

УДК 519.62

**ОБЪЕКТ С ПОРАЖАЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ И НЕДРУЖЕСТВЕННЫЙ
НАБЛЮДАТЕЛЬ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹****В. И. Бердышев**

В условиях наблюдения движется автономный объект, обладающий скоростным поражающим устройством, от которого наблюдатель, являющийся телесным, вынужден скрываться за выпуклые фрагменты окружающей местности. Наблюдатель отслеживает движение объекта в безопасном для себя режиме. Задача объекта — уклонение от наблюдения посредством выбора скорости движения. Строится траектория наблюдателя, позволяющая следить за объектом на возможно большей части траектории объекта.

Ключевые слова: навигация, оптимальная траектория, движущийся объект, телесный наблюдатель.

V. I. Berdyshev. An object with a destructive device and an unfriendly observer in three-dimensional space.

An autonomous object with a high-speed destructive device is moving under observation, and a bodily observer is hiding from the device behind convex fragments of the surrounding area. The observer tracks the motion of the object in a safe mode. The task of the object is to evade observation by choosing its speed. The observer's trajectory allowing to follow the object on the largest possible part of the object's trajectory is constructed.

Keywords: navigation, optimal trajectory, moving object, bodily observer.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-49-58

Введение

В заданном коридоре $Y \subset \mathbb{R}^3$, граница которого гомеоморфна сфере, из точки t_* в точку t^* ($t_*, t^* \in Y$) движется объект t со скоростным поражающим мини-объектом m . В \mathbb{R}^3 имеется множество G , $G \cap Y = \emptyset$, являющееся замыканием открытого множества, препятствующее видимости и движению. Наблюдатель f , недружественный по отношению к объекту t , опасаясь мини-объекта, располагается вблизи выпуклых фрагментов границы ∂G множества G . Такой фрагмент далее будем обозначать через S . Он должен обеспечить наблюдателю возможность укрыться от m . Скорость v_m мини-объекта m существенно превосходит скорости v_f , v_t наблюдателя и объекта, при этом $v_t \geq \underline{v} > 0$, где \underline{v} — минимальная скорость объекта.

Пусть в момент старта объекта t из точки t_* наблюдатель находится в окрестности выбранного им фрагмента S . Объект t , находясь в точке $t_0 \in Y$, обнаружил наблюдателя $f \notin Y$, демаскировавшего себя. Учитывая возможность немедленного запуска мини-объекта, наблюдатель занимает исходное для движения положение f_0 , имея точку t_0 в зоне видимости и рассчитывая уйти в укрытие за время \mathcal{R}/v_m , где $\mathcal{R} = \|f_0 - t_0\|$. Одновременно с перемещением из начального положения f_0 в укрытие наблюдатель продолжает по мере возможности следить за движением объекта t . В предлагаемой модели объект и мини-объект m изображаются точками, а наблюдатель — шаром $V_\varepsilon(f)$ малого радиуса $\varepsilon > 0$, в центре f которого расположено средство наблюдения. Попадание мини-объекта в шар $V_\varepsilon(f)$ означает гибель наблюдателя.

¹Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Траектория объекта — это кривая $\mathcal{T} \subset Y$ (маршрут) в совокупности со скоростным режимом v_t движения объекта по ней. Требуется выяснить возможности наблюдателя следить за объектом в безопасном для себя режиме, а объекта — уклониться от наблюдения на участке траектории от момента прохождения объектом точки t_0 до момента полного укрытия наблюдателя.

В разд. 1–3 данной работы характеризуются участки траектории объекта \mathcal{T} , по которым возможен скрытый от наблюдателя проход объекта в предположении, что наблюдатель движется в \mathbb{R}^3 равномерно по плоской траектории \mathcal{T}_f . Приведены доказательства теорем 1–3, сформулированных в [1]. В разд. 4 строится траектория \mathcal{T}_f наблюдателя, равномерное движение по максимально длинному начальному участку которой позволяет ему видеть всю траекторию \mathcal{T} объекта. Для объекта предлагается способ выбора скоростного режима v_t на \mathcal{T} , позволяющего объекту двигаться вне зоны наблюдения по наиболее длинному конечному участку своей траектории. Доказана теорема 4.

Экстремальным задачам движения объектов в среде с препятствиями посвящены работы [2–4].

1. Определения. Вспомогательные предложения

Фрагмент S — связная открытая на ∂G поверхность, являющаяся выпуклой, т. е. в каждой точке $s \in S$ существует опорная к S плоскость (относительно которой S расположена по одну сторону). Наблюдатель f выбирает фрагмент S и свое начальное положение f_0 так, чтобы

- видеть возможно большую часть коридора Y из точек множества $\{x + \varepsilon n(x) : x \in S\}$, где $n(x)$ — нормаль к S в точке $x \in S$, направленная вовне S , $\|n(x)\| = 1$;
- расстояние $\rho(t_0, S)$ было достаточно большим для обеспечения наблюдателю возможности укрыться от мини-объекта, стартовавшего из точки t_0 ;
- $\inf \{\|x - y\| : x \in S, y \in Y\} > \varepsilon$;
- существовал шар $V_\varepsilon(\bar{f})$, удовлетворяющий включению

$$V_\varepsilon(\bar{f}) \subset \text{co}(t_0, S) \setminus \text{conv}(t_0 \cup S), \quad (1.1)$$

где $\text{co}(t_0, S) = \{t_0 + \lambda(x - t_0) : x \in S, \lambda \geq 0\}$ — конус с вершиной t_0 , натянутый на S , а $\text{conv}(t_0 \cup S)$ — выпуклая оболочка объединения $t_0 \cup S$;

— время $\bar{\tau}$ на процесс перехода наблюдателя в положение $V_\varepsilon(\bar{f}) : V_\varepsilon(f_\tau) : 0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ было бы меньше, чем \mathcal{R}/v_m , где $f_\tau = \bar{f}$. Далее предполагается, что \bar{f} — ближайшая к f_0 из точек, удовлетворяющих включению (1.1).

Представляют интерес следующие два варианта расположения фрагмента S относительно t_0 и Y (см. рис. 1), имеющие аналоги в случае \mathbb{R}^2 [2].

I. Фрагмент S и точка y_s расположены по разные стороны от Q .

II. Фрагмент S и точка y_s расположены по одну сторону от Q .

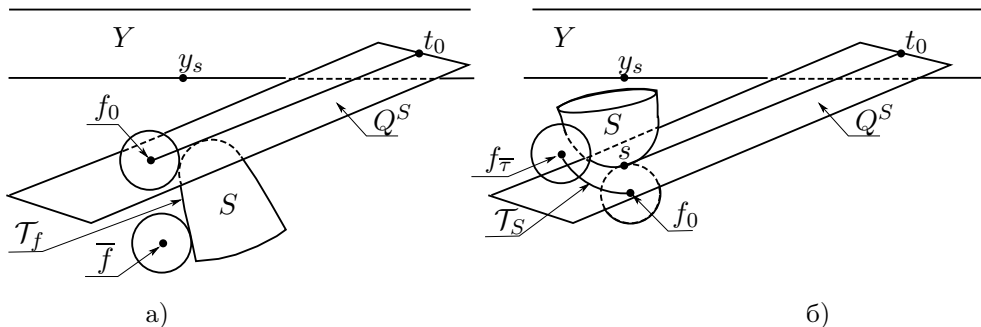


Рис. 1. На рисунке а) изображена поверхность S в позиции I, а на рисунке б) — в позиции II.

В обоих вариантах предполагается существование плоскости $Q = Q^S$, содержащей точку t_0 и опорной к фрагменту S во внутренней для S точке, обозначаемой далее через s , $s \in S \cap Q$. Пусть $y_s \in Y$ — ближайшая к s точка из Y . По условию выбора фрагмента S имеем $\|s - y_s\| < \|s - t_0\|$. Объект t движется по коридору Y от t_* через точку t_0 в сторону точки y_s и далее к конечной точке t^* .

Траекторию движения центра шара $V_\varepsilon(f_\tau)$ при переходе наблюдателя из положения $V(f_0)$ в положение $V_\varepsilon(\bar{f})$ обозначим через \mathcal{T}_f . Естественно предположить, что наблюдатель движется по \mathcal{T}_f от f_0 до \bar{f} с постоянной максимальной скоростью в укрытие и $\rho(f_\tau, S) = \varepsilon$ при $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$, где τ — временной параметр. Вначале рассмотрим случай, когда траектория \mathcal{T}_f лежит в плоскости Z , натянутой на точки t_0, s, \bar{f} .

Пусть $f_\tau \in \mathcal{T}_f$, $K_\tau = \text{co}(f_\tau, S)$, $B_\tau = S \cap \partial K_\tau$. Ради простоты рассуждений будем предполагать, что поверхность S является строго выпуклой, т.е. S не содержит прямолинейных отрезков. При этом условии множество B_τ является линией. Нам понадобится лишь часть поверхности S , расположенная между Q и параллельной плоскостью \bar{Q} , содержащей точку $f_{\bar{\tau}}$, и все построения будут производиться “выше” плоскости \bar{Q} . Определим коническую поверхность k_τ , образованную лучами $l_b = l_{b,\tau} = \{b + \lambda(b - f_\tau) : \lambda > 0\} \subset \partial K_\tau$:

$$k_\tau = \{l_b : b \in B_\tau\} \subset \partial K_\tau,$$

и множество

$$\mathcal{K}_\tau = \text{conv}(k_\tau \cup S),$$

являющееся темной зоной для наблюдателя.

Пусть τ', τ'' таковы, что $0 \leq \tau' < \tau'' \leq \bar{\tau}$. Линии $B_{\tau'}, B_{\tau''}$ могут иметь (рис. 2) две общие точки a, c (если “высота” фрагмента S достаточно велика). В этом случае предполагается, что точка b лежит на части линии $B_{\tau'}$ ($\tau = \tau', \tau''$), заключенной между точками a и c (см. рис. 2).

Лемма 1. Пусть $0 \leq \tau' < \tau'' < \bar{\tau}$, тогда $\mathcal{K}_{\tau'} \subset \mathcal{K}_{\tau''}$.

Доказательство. Линия $B_{\tau'}$ без концевых точек принадлежит множеству $\text{conv} k_{\tau''}$. Допустим, что нашелся луч $l_{b'}$ ($b' \in B_{\tau'}$), имеющий общую точку x' с $k_{\tau''}$, и пусть $x' \in l_{b''}$ ($b'' \in k_{\tau''}$). В точке b' существует опорная к S плоскость $P(b')$, которая содержит луч $l_{b'}$. Она пересекает луч $l_{b''}$ в некоторой точке x'' , $x'' \neq x'$, расположенной в окрестности точки b'' . Следовательно, $l_{b''} \subset P(b')$, что невозможно. Установлено, что $k_{\tau'} \subset \text{conv} k_{\tau''}$. \square

Далее рассматривается часть траектории объекта, соединяющей точки t_0 и \tilde{t} , $\tilde{t} \in k_{\bar{\tau}}$, содержащаяся в $K_{\bar{\tau}}$. Для нее сохраним обозначение \mathcal{T} .

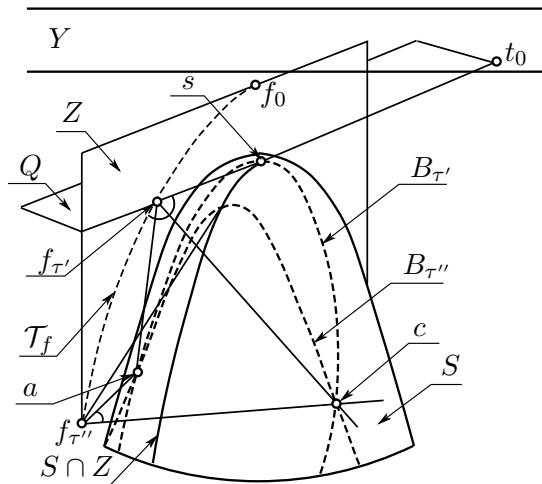


Рис. 2. На рисунке сплошными линиями изображены коридор Y , плоскости Q, Z , поверхность S , штриховыми линиями — кривые B_τ , жирной штриховой линией — траектория \mathcal{T}_f .

Имеет место

Лемма 2. *Отображения*

$$\tau \rightarrow K_\tau \cap V_{\mathcal{R}}(s), \quad \tau \rightarrow \mathcal{K}_\tau \cap V_{\mathcal{R}}(s), \quad \tau \rightarrow B_\tau$$

являются непрерывными по Хаусдорфу, где $\mathcal{R} = \|t_0 - f_0\|$.

Доказательство. Для заданных τ, τ' и отрезка $[f_\tau, x_\tau]$, пересекающегося с S , такого, что $\|s - x_\tau\| = \mathcal{R}$, возьмем $y \in [f_{\tau'}, x_{\tau'}] \cap S$. Тогда для отрезка $[f_{\tau'}, x_{\tau'}]$, содержащего точку y и удовлетворяющего условию $\|s - x_{\tau'}\| = \mathcal{R}$, будем иметь $\|x_\tau - x_{\tau'}\| \leq 2\mathcal{R}\|f_\tau - f_{\tau'}\|$. Тем самым установлено, что Хаусдорфово расстояние между $K_\tau \cap V_{\mathcal{R}}(s)$ и $K_{\tau'} \cap V_{\mathcal{R}}(s)$ не превосходит $(1 + 2\mathcal{R})\|f_\tau - f_{\tau'}\|$. Первое утверждение установлено. Из него следует непрерывность по Хаусдорфу отображения $\tau \rightarrow \mathcal{K}_\tau$. Для доказательства непрерывности отображения $\tau \rightarrow B_\tau$ рассмотрим сечение поверхности S плоскостью, параллельной плоскости Z . Полученная выпуклая кривая в двумерном пространстве является графиком выпуклой функции одного переменного, обозначим ее через $z(x)$, которая является собственной и замкнутой. Сопряженная к ней функция

$$z^*(x^*) = \sup_x \{ \langle x^*, x \rangle - S(x) \}$$

является выпуклой, собственной и замкнутой (см., например, Р. Рокафеллар [5, теорема 12.2]), где x^* — линейный функционал, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Выпуклость функции $z^*(x^*)$ влечет ее непрерывность. Функционал x^* задает опорную прямую к графику функции $z(x)$ в точке $x(x^*)$, реализующей указанную верхнюю грань, а непрерывность функции z^* в случае строгой выпуклости функции $z(x)$ влечет сходимости точки $x(x^*)$ при сходимости функционала x^* , обеспечивая непрерывность отображения $\tau \rightarrow B_\tau$. \square

З а м е ч а н и е 1. При отсутствии условия строгой выпуклости поверхности S множество B_τ может содержать прямолинейные участки конической поверхности, а отображение $\tau \rightarrow B_\tau$ будет полунепрерывным сверху.

2. Фрагмент и наблюдатель в позиции I

Приступим к вопросу о тактике поведения объекта и наблюдателя, когда выбран фрагмент S , находящийся в позиции I.

Для $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ возможны временные отрезки двух видов:

$$\Delta_{\mathcal{T}} = [\tau', \tau'']: k_\tau \cap \mathcal{T} \neq \emptyset \quad \forall \tau \in \Delta_{\mathcal{T}},$$

$$\Delta = [\tau', \tau'']: k_\tau \cap \mathcal{T} = \emptyset \quad \forall \tau \in \Delta.$$

Пусть $\Delta_{\mathcal{T}}$ и Δ — максимальные по включению отрезки с указанными свойствами. Приведем примеры.

1. Поскольку $V_\varepsilon(\bar{f}) \subset \text{co}(t_0, S)$, то коническая поверхность $\partial K_{\bar{f}}$ разбивает полупространство из X с границей \bar{Q} , содержащее поверхность S , на две части. Пусть X_S — часть, содержащая S и, значит, точку t_0 . Маршрут \mathcal{T} пересекает поверхность $\partial K_{\bar{f}}$. Ввиду непрерывности \mathcal{T} отображения $\tau \rightarrow \mathcal{K}_\tau$ и леммы 1 найдется момент τ ($\tau < \bar{\tau}$) такой, что $\mathcal{T} \cap k_\eta \neq \emptyset$ для любого η из отрезка $[\tau, \bar{\tau}]$. Пусть τ_* — наименьший τ с указанным свойством, тогда $[\tau_*, \bar{\tau}]$ — искомый отрезок вида $\Delta_{\mathcal{T}}$.

2. По построению $t_0 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{K}_0$. Аналогично предыдущему случаю, ввиду непрерывности отображения $\tau \rightarrow \mathcal{K}_\tau$ и леммы 1 маршрут \mathcal{T} пересекается с \mathcal{K}_τ для $\tau > 0$, близких к 0. Обозначим через τ^* наибольший τ с указанным свойством, тогда отрезок $[0, \tau^*]$ имеет вид $\Delta_{\mathcal{T}}$.

Опишем тактику движения объекта t от $\mathcal{T} \cap k_{\tau'}$ до $\mathcal{T} \cap k_{\tau''}$ на временном отрезке $\Delta_{\mathcal{T}} = [\tau', \tau'']$. Скорость движения объекта t определяется скоростью движения конической поверхности k_τ

при возрастании τ , которая в свою очередь зависит от скорости движения наблюдателя f по траектории \mathcal{T}_f . При увеличении τ поверхность k_τ движется от t_0 к точке y_s . Наблюдателю не видны точки из множества $Y \cap \mathcal{K}_\tau$, поэтому в момент времени τ объект t , скрываясь от f , должен находиться во множестве $\mathcal{T} \cap \mathcal{K}_\tau$, в частности, принадлежать k_τ .

Если для любого $\tau \in \Delta_{\mathcal{T}}$ множество $\mathcal{T} \cap k_\tau$ одноточечно, то движение объекта по маршруту \mathcal{T} задается равенством $t = t(\tau) = \mathcal{T} \cap k_\tau$, т.е. t движется на временном промежутке $\Delta_{\mathcal{T}}$, не обгоняя k_τ , будучи невидимым для f , и его скорость движения

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \lim_{\delta \tau \rightarrow 0} \frac{\|t(\tau + \delta \tau) - t(\tau)\|}{\delta \tau}, \quad t(\tau) = \mathcal{T} \cap k_\tau. \quad (2.1)$$

Если для некоторого отрезка $[\tau_1, \tau_2] \subset \Delta_{\mathcal{T}}$ множество $\mathcal{T} \cap k_\tau$ ($\tau \in [\tau_1, \tau_2]$) не является одноточечным, но одноточечно для $\tau_1 - \delta$, $\tau_2 + \delta$ при малых $\delta > 0$, то объект, двигаясь по части маршрута \mathcal{T} , заключенного между k_{τ_1} и k_{τ_2} , может лишь отстать от k_τ ($\tau \geq \tau_2$). В силу леммы 1 он остается невидимым для f . Таким образом, указан способ выбора скоростного режима $v(t)$ объекта t на временном интервале $\Delta_{\mathcal{T}}$. На отрезках вида Δ объект движется под наблюдением f_τ . Через \mathbb{T} обозначим множество траекторий $\mathcal{T} \subset Y$, соединяющих t_0 с поверхностью k_τ , а через $\overset{\circ}{Y}$ — внутренность коридора Y . Справедлива

Теорема 1. Пусть выпуклая поверхность $S \subset \partial G$ расположена в позиции I, $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, тогда существуют τ^*, τ^{**} ($0 < \tau^* \leq \tau^{**} < \bar{\tau}$) такие, что на участках траектории $[t_0, t(\tau^*)]$, $[t(\tau^{**}), t(\bar{\tau})]$ возможно скрытое от наблюдателя движение объекта, в частности, движение $t(\tau) = \mathcal{T} \cap k_\tau$ со скоростью $dt/d\tau$ (см. (2.1)). \square

Следствие. Пусть $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, $D_{\mathcal{T}} = \{[\tau'; \tau''] \subset [0, \bar{\tau}]\}$ — множество всех отрезков вида $\Delta_{\mathcal{T}}$ (см. рис. 3), включающее отрезки $[\tau_Q, \tau^*]$, $[\tau^{**}, \bar{\tau}]$. Возможно скрытое от наблюдателя на отрезках из $D_{\mathcal{T}}$ движение объекта, его скорость v_t на всей траектории \mathcal{T} удовлетворяет неравенству (см. (2.1))

$$v_t \geq \min \left\{ \frac{dt}{d\tau} : \tau \in \Delta_{\mathcal{T}} \in D \right\} > 0.$$

На оставшейся части отрезка $[0, \bar{\tau}]$ движение объекта происходит в условиях наблюдения.

Теорема 2. Если S — выпуклая поверхность в позиции I и $\overset{\circ}{Y} \cap k_\tau \neq \emptyset$ для всех $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, то скрытый от наблюдателя проход объекта t по маршруту $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ возможен тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T} \subset Y \cap \left(\bigcup_0^{\bar{\tau}} k_\tau \right). \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть выполняется условие (2.2). При движении наблюдателя f_τ по траектории \mathcal{T}_f конические поверхности k_τ непрерывно движутся от k_0 к $k_{\bar{\tau}}$ с соблюдением условия $\mathcal{K}_{\tau'} \subset \mathcal{K}_{\tau''}$ ($0 \leq \tau' < \tau'' \leq \bar{\tau}$) (см. леммы 1, 2), поэтому объект должен двигаться от t_0 к \tilde{t} , не обгоняя поверхность k_τ , оставаясь в темной для f зоне $\overset{\circ}{\mathcal{K}}_\tau$. Если объект t_τ движется по \mathcal{T} скрытно от наблюдателя f_τ , то $t_\tau \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_\tau$ для любого $\tau \in [0, \bar{\tau}]$. Следовательно, $\mathcal{T} \cap k_\tau \neq \emptyset$ и выполняется (2.2). \square

З а м е ч а н и е 2. Если пересечение $\mathcal{T} \cap k_\tau$ одноточечно для любого $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, то объект может двигаться по правилу $t(\tau) = \mathcal{T} \cap k_\tau$. На участке многозначности пересечения $\mathcal{T} \cap k_\tau$ скорость движения может быть максимальной.

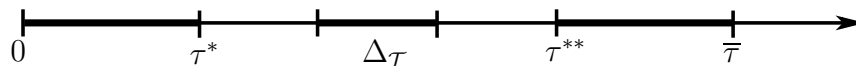


Рис. 3. На рисунке жирной линией отмечены отрезки скрытого движения объекта.

3. Случай позиции II

Теперь предположим, что поверхность S находится в позиции II. Начальная позиция f_0 наблюдателя такова, что плоскость Q касается шара $V_\varepsilon(f_0)$ в точке $s \in S$ и отделяет его от S . В момент старта объекта и, возможно, мини-объекта из точки t_0 наблюдатель стартует по траектории \mathcal{T}_f из начального положения f_0 , порождая однопараметрическое семейство “конусов” \mathcal{K}_τ такое, что $\mathcal{K}_{\tau'} \subset \mathcal{K}_{\tau''}$ при $\tau' < \tau''$. Если $k_\tau \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, а это имеет место, если поверхность k_τ перекрывает коридор Y , то точка $k_\tau \cap \mathcal{T}$ движется навстречу объекту t , и в некоторой точке $\tilde{t} \in \mathcal{T}$ встретится с ним. Если $k_\tau \cap \mathcal{T} = \emptyset$ при $\tau \in \Delta = [\tau', \tau'']$, то в промежуток времени Δ наблюдатель отслеживает движение объекта. Поскольку $S \cap Y = \emptyset$, то $t_0 \notin \mathcal{K}_0$, и вне конуса \mathcal{K}_0 располагается, по крайней мере, начальная часть траектории \mathcal{T} от точки t_0 . Но есть момент τ , а именно, $\tau = \bar{\tau}$, когда $\mathcal{K}_{\bar{\tau}}$ содержит всю траекторию \mathcal{T} . Найдем наименьшее $\tau = \tilde{\tau}$, для которого $\mathcal{K}_{\tilde{\tau}} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$. Точка $\tilde{t} = \mathcal{K}_{\tilde{\tau}} \cap \mathcal{T}$ — искомая. С момента $\tilde{\tau}$ наблюдатель может видеть только часть маршрута от \tilde{t} до t_0 , которую объект уже преодолел. Итак, имеет место

Теорема 3. Пусть S — выпуклая поверхность, расположенная в позиции II, тогда для любого маршрута \mathcal{T} найдется точка $\tilde{t} \in \mathcal{T}$ такая, что наблюдатель имеет возможность отслеживать движение объекта на участке траектории от t_0 до \tilde{t} , и только на нем, если $\mathcal{T} \cap k_\tau \neq \emptyset$ для любого $\tau \in [0, \tau_Q]$. На отрезке времени $\Delta = [\tau', \tau'']$ таком, что $k_\tau \cap \mathcal{T} = \emptyset$, наблюдатель отслеживает движение объекта. \square

4. Траектория наблюдателя

В данном разделе строится траектория наблюдателя, позволяющая видеть возможно большую часть траектории объекта f . Будем считать, что фрагмент S находится в позиции I.

Пусть S_ε — часть поверхности $\{x: \rho(x, S) = \varepsilon\}$, расположенная между плоскостями Q , \bar{Q} на невидимой из точки t_0 стороне. Определим на S_ε систему координат, для которой \bar{Q} — плоскость экватора, $Z_0 \stackrel{\text{def}}{=} Z$ — плоскость начального (нулевого) меридиана, ось — прямая, содержащая точку $s \in S$ и середину интервала $Z \cap \bar{Q} \cap (\text{conv } S)$. Координата λ точки $x = (\lambda, \varphi) \in S_\varepsilon$ определяется положением плоскости $Q_\lambda = (1 - \lambda)\bar{Q} + \lambda Q$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), а φ — углом между Z_0 и меридиональной плоскостью Z_φ , содержащей точку x (см. рис. 4).

Естественно считать, что $\mathcal{T}_f \subset S_\varepsilon$, и наблюдатель движется с постоянной максимальной скоростью v_f , а часть траектории объекта t от точки t_0 до поверхности $k_{\tilde{\tau}}$ расположена по другую сторону плоскости Q , нежели фрагмент S .

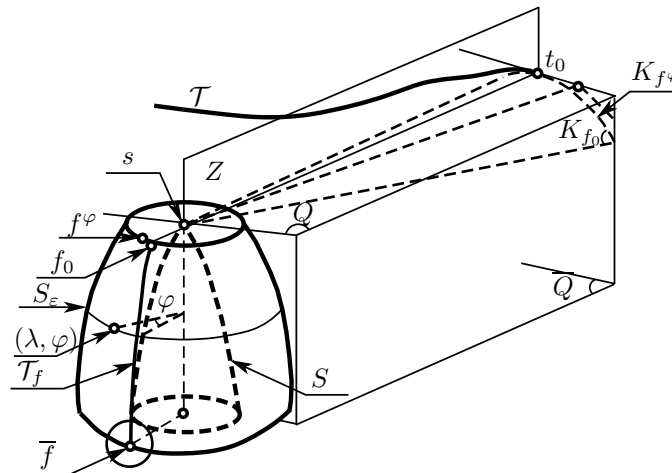


Рис. 4. На рисунке жирной линией изображены траектория \mathcal{T} и поверхность S_ε , жирной пунктирной линией — поверхность S , тонкой пунктирной линией — конусы K_{f_0} , K_{f_φ} .

В разд. 2 и 3 предполагается, что траектория \mathcal{T}_f наблюдателя лежит в плоскости Z , содержащей точки t_0 , s и \bar{f} , что является жестким ограничением для \mathcal{T}_f . При таком условии на траекторию \mathcal{T}_f начальный участок траектории объекта t от t_0 до $t(\tau^*)$ (см. теорему 1) не виден наблюдателю. От этого недостатка траектории \mathcal{T}_f можно избавиться (легче для строго выпуклого S), незначительно изменив ее начальную часть. В самом деле, если наблюдатель из начальной точки f_0 перейдет в позицию $f^\varphi = (1, \varphi)$ при малом φ , то весь полуинтервал $(s, t_0]$ и \mathcal{T} окажутся вне конуса K_{f^φ} и, значит, будет виден из точки f^φ .

Поскольку \bar{f} — ближайшая к f_0 точка из S_ε , удовлетворяющая включению (1.1), для любой траектории

$$\mathcal{T}_f = \{f_\tau : 0 \leq \tau \leq \bar{\tau}, f_{\bar{\tau}} = \bar{f}\} \subset S_\varepsilon, \quad (4.1)$$

где $\bar{\tau} = \bar{\tau}_f$ — время движения наблюдателя из f_0 в точку \bar{f} , то множество

$$W = \left[\bigcup_{0 \leq \tau < \bar{\tau}} V_\varepsilon(f_\tau) \right] \setminus \text{co}(t_0, S)$$

непусто. Время движения $\bar{\tau}_f$ наблюдателя на траектории \mathcal{T}_f должно удовлетворять неравенству

$$\bar{\tau}_f = \frac{|\mathcal{T}_f|}{v_f} \leq \tau_m = \frac{\rho(t_0, W)}{v_m}. \quad (4.2)$$

Здесь $|\mathcal{T}_f|$ — длина траектории \mathcal{T}_f , τ_m — время движения мини-объекта m от t_0 до множества W . Заметим, что в момент времени τ_m наблюдатель должен прибыть в точку \bar{f} , иначе он будет уничтожен мини-объектом.

Пусть \mathbb{T}_f — множество траекторий наблюдателя (4.1), удовлетворяющих условию (4.2). Для наблюдателя представляет интерес траектория $\mathcal{T}_f \in \mathbb{T}_f$, которая позволит ему наблюдать движение объекта на возможно большей части траектории \mathcal{T} объекта. Далее для части траектории объекта от точки t_0 до поверхности $k_{\bar{f}}$ будем сохранять обозначение \mathcal{T} . Пусть $\tilde{t} \in \mathcal{T} \cap k_{\bar{f}}$ — конечная точка этой части траектории.

Рассмотрим частный случай, когда S является выпуклым конусом с вершиной s (см. рис. 5). В этом случае конус $K_\tau = K_{f_\tau}$ ($0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$) является частью двугранного угла, ребро которого — луч $l(f_\tau)$ с началом f_τ , содержащий точку s , а его грани касаются боковой поверхности конуса S . На траекторию \mathcal{T} , $\mathcal{T} \subset K_{\bar{f}}$, $t_0 \in \mathcal{T}$ объекта наложим дополнительное условие (E). Для этого нам понадобится отображение траектории \mathcal{T} на поверхность S_ε :

$$z \rightarrow f(z) : s \in [z, f(z)] \quad (z \in \mathcal{T}, f(z) \in S_\varepsilon), \quad (4.3)$$

где s — вершина конуса S . В силу выпуклости поверхности S_ε отображение (4.3) однозначно и непрерывно. Упомянутое выше условие имеет вид

(E) для любой точки $z \in \mathcal{T} \setminus Z$ выполняется соотношение

$$K_{f(z)} \cap \mathcal{T} = l(f(z)) \cap \mathcal{T} = z.$$

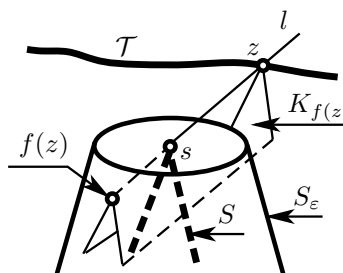


Рис. 5. На рисунке жирными линиями изображена траектория \mathcal{T} и поверхность S_ε , жирной пунктирной линией — конус S .

Это условие гарантирует взаимную однозначность и непрерывность отображения (4.3). Приведем более слабое условие

$$\overset{\circ}{K}_{f(z)} \cap \mathcal{T} = \emptyset. \quad (4.4)$$

Пусть

$$\mathcal{T}_f^* = \{f(z) : z \in \mathcal{T}\}, \quad f(t_0) = f_0, \quad \tilde{f} = f(\tilde{t}) \quad (4.5)$$

— образ траектории $\mathcal{T} \subset K_{\tilde{f}}$ с начальной точкой t_0 и конечной \tilde{t} . Класс E кривых \mathcal{T} , удовлетворяющих условию (E), достаточно широк. В частности, он содержит прямолинейные траектории, не содержащиеся в плоскости Z . Для траектории \mathcal{T} и $f = (\lambda, \varphi) \in S_\varepsilon$ таких, что $K_f \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, обозначим

$$\lambda_* = \lambda(\varphi) = \sup\{\lambda : K_f \cap \mathcal{T} \neq \emptyset\} = \inf\{\lambda : K \cap \mathcal{T} = \emptyset\}, \quad f_* = (\lambda(\varphi), \varphi). \quad (4.6)$$

При условии (E) имеем $K_{f_*} \cap \mathcal{T} = l(f_*) \cap \mathcal{T}$. Поскольку темной зоной для наблюдателя f_* является K_{f_*} , то вся траектория $\mathcal{T} \in E$ лежит в зоне его видимости.

Приведем способ построения траектории $\hat{\mathcal{T}}_f \in \mathbb{T}_f$ наблюдателя, которая позволяет ему наблюдать возможно бóльшую начальную часть траектории \mathcal{T} . Пусть $t \in \mathcal{T}$, $f = f(t) \in \mathcal{T}_f^*$. Определим верхнюю грань

$$\hat{\rho} = \sup_{t \in \mathcal{T}} \left\{ \rho(t_0, t) : f(t) \in \mathcal{T}_f^*, \frac{\rho(f_0, f) + d(f, \bar{f})}{v_f} \leq \tau_m \right\}, \quad (4.7)$$

где $\rho(t_0, t)$ — длина участка траектории \mathcal{T} от t_0 до t , $\rho(f_0, f)$ — длина участка траектории \mathcal{T}_f^* от f_0 до f , $d(f, \bar{f})$ — длина геодезической (кратчайшей) кривой на поверхности S_ε , соединяющей точки f и \bar{f} . Найдем точки $\hat{t} \in \mathcal{T}$ и $\hat{f} \in \mathcal{T}_f^*$, $\hat{f} = f_{\hat{t}} = f(\hat{t})$ (см. (4.3)), реализующие верхнюю грань (4.7).

Поскольку $\mathcal{T} \subset K_{\tilde{f}}$ (см. пример 1, разд. 2), то $\hat{f} \neq \bar{f}$. Траекторию $\hat{\mathcal{T}}_f \in \mathbb{T}_f$ составим из двух дуг

$$\hat{\mathcal{T}}_f = \mathcal{T}_f^1 \cup \mathcal{T}_f^2, \quad \mathcal{T}_f^1 = \mathcal{T}_f^*(f_0, \hat{f}), \quad \mathcal{T}_f^2 = \mathcal{T}_f(\hat{f}, \bar{f}); \quad (4.8)$$

первая является частью траектории \mathcal{T}_f^* (см. (4.5) и рис. 6), ограниченной точками f_0 и \hat{f} , вторая — кратчайшая кривая на поверхности S_ε , соединяющая точки \hat{f} и \bar{f} .

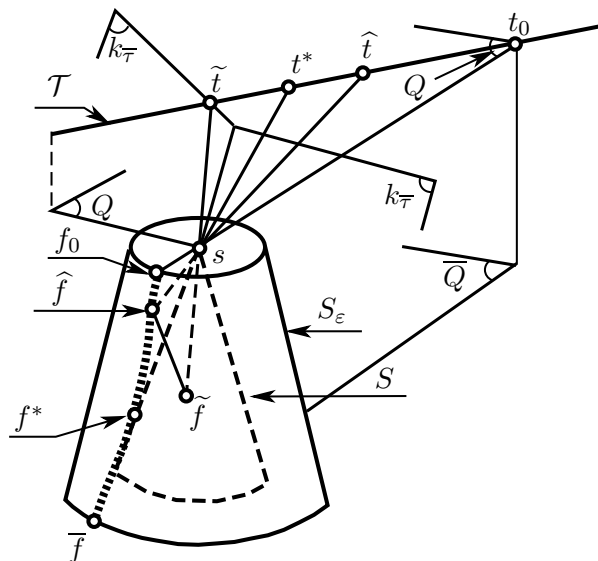


Рис. 6. На рисунке плоскости Q и \bar{Q} , поверхность S_ε и траектория \mathcal{T} изображены сплошными линиями, поверхность S — штриховой, траектория $\hat{\mathcal{T}}_f$ — пунктирной линией.

При движении наблюдателя f по траектории $\widehat{\mathcal{T}}_f$ перемещается множество \mathcal{K}_f — невидимая для f зона пространства. Поскольку $\mathcal{T}_f^1 \subset \mathcal{T}_f^*$, то, находясь в позиции $f \in \mathcal{T}_f^1$, наблюдатель ввиду условия (E) видит всю траекторию \mathcal{T} объекта. Отметим, что переход наблюдателя на дугу \mathcal{T}_f^2 и его движение в сторону точки \bar{f} связано с уменьшением его координаты λ и возникновением невидимого участка траектории \mathcal{T} . При стремлении f к \bar{f} множество $K_f \cap V_R(s)$ сходится к $K_{\bar{f}}(s) \cap V_R(s)$ в метрике Хаусдорфа (см. лемму 2). Поскольку $\mathcal{T} \subset \overset{\circ}{K}_{\bar{f}}$, то, начиная с некоторого $f^* = f_{\tau^*} \in \mathcal{T}_f^2$, для всех $f \in \mathcal{T}_f^2$ дуга траектории \mathcal{T} от t_0 до некоторой точки $t_f \in \mathcal{T}$ содержится в $\overset{\circ}{K}_f$ и $\rho(t_f, \partial K_{\bar{f}}) \rightarrow 0$ при $f \rightarrow \bar{f}$. Отсюда, в частности, следует, что часть траектории \mathcal{T} от $t^* = z(f^*)$ до \tilde{t} не удовлетворяет условию (E) и $\hat{f} \neq \bar{f}$.

В процессе поглощения траектории \mathcal{T} конусом K_f , $f = (\lambda, \varphi)$, луч $l(f)$ приближается к $l(\bar{f})$, $\lambda \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow 0$. Наблюдатель заинтересован в том, чтобы расстояние $d(\hat{f}, \bar{f})$ было малым, его величину определяет вид траектории \mathcal{T} и удаление фрагмента S от точки t_0 , т. е. величина τ_m .

Объект t , предполагая, что наблюдатель намерен двигаться по приведенной выше траектории $\widehat{\mathcal{T}}_f$ с постоянной максимальной скоростью, и стремясь сократить длину траектории, пройденной под наблюдением, будет придерживаться следующей тактики движения.

Возможны два варианта. Во временном промежутке $[0, \tau^*]$ объект движется с минимальной скоростью, преодолев расстояние $\underline{v} \cdot \tau^*$ под наблюдением. В момент τ^* участок траектории \mathcal{T} от t_0 до точки t_f попадает в невидимую наблюдателем зону, в которой объект продолжает свое движение, учитывая, что $t_f \rightarrow \tilde{t}$, преодолевает расстояние $|\mathcal{T}| - \underline{v} \cdot \tau^*$ вне зоны наблюдения. Второй вариант: объект движется вместе с точкой $z(f)$ на участке от t_0 до \hat{t} под наблюдением. Для позиции $f(t)$ при $t \in z(\mathcal{T}_f^2)$ выполняется соотношение $\overset{\circ}{K}_{f(t)} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, поэтому объект в дальнейшем движется, включившись в множество $\overset{\circ}{K}_{f(t)}$, и пройдет вне наблюдения участок длины $|\mathcal{T}| - \rho(\hat{t}, t_0)$.

Итак, установлены следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть S — выпуклая коническая поверхность, $\mathcal{T} \subset K_{\bar{f}}$ — часть траектории объекта, соединяющая точку t_0 с $\tilde{t} \in \mathcal{T} \cap k_{\bar{f}}$, \mathcal{T} удовлетворяет условию (E), $\hat{t} = t_{\hat{\tau}}$ доставляет верхнюю грань (4.7) и $\widehat{\mathcal{T}}_f \subset S_\varepsilon$ — траектория наблюдателя (см. (4.8)), тогда

- $\overset{\circ}{K}_{\hat{\tau}} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ для любого $\tau \in (\hat{\tau}, \bar{\tau})$;
- существует момент $\tau^* \in (\hat{\tau}, \bar{\tau})$ такой, что для любого $\tau \in (\tau^*, \bar{\tau})$ существует точка t_τ , удовлетворяющая условиям $t_\tau \rightarrow \tilde{t}$ ($\tau \rightarrow \bar{\tau}$), и отрезок кривой \mathcal{T} от t_0 до t_τ содержится в $\overset{\circ}{K}_{\bar{f}}$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия леммы 3, тогда

- для любого $\tau \in [0, \hat{\tau}]$ с позиции f_τ наблюдателю видна вся траектория \mathcal{T} ;
- существует скоростной режим движущегося объекта t по траектории \mathcal{T} , позволяющий пройти вне наблюдения концевой участок траектории \mathcal{T} длины $|\mathcal{T}| - \min\{\underline{v} \cdot \tau^*, \rho(\hat{t}, t_0)\}$, где \underline{v} — минимальная скорость объекта, $\tau^* \in (\hat{\tau}, \bar{\tau})$, $\rho(\hat{t}, t_0)$ — длина дуги траектории \mathcal{T} от точки t_0 до \hat{t} .

З а м е ч а н и е 3. Теорема останется верной, если условие (E) заменить условием (4.4).

В общем случае, когда S — выпуклая поверхность, найдем (4.6)

$$\lambda_* = \inf\{\eta: K_{(\eta, \varphi)} \cap \mathcal{T} = \emptyset\}, \quad f_* = f_*(\varphi) = (\lambda_*, \varphi)$$

и определим траекторию $\mathcal{T}_f^* = \{f_*(\varphi): (\lambda_*, \varphi) \in S_\varepsilon\}$. Находясь в любой позиции $f \in \mathcal{T}_f^*$, наблюдатель видит всю траекторию \mathcal{T} . Используя изложенный выше способ, построим траекторию $\widehat{\mathcal{T}}_f$ (см. (4.8)), движение по которой обеспечивает наблюдателю возможность наблюдения за объектом на максимальном по длине начальном участке \mathcal{T} .

Автор выражает благодарность В. Б. Костоусову за полезное обсуждение предмета исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Уклонение объекта с поражающим устройством от зоны видимости наблюдателя в \mathbb{R}^3 // Докл. АН. 2020. Т. 494. С. 93–96. doi: 10.31857/S268695432005029X.
2. **Бердышев В.И.** Задача безопасного слежения за объектом, уклоняющимся от наблюдения в \mathbb{R}^2 // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. С. 82–85. doi: 10.31857/S2686954320040049.
3. **Бердышев В.И., Костоусов В.Б.** Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург. Из-во УрО РАН, 2007. 270 с.
4. **Лю В.** Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58. doi: 10.24108/mathm.0118.0000098.
5. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

Поступила 5.03.2021

После доработки 2.04.2021

Принята к публикации 12.04.2021

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН, научный руководитель
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: bvi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Berdyshev V.I. Deviation of an object with a striking device from a visibility area of an observer in \mathbb{R}^3 . *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 102, no. 2, pp. 433–435. doi: 0.1134/S1064562420050270.
2. Berdyshev V.I. Problem of safely tracking an object avoiding observation in \mathbb{R}^2 . *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 102, no. 1, pp. 334–336. doi: 10.1134/S1064562420040043.
3. Berdyshev V.I., Kostousov V.B. *Ekstremal'nye zadachi i modeli navigacii po geofizicheskim polyam*. Yekaterinburg, Iz-vo UrO RAN, 2007, 270 p. (in Russian).
4. Lyu V. Metody planirovaniya puti v srede s prepyatstviyami (obzor). *Matematika i Mat. Modelirovanie*, 2018, vol. 1, pp. 15–58 (in Russian). doi: 10.24108/mathm.0118.0000098.
5. Rockafellar R.T. *Convex analysis*. Princeton, N J: Princeton University Press, 1970, 472 p.

Received March 5, 2021

Revised April 2, 2021

Accepted April 12, 2021

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2021-1383).

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: bvi@imm.uran.ru.

Cite this article as: V. I. Berdyshev. An object with a destructive device and an unfriendly observer in three-dimensional space, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 49–58.