[t_i]\delta y_{i-1} + g_v^+[t_i]\delta v_i - [\psi_i(t_i) - \psi_{i-1}(t_{i-})]\delta x(t_i) \\ - [\eta_i(t_i)\delta y_i - \eta_{i-1}(t_{i-})\delta y_{i-1}]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Подставляя в (2.10) вариацию (2.2), группируем слагаемые с одинаковыми вариациями

$$\begin{aligned} &\big\{g_x^+[t_i] - \psi_i(t_i) + \psi_{i-1}(t_{i-}) - \eta_i(t_i)g_x[t_i]\big\}\,\delta x(t_i) \\ &+ \big\{g_y^+[t_i] - \eta_i(t_i)g_x[t_i] + \eta_i(t_i)g_y[t_i] + \eta_{i-1}(t_{i-})\big\}\,\delta y_{i-1} + \big\{g_v^+[t_i] - \eta_i(t_i)g_v[t_i]\big\}\,\delta v_i \\ &= \big\{-\widehat{H}_x[t_i] - \psi_i(t_i) + \psi_{i-1}(t_{i-})\big\}\delta x(t_i) + \big\{-\widehat{H}_y[t_i] + \eta_{i-1}(t_{i-})\big\}\delta y_{i-1} - \widehat{H}_v[t_i]\delta v_i = -\widehat{H}_v[t_i]\delta v_i. \end{aligned}$$

Таким образом, вариация (2.3) функционала (1.6) имеет вид

$$\delta I = -\sum_{i=1}^{N} \widehat{H}_v(\eta_i(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}, v_i)\delta v_i. \tag{2.11}$$

Рассмотрим теперь второй случай — вариации δt_i моментов t_i, $i=1,\ldots,N$. Предполагаем, что они настолько малы, что выполняются неравенства

$$t_0 \leqslant t_1 + \delta t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N + \delta t_N \leqslant t_F.$$

Величину $|\delta t| = |\delta t_1| + \ldots + |\delta t_N|$ будем считать малой первого порядка. Вариация $\delta x(\cdot)$ имеет тот же порядок. Вариация $\delta y(t) = \widetilde{y}(t) - y(t)$ имеет первый порядок малости при всех t, за исключением промежутков ΔT_i между t_i и $t_i+\delta t_i$, $i \in \mathcal{N}$, где разность $\widetilde{y}(t)-y(t)$ конечная. Иначе говоря, вариация $\delta y(\cdot)$ либо малая, либо игольчатая [15]. Запишем уравнения в вариациях

$$\delta\dot{x}(t) = f_x[t]\delta x(t) + f_y[t]\delta y_i + \widetilde{f}[t] - f[t], \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.12}$$

$$\delta y_i = g_t[t_i]\delta t_i + g_x[t_i]\big\{\delta x(t_i) + g_x[t_i]\widetilde{f}[t_i]\delta t_i\big\} + g_y[t_i]\delta y_{i-1}, \quad i=1,\ldots,N. \tag{2.13}$$

Здесь $\widetilde{f}[t] = f(t, x(t), \widetilde{y}(t))$. Разность $\widetilde{f}[t] - f[t]$ конечная на малых промежутках ΔT_i. В остальных точках она нулевая. Уравнения (2.12) и (2.13) выполняются с погрешностью $o(|\delta t|)$.

Найдем вариацию функционала (1.6). Преобразуем интегральные члены приращения функционала. Для $\delta t_i > 0$ и $\delta t_{i+1} > 0$ имеем

$$\int\limits_{t_i+\delta t_i}^{t_{i+1}+\delta t_{i+1}} \widetilde{f}^0[t]dt - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f^0[t]dt = \int\limits_{t_i+\delta t_i}^{t_{i+1}} \big\{\widetilde{f}^0[t] - f^0[t]\big\}dt + \int\limits_{t_{i+1}}^{t_{i+1}+\delta t_{i+1}} \widetilde{f}^0[t]dt - \int\limits_{t_i}^{t_i+\delta t_i} f^0[t]dt.$$

Суммируем эти выражения, учитывая, что $\delta t_0 = 0$, $\delta t_{N+1} = 0$,

$$\sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i+\delta t_i}^{t_{i+1}} \big\{\widetilde{f}^0[t] - f^0[t]\big\}dt + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_i+\delta t_i} \big\{\widetilde{f}^0[t] - f^0[t]\big\}dt = \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \big\{\widetilde{f}^0[t] - f^0[t]\big\}dt.$$

Для отрицательных вариаций δt_i получаем такое же выражение.

Теперь запишем вариацию функционала (1.6)

$$\delta I = \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \big\{f^0_x[t]\delta x(t) + f^0_y[t]\delta y_i + \widetilde{f}^0[t] - f^0[t]\big\}dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \big\{g^+_t[t_i]\delta t_i + g^+_x[t_i]\big(\delta x(t_i) + \widetilde{f}(t_i)\delta t_i\big) + g^+_y[t_i]\delta y_{i-1}\big\} + F_x[t_F]\delta x(t_F) + F_y[t_F]\delta y_N, \tag{2.14}$$

где

$$\widetilde{f}[t_i] = \begin{cases} f(t, x(t), y_{i-1}), & \delta t_i > 0, \\ f(t, x(t), y_i), & \delta t_i < 0. \end{cases}$$

Исключаем в (2.14) вариации δx и δy при помощи вспомогательных функций, которые удовлетворяют условиям (2.6)–(2.8). Прибавляем к правой части (2.14) левые части тождеств (2.9). Сумма терминальных членов из-за условия трансверсальности будет равна нулю. Подынтегральная функция согласно уравнениям (2.6) и (2.12) принимает вид

$$f^0_x[t]\delta x(t) + f^0_y[t]\delta y_i + \widetilde{f}^0[t] - f^0[t] - \dot{\psi}_i(t)\delta x(t) - \psi_i(t)\delta\dot{x}(t) - \dot{\eta}_i(t)\delta y_i$$

$$= \widetilde{f}^0[t] - f^0[t] + \psi_i(t)\big\{\widetilde{f}[t] - f[t]\big\} = H(\psi_i(t), t, x(t), y(t)) - H\big(\psi_i(t), t, x(t), \widetilde{y}(t)\big) = \Delta H[t].$$

Заметим, что разность $\Delta H[t]$ отлична от нуля только на промежутках ΔT_i между t_i и $t_i+\delta t_i$. Поэтому

$$\sum_{i=0}^{N}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Delta H[t]dt=\int\limits_{t_0}^{t_F}\Delta H[t]dt=\sum_{i=1}^{N}\Delta H[t_i]\delta t_i,$$

где $\Delta H[t_i]=H(\psi_i(t_i),t_i,x(t_i),y_{i-1})-H(\psi_i(t_i),t_i,x(t_i),y_i)$. Осталось преобразовать суммы. Собираем слагаемые, относящиеся к моменту переключения t_i, учитывая уравнение в вариациях (2.13) и промежуточные условия (2.7). Аргумент $[t_i]$ не указываем для сокращения записей

$$g_t^+\delta t_i+g_x^+\big[\delta x(t_i)+\widetilde{f}\delta t_i\big]g_y^+\delta y_{i-1}-\big[\psi_i(t_i)-\psi_{i-1}(t_{i-})\big]\delta x(t_i)-\eta_i(t_i)\delta y_i+\eta_{i-1}(t_{i-})\delta y_{i-1}$$
$$=\big\{g_t^++g_x^+\widetilde{f}-\eta_i(t_i)g_t-\eta_i(t_i)g_x\widetilde{f}\big\}\delta t_i=-\big\{\widehat{H}_t[t_i]+\widehat{H}_x[t_i]\widetilde{f}[t_i]\big\}\delta t_i.$$

Таким образом, при вариации моментов переключений получаем

$$\delta I=-\sum_{i=1}^{N}\big\{\widehat{H}_t[t_i]+\widehat{H}_x[t_i]\widetilde{f}[t_i]+\Delta H[t_i]\big\}\delta t_i. \tag{2.15}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Полученные вариации (2.11) и (2.15) функционала (1.6), определенного на траекториях ПС, позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности. Поскольку решаемая задача конечномерная, применяем известные результаты условной минимизации [16].

Теорема. *Пусть оптимальный процесс $(x(\cdot),y(\cdot),v(\cdot))$ имеет N переключений в моменты $t_1,\ldots,t_N$: $t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_N\leqslant t_F$. Тогда существуют функции $\psi_i(\cdot)$, $\eta_i(\cdot)$, $i=0,1,\ldots,N$, и такие числа $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{N+1}$, неравные нулю одновременно, что выполняются*

1) *сопряженные уравнения*

$$\dot{\psi}_i(t)=-H_x(\psi_i(t),t,x(t),y_i);\quad \dot{\eta}_i(t)=-H_y(\psi_i(t),t,x(t),y_i),\quad t\in T_i,\quad i\in\mathcal{N};$$

2) *промежуточные условия*

$$\psi_i(t_i)-\psi_{i-1}(t_{i-})=-\widehat{H}_x(\eta_i(t_i),t_i,x(t_i),y_{i-1},v_i),$$
$$\eta_{i-1}(t_{i-})=\widehat{H}_y(\eta_i(t_i),t_i,x(t_i),y_{i-1},v_i),\quad i=1,\ldots,N;$$

3) *условия трансверсальности*

$$\{F_t[t_F]-H[t_F]\}\delta t_F+\{F_x[t_F]+\psi_N(t_F)\}\delta x_F+\{F_y[t_F]+\eta_N(t_F)\}\delta y_N=0$$

для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_t[t_F]\delta t_F+\Gamma_x[t_F]\delta x_F+\Gamma_y[t_F]\delta y_N=0$;

4) *условия невозрастания*

$$\widehat{H}_v(\eta_i(t_i),t_i,x(t_i),y_{i-1},v_i)\delta v_i\leqslant 0$$

для любых допустимых вариаций δv_i, $i=1,\ldots,N$;

5) *условия стационарности*

$$\lambda_0\big\{\widehat{H}_t[t_i]+\widehat{H}_x[t_i]\widetilde{f}[t_i]+\Delta H[t_i]\big\}+\lambda_i-\lambda_{i+1}=0,\quad i=1,\ldots,N;$$

6) *условия дополняющей нежесткости* $\lambda_i(t_{i-1}-t_i)=0$, $i=1,\ldots,N+1$;

7) *условия неотрицательности* $\lambda_i\geqslant 0$, $i=0,1,\ldots,N+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы следует из необходимых условий первого порядка экстремума функции при ограничениях типа неравенств $t_{i-1} \leqslant t_i$, $i = 1, \ldots, N+1$. Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи имеет вид [16]

$$L = \lambda_0 I + \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i (t_{i-1} - t_i),$$

а ее частные производные выражаются через вариации (2.11) и (2.15). Неравенства 4) обеспечивают неотрицательность приращения функционала при малых вариациях управлений v_i. Равенства 5) соответствуют условиям стационарности функции Лагранжа по переменным t_i. Условия 6) и 7) отвечают методу Лагранжа снятия ограничений типа неравенств [11]. □

Заметим, что условия 1)–3) теоремы вместе с уравнениями движения позволяют получить вспомогательные функции, зависящие от $3N+2$ параметров $t_1, \ldots, t_N$; $v_1, \ldots, v_N$; $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N+1}$. Для нахождения этих параметров имеется система из $3N+1$ условий 4)–6). Этих уравнений хватает, так как коэффициенты λ_i определяются с точностью до положительного множителя. Как правило, систему дополняют либо равенством $\lambda_0 = 0$ (вырожденный случай), либо равенством $\lambda_0 = 1$ (невырожденный случай). Таким образом, теорема, как и принцип максимума [15], дает “полную” систему условий для нахождения процесса, который может быть оптимальным.

4. Пример

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной ПС:

$$0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_{N+1} \triangleq 1; \tag{4.1}$$

$$\dot{x} = y_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad t_i < t_{i+1}; \tag{4.2}$$

$$y_i = y_{i-1} + v_i, \quad i = 1, \ldots, N; \tag{4.3}$$

$$x(0) = x_0 = 2, \quad y_0 = 0; \tag{4.4}$$

$$I = \sum_{i=1}^{N} \left[a + \frac{1}{2} v_i^2 \right] + \frac{1}{2} x^2(1) + \frac{1}{2} y_N^2 \to \min. \tag{4.5}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $y_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$; a — положительная величина. Требуется найти минимальное значение функционала (4.5) и оптимальный процесс, на котором это значение достигается. Напомним, что в рассматриваемой задаче управляющими параметрами являются количество переключений N, моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$ и управления переключениями $v_1, \ldots, v_N$.

Для решения задачи применяем необходимые условия оптимальности. Записываем функции Гамильтона — Понтрягина (2.5)

$$H(\psi, t, x, y) = \psi x; \quad \widehat{H}(\eta, t, x, y, v) = \eta(y + v) - a - \frac{1}{2} v^2.$$

Составляем

1) сопряженные уравнения

$$\dot{\psi}_i(t) = 0, \quad \dot{\eta}_i(t) = -\psi_i(t), \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N;$$

2) промежуточные условия

$$\psi_i(t_i) - \psi_{i-1}(t_{i-}) = 0, \quad \eta_{i-1}(t_{i-}) = \eta_i(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N;$$

3) условия трансверсальности $\psi_N(1) = -x(1)$, $\eta_N(1) = -y_N$, так как вариации $\delta x(1)$ и δy_N произвольные;

4) условие невозрастания функции Гамильнона — Понтрягина $\eta_i(t_i) - v_i = 0$, так как вариации δv_i произвольные;

5) условия стационарности $\lambda_0\{\psi_i(t_i)y_{i-1} - \psi_i(t_i)y_i\} + \lambda_i - \lambda_{i+1} = 0$, $i = 1, \ldots, N$;

6) условия дополняющей нежесткости $\lambda_i(t_{i-1} - t_i) = 0$, $i = 1, \ldots, N+1$;

7) условия неотрицательности $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$.

В первую очередь замечаем, что задача невырожденная. Действительно, если $\lambda_0 = 0$, то из условий 5) и 7) следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{N+1} > 0$. Тогда все моменты переключений совпадают, причем $0 = t_1 = \ldots = t_N = t_{N+1} = 1$, что невозможно. Значит, $\lambda_0 \neq 0$, поэтому полагаем $\lambda_0 = 1$.

Из 1)–3) следует, что функции $\psi_i(t)$ постоянные, причем $\psi_i(t) = \psi = -x(1)$. Тогда все функции $\eta_i(t)$ на соответствующих промежутках совпадают с функцией $\eta(t) = -y_N - \psi(1-t)$. Поэтому условия 4), 5) можно упростить

$$v_i = -y_N + \psi(1 - t_i), \quad i = 1, \ldots, N; \tag{4.6}$$

$$-\psi v_i + \lambda_i - \lambda_{i+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{4.7}$$

Складывая все равенства (4.6) и учитывая, что $y_N = v_1 + \ldots + v_N$, получаем

$$(N+1)y_N = \psi(N - t_1 - \ldots - t_N). \tag{4.8}$$

Отсюда следует, что $t_1 < 1$. Действительно, если $t_1 = \ldots = t_N = 1$, то $y_N = 0$. Тогда согласно (4.6) $v_i = 0$, т. е. все переключения фиктивные, что невозможно. Значит, $t_1 < 1$, тогда y_N и ψ имеют одинаковые знаки. Можно показать, что эти величины отрицательные. В самом деле, запишем равенство $-\psi = x(1)$, используя уравнение движения (4.2)

$$-\psi = x_0 + v_1(1 - t_1) + \ldots + v_N(1 - t_N). \tag{4.9}$$

Подставляя в (4.9) управления (4.6) и состояние y_N, выраженное из равенства (4.8), имеем

$$x_0 + \psi\Big\{1 + (1-t_1)^2 + \ldots + (1-t_N)^2 - \frac{1}{N+1}\,[N - t_1 - \ldots - t_N]^2\Big\} = 0.$$

Выражение в фигурных скобках положительное, так как среднее арифметическое не превосходит среднего квадратичного. Значит, ψ и x_0 имеют разные знаки, т. е. $\psi < 0$, поскольку $x_0 = 2 > 0$. Отметим еще, что $v_1 < 0$, так как последовательность (4.6) возрастающая при $\psi < 0$, а сумма $y_N = v_1 + \ldots + v_N < 0$.

Теперь покажем, что все переключения происходят в терминальные моменты времени (при $t = 0$ и/или $t = 1$). Действительно, если в цепочке (4.1) имеется два строгих неравенства, например, $t_1 < t_2 < t_3$, то из условия дополняющей нежесткости следует $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Тогда, записывая (4.7) для $i = 2$, получаем $\psi v_2 = 0$. Так как $\psi \neq 0$, то $v_2 = 0$. Значит, переключение в момент t_2 фиктивное, что невозможно. Следовательно, в цепочке (4.1) может быть только одно строгое неравенство. Самый общий вид (4.1) при этом ограничении

$$0 = t_1 = \ldots = t_s < t_{s+1} = \ldots = t_{s+k} = 1, \tag{4.10}$$

т. е. процесс имеет s переключений в начальный момент времени и k переключений — в конечный.

Если $k = 0$, имеем $s \geqslant 1$, $v_1 = -y_N + \psi$ согласно (4.6). Поскольку $y_N = sv_1$, то $\psi = (s+1)v_1$. Подставляя это в (4.8), приходим к равенству $v_1 = -x_0/(2s+1)$. Обозначим через I_{s+k} величину функционала (4.5) для процесса с переключениями (4.10). Тогда

$$I_{s+0} = as + \frac{s+1}{2(2s+1)}x_0^2. \tag{4.11}$$

Если $k > 0$, то из (4.6) получаем $v_1 = -y_N + \psi$ и $v_N = -y_N$. Так как $y_N = sv_1 + kv_N$, то $v_N = -sv_1/(k+1)$, $v_1 = (k+1)\psi/(s+k+1)$. Подставляя последнее выражение в (4.8), имеем

$$-\psi = x_0 + \frac{s(k+1)}{s+k+1}\psi \quad \Leftrightarrow \quad \psi = -\frac{s+k+1}{ks+k+2s+1}x_0.$$

Тогда

$$v_1 = -\frac{k+1}{ks+k+2s+1}x_0.$$

Вычисляем значение функционала (4.5) для оптимального процесса с переключениями (4.10)

$$I_{s+k} = a(s+k) + \frac{s+k+1}{2(ks+k+2s+1)}x_0^2. \tag{4.12}$$

Эта формула при $k = 0$ совпадает с (4.11).

Оптимальное количество переключений s и k находится в результате целочисленной минимизации (4.12). Сравнивая значения функционалов, не забываем про случай без переключений, для которого $I_0 = 2$. С уменьшением штрафа a оптимальное количество переключений увеличивается. Например, для $a = 1$ минимальное значение (4.12) имеет процесс с одним переключением ($s = 1$, $k = 0$), причем $I_{1+0} = 7/3 \approx 2.33$. Значит, оптимальным будет процесс без переключений, так как $I_0 < I_{1+0}$. Для $a = 0.1$ получаем оптимальный процесс с тремя переключениями, $I_{2+1} = 1.3$. При $a = 0.01$ оптимальный процесс имеет 23 переключения, $I_{12+11} \approx 0.5157$.

Заключение

Предлагаемые необходимые условия применяются для решения задач оптимального управления переключаемыми системами. Эти задачи отличаются от оптимизации непрерывно-дискретных систем свободными моментами переключений, которые могут выбираться при оптимизации процесса управления. Именно поиск моментов переключений является наиболее сложной частью решения. Как показывают примеры (академические и прикладные), минимизируемый функционал как функция моментов переключений имеет овражный характер и множество локальных минимумов. Необходимые условия оптимальности при этом служат для проверки результатов численной оптимизации.

Условия оптимальности получены для переключаемых систем, модели движения которых фиксированы, в частности, размерность системы постоянная. Управление непрерывным движением кусочно-постоянное, а скачки ограничены рекуррентным уравнением. Несомненный интерес представляют необходимые условия оптимальности для более широкого класса гибридных систем переменной размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев С.Н., Маликов А.И.** О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Т.1. Казань: Фолиант, 2011. С. 23–81.
2. **Бортаковский А.С.** Оптимизация переключающих систем. М.: Изд-во МАИ, 2016. 120 с.
3. **Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.K.** A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory // IEEE Trans. Automatic Control. 1998. Vol. 43, no. 1. P. 31–45. doi: 10.1109/9.654885 .
4. **Brockett R.W.** Hybrid models for motion control systems // Essays on control: Perspectives in the theory and its applications / eds. H.L. Trentelman, J.C. Willems, Boston: Birkhauser, 1993. P. 29–53. (Ser. Progress in Systems and Control Theory; vol. 14). doi: 10.1007/978-1-4612-0313-1_2 .
5. **Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.** Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005. 429 с.

6. **Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.** Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами // Автоматика и телемеханика. 1987. № 7. С. 57–66.
7. **Бортаковский А.С.** Синтез оптимальных систем управления со сменой моделей движения // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2018. №4. С. 57–74.
8. **Sussmann H.J.** A maximum principle for hybrid optimal control problems // Proc. of 38th IEEE Conf. on Decision and Control (Phoenix, AZ, USA). 1999. P. 425–430. doi: 10.1109/CDC.1999.832814.
9. **Hedlund S., Rantzer A.** Optimal control of hybrid systems // Proc. of 38th IEEE Conf. on Decision and Control. (Phoenix, AZ). 1999. P. 3972–3977. doi: 10.1109/CDC.1999.827981.
10. **Дмитрук А.В., Каганович А.М.** Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями // Нелинейная динамика и управление. Вып. 6. М.: Физматлит, 2008. С. 101–136.
11. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
12. **Кротов В.Ф., Гурман В.И.** Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 446 с.
13. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
14. **Летов А.М.** Динамика полета и управление. М.: Наука, 1973. 390 с.
15. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
16. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

Поступила 1.02.2021
После доработки 22.02.2021
Принята к публикации 1.03.2021

Бортаковский Александр Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет);
профессор
"Национальный исследовательский технологический
университет "МИСиС"
г. Москва
asbortakov@mail.ru

REFERENCES

1. Vasiliev S.N., Malikov A.I. Some results on the stability of switchable and hybrid systems. In: *Actual problems of continuum mechanics, vol.* 1. Kazan': Folio Publ., 2011, pp. 23–81. ISBN: 978-5-905576-03-4.
2. Bortakovskii A.S. *Optimizatsiya pereklyuchayushchikh sistem* [Optimization of switching systems]. Moscow: Mosk. Aviats. Inst. Publ., 2016, 120 p. ISBN: 978-5-4316-0329-7.
3. Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.K. A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 1, pp. 31–45. doi: 10.1109/9.654885.
4. Brockett R.W. Hybrid models for motion control systems. In: Trentelman H.L., Willems J.C. (eds), *Essays on control: perspectives in the theory and its applications*, Progress in Systems and Control Theory, vol. 14, Boston: Birkhauser, 1993, pp. 29–53. doi: 10.1007/978-1-4612-0313-1_2.
5. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snymi upravleniyami* [Optimization of dynamic systems with impulse controls]. Moscow: Nauka Publ., 2005, 429 p. ISBN: 5-02-033458-8.
6. Bortakovskii A.S., Panteleev A.V. Sufficient conditions for optimal control of batch systems. *Avtomat. i Telemekh.*, 1987, no. 7, pp. 57–66 (in Russian).
7. Bortakovskii A.S. Synthesis of optimal control-systems with a change of the models of motion. *J. Comp. Syst. Sci. Internat.*, 2018, vol. 57, no. 4, pp. 543–560. doi: 10.1134/S1064230718040056.
8. Sussmann H.J. A maximum principle for hybrid optimal control problems. *Proc. of 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, AZ, USA*, 1999, vol. 1, pp. 425–430. doi: 10.1109/CDC.1999.832814.
9. Hedlund S., Rantzer A. Optimal control of hybrid systems. *Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, AZ*, 1999, vol. 4, pp. 3972–3977. doi: 10.1109/CDC.1999.827981.

10. Dmitruk A.V., Kaganovich A.M. Maximum principle for optimal control problems with intermediate constraints. *Comput. Math. Model.*, 2011, vol. 22, no. 2, pp. 180–215. doi: 10.1007/s10598-011-9096-8 .
11. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Studies Math. Appl., vol. 6. Amsterdam; N Y; Oxford: North-Holland Publ. Comp., 1979, 460 p. ISBN: 0444851674 . Original Russian text published in Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.
12. Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and problems of optimal control]. Moscow: Nauka Publ., 1973, 446 p.
13. Fedorenko R.P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya* [Approximate solution of optimal control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 488 p.
14. Letov A.M. *Dinamika poleta i upravlenie* [Flight dynamics and control]. Moscow: Nauka Publ., 1973, 390 p.
15. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes* N Y; London: John Wiley & Sons, 1962, 360 p. ISBN: 0470693819 . Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
16. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Factorial Press, 2002, 824 p. ISBN: 5-88688-056-9 .

Received February 1, 2021
Revised February 22, 2021
Accepted March 1, 2021

Alexandr Sergeevich Bortakovskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia; National University of Science and Technology MISIS, Moscow, 119049 Russia, e-mail: asbortakov@mail.ru .

Cite this article as: A. S. Bortakovskii. Necessary optimality conditions for switching systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 67–78 .