ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

МАТРИЧНЫЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ О МНОГОКРАТНОЙ ПОИМКЕ[1]

Н. Н. Петров

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих, описываемая системой вида

$$\dot z_{ij} = A_{ij}z_{ij} + u_i - v_j,\quad u_i \in U_i,\quad v_j \in V_j.$$

Целью группы преследователей является поимка не менее q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем m различных преследователей, при этом моменты поимки могут не совпадать. Терминальные множества — начало координат. В качестве математической основы используются матричные разрешающие функции, являющиеся обобщением скалярных разрешающих функций. Получены достаточные условия многократной поимки одного убегающего в классе квазистратегий. В предположении, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, в терминах начальных позиций получены достаточные условия разрешимости задачи о многократной поимке заданного числа убегающих. Для доказательства основного результата используется теорема Холла о системе различных представителей. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, групповое преследование.

N. N. Petrov. Matrix resolving functions in a linear problem of group pursuit with multiple capture.

A problem of pursuit of one or several evaders by a group of pursuers is considered in a finite-dimensional Euclidean space. The problem is described by the system

$$\dot z_{ij} = A_{ij}z_{ij} + u_i - v_j,\quad u_i \in U_i,\quad v_j \in V_j.$$

The aim of the group of pursuers is to capture at least q evaders, where each evader must be captured by at least m different pursuers; the capture moments may be different. The terminal sets are the origin. Matrix resolving functions, which generalize scalar resolving functions, are used as a mathematical basis. Sufficient conditions for the multiple capture of one evader in the class of quasi-strategies are obtained. Under the assumption that the evaders use program strategies and each pursuer captures at most one evader, sufficient conditions for the solvability of the problem on the multiple capture of a given number of evaders are obtained in terms of the initial positions. Hall's theorem on a system of distinct representatives is used to prove the main theorem. Examples are given to illustrate the obtained results.

Keywords: differential game, pursuer, evader, group pursuit.

MSC: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-185-196

Введение

Дифференциальные игры двух лиц, рассмотренные первоначально Айзексом [1], в настоящее время представляют глубокую содержательную теорию, в которой развиваются различные подходы к анализу конфликтных ситуаций.

В школе Н. Н. Красовского [2–5] развивается концепция позиционных игр, в основе которой лежат понятие стабильного моста и правило экстремального прицеливания на него.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект FEWS -2020-0010 и РФФИ (проект 20-01-00293).

В работах Л. С. Понтрягина [6] разработана аналитическая схема нахождения решения линейных дифференциальных игр на основе альтернированного интегрирования выпуклых множеств, которая обеспечивает достаточные условия завершения игры за конечное время из заданных начальных позиций.

В работах А. А. Чикрия [7; 8] был предложен метод скалярных разрешающих функций, использующий условие Понтрягина и на его основе — теоремы измеримого выбора.

Метод скалярных разрешающих функций получил свое дальнейшее развитие для исследования линейных и квазилинейных задач группового преследования [9–17]. А. А. Чикрий в своем исследовании [18] отмечает, что скалярные разрешающие функции осуществляют притяжение терминального множества с образами некоторых многозначных отображений, которое происходит в конусе, натянутом на данное множество, что ограничивает возможности для маневра преследователям.

В [18; 19] для анализа игр преследования двух лиц были предложены матричные разрешающие функции. В данной статье на основе методики работ [18; 19] рассматриваются матричные разрешающие функции в линейной задаче группового преследования. Получены достаточные условия поимки.

1. Постановка задачи о поимке одного убегающего

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E, описываемая системой вида

$$\dot{z}_i = A_i z_i + u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V. \tag{1.1}$$

Здесь $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $z_i, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — компакты $\mathbb{R}^k$, A_i — постоянные квадратные матрицы порядка $k \times k$. Считаем, что $z_i^0 \neq 0$ для всех $i \in I$. Обозначим $z^0 = \{z_i^0, i \in I\}$ — вектор начальных позиций.

Измеримую функцию $v : [0, \infty) \to V$ будем называть допустимой. Предысторией функции v в момент t будем называть сужение функции v на $[0, t]$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение U_i^0, ставящее в соответствие начальным позициям z^0, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в U_i.

О п р е д е л е н и е 2. В игре $\Gamma(n)$ происходит m-кратная поимка (при $m = 1$ поимка), если существуют момент $T > 0$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T]$, существуют моменты $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [0, T]$, попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_m \in I$, для которых $z_{i_l}(\tau_l) = 0$ для всех $l = 1, \ldots, m$.

Предположение 1. *Для всех $i \in I$ верно* $0 \in \bigcap\limits_{v \in V} \big(U_i - v\big)$.

Рассмотрим произвольную диагональную квадратную матрицу L_i порядка $k \times k$ вида

$$L_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{ik} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{ik}).$$

Будем отождествлять матрицу L_i с вектором $(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ik})$. Неравенство $L_i \geqslant 0$ будем понимать покоординатно. Введем многозначные отображения

$$\mathcal{M}_i(\tau, v) = \big\{L_i \colon L_i \geqslant 0, -L_i z_i^0 \in e^{-A_i \tau}\big(U_i - v\big)\big\}.$$

В силу предположения 1 для всех $i \in I$, $v \in V$, $\tau \geqslant 0$ множества $\mathcal{M}_i(\tau, v)$ не пусты, $0 \in \mathcal{M}_i(\tau, v)$. Определим далее функции $\lambda_i^0(\tau, v)$ вида

$$\lambda_i^0(\tau, v) = \sup_{L_i \in \mathcal{M}_i(\tau, v)} \min_j \lambda_{ij}(\tau, v). \tag{1.2}$$

В предположении, что в (1.2) точная верхняя грань достигается, определим множества

$$\mathcal{M}_i^*(\tau, v) = \left\{ L_i(\tau, v) \in \mathcal{M}_i(\tau, v) \colon \lambda_i^0(\tau, v) = \min_j \lambda_{ij}(\tau, v) \right\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Если все координаты вектора z_i^0 отличны от нуля, то множество $\mathcal{M}_i(\tau, v)$ является компактом, и поэтому точная верхняя грань в (1.2) достигается.

Из [20] следует, что при сделанных предположениях множества $\mathcal{M}_i(\tau, v)$, $\mathcal{M}_i^*(\tau, v)$ являются измеримыми по (τ, v). Селекторы отображения $\mathcal{M}_i^*(\tau, v)$ будем называть экстремальными. Среди них по теореме измеримого выбора [21] найдется хотя бы один селектор, измеримый по (τ, v). Возьмем произвольный измеримый по (τ, v) экстремальный селектор, зафиксируем его и обозначим $L_i^*(\tau, v) = \operatorname{diag}(\lambda_{i1}^*(\tau, v), \ldots, \lambda_{ik}^*(\tau, v))$, $\lambda_i^*(\tau, v) = \min_j \lambda_{ij}^*(\tau, v)$.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega(l) = \{(i_1, \ldots, i_l) \colon i_1, \ldots, i_l \in I \text{ и попарно различны}\},$$
$$\delta(\tau) = \inf_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{l \in \Lambda} \lambda_l^*(\tau, v), \;\; J = \{1, \ldots, k\}.$$

З а м е ч а н и е 2. Если $m = 1$, то

$$\delta(\tau) = \inf_{v \in V} \max_{l \in I} \lambda_l^*(\tau, v) = \inf_{v \in V} \max_{l \in I} \min_{j \in J} \lambda_{lj}^*(\tau, v).$$

2. Достаточные условия поимки одного убегающего

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение* 1, $\int_0^{+\infty} \delta(s)ds = +\infty$. *Тогда существует момент* $T > 0$ *такой, что для каждой измеримой функции* $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T]$, *найдется множество* $\Lambda \in \Omega(m)$ *такое, что для всех* $l \in \Lambda$, $j \in J$ *справедливы неравенства*

$$\int_0^T \lambda_{lj}^*(s, v(s))ds \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Тогда для всех $s \geqslant 0$, $l \in I$, $j \in J$ выполняются неравенства

$$\lambda_{lj}^*(s, v(s)) \geqslant \lambda_l^*(s, v(s)).$$

Поэтому для всех $t \geqslant 0$, $l \in I$, $j \in J$ справедливы неравенства

$$1 - \int_0^t \lambda_{lj}^*(s, v(s))ds \leqslant 1 - \int_0^t \lambda_l^*(s, v(s))ds. \tag{2.1}$$

Кроме того,

$$\max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{l \in \Lambda} \int_0^t \lambda_l^*(s, v(s))ds \geqslant \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \int_0^t \min_{l \in \Lambda} \lambda_l^*(s, v(s))ds. \tag{2.2}$$

Так как для любых неотрицательных чисел $a_\Lambda(\Lambda \in \Omega(m))$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)} a_\Lambda \geqslant \frac{1}{C_n^m}\sum_{\Lambda\in\Omega(m)} a_\Lambda, \quad \text{где} \quad C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

то из (2.2) получаем

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{l\in\Lambda}\int\limits_0^t \lambda_l^*(s,v(s))ds \geqslant \frac{1}{C_n^m}\int\limits_0^t \sum_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{l\in\Lambda}\lambda_l^*(s,v(s))ds$$

$$\geqslant \frac{1}{C_n^m}\int\limits_0^t \max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{l\in\Lambda}\lambda_l^*(s,v(s))ds \geqslant \frac{1}{C_n^m}\int\limits_0^t \delta(s)ds.$$

Так как $\int_0^t \delta(s)ds = +\infty$, то существует $T > 0$ такой, что $\dfrac{1}{C_n^m}\int_0^T \delta(s)ds \geqslant 1$. Следовательно,

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{l\in\Lambda}\int\limits_0^T \lambda_l^*(s,v(s))ds \geqslant 1.$$

Поэтому найдется $\Lambda \in \Omega(m)$ такое, что для всех $l \in \Lambda$ имеем

$$\int\limits_0^T \lambda_l^*(s,v(s))ds \geqslant 1.$$

Из последнего неравенства и соотношения (2.1) выводим утверждение леммы.

Лемма доказана.

Определим число

$$\hat{T} = \inf\left\{t \geqslant 0\colon \inf_{v(\cdot)}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{l\in\Lambda}\min_{j\in J}\int\limits_0^t \lambda_{lj}^*(s,v(s))ds \geqslant 1\right\}.$$

Рассмотрим множества $(i \in I, j \in J)$

$$T_{ij}(v(\cdot)) = \left\{t \geqslant 0\colon \int\limits_0^t \lambda_{ij}^*(s,v(s))ds \geqslant 1\right\},$$

$$t_{ij}^*(v(\cdot)) = \begin{cases}\inf\{t\colon t \in T_{ij}(v(\cdot))\}, & \text{если } T_{ij}(v(\cdot)) \neq \varnothing,\\ +\infty, & \text{если } T_{ij}(v(\cdot)) = \varnothing.\end{cases}$$

Предположение 2. *Для любых $\tau \in [0,\hat{T}]$, $v \in V$, $l \in I$, $J_0 \subset J$ селекторы $B_l(\tau,v) = \operatorname{diag}\big(\beta_{l1}(\tau,v),\ldots,\beta_{lk}(\tau,v)\big)$ вида*

$$\beta_{lj}(\tau,v) = \begin{cases}\lambda_{lj}^*(\tau,v), & j \in J_0,\\ 0, & j \notin J_0\end{cases}$$

удовлетворяют условию $B_l(\tau,v) \in \mathcal{M}_l(\tau,v)$.

З а м е ч а н и е 3. При выполнении предположения 1 предположение 2 будет выполнено, в частности, если для всех i множества U_i имеют вид $U_i = [a_{i1},b_{i1}] \times [a_{i2},b_{i2}] \times \ldots \times [a_{ik},b_{ik}]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2, $\int_0^{+\infty} \delta(s)ds = +\infty$. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует, что $\hat{T} < +\infty$. Пусть $v\colon [0,\hat{T}] \to V$ — произвольная допустимая функция. Введем функции $\beta^*_{i1}(\tau,v),\ldots,\beta^*_{lk}(\tau,v)$ вида

$$\beta^*_{ij}(t,v) = \begin{cases} \lambda^*_{ij}(t,v), & \text{если } t \in [0, t^*_{ij}(v(\cdot)), \\ 0, & \text{если } t \in (t^*_{ij}(v(\cdot),\hat{T}], \end{cases}$$

и матрицу

$$B^*_i(t,v) = \begin{pmatrix} \beta^*_{i1}(t,v) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta^*_{i2}(t,v) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta^*_{ik}(t,v) \end{pmatrix}.$$

В силу предположения 2 $B^*_i(t,v)$ является измеримым селектором $\mathcal{M}_i(t,v)$. Рассмотрим многозначные отображения

$$U_i(\tau,v) = \bigl\{u_i \in U_i \colon e^{-A_i\tau}(u_i - v(\tau)) = -B^*_i(\tau,v)z^0_i\bigr\}.$$

$U_i(\tau,v) \neq \varnothing$ для всех $i \in I$, $\tau \in [0,\hat{T}]$, $v \in V$, и, следовательно, по теореме измеримого выбора [21] у $U_i(\tau,v)$ существует хотя бы один измеримый селектор $u^*_i(\tau,v)$. Задаем управления преследователей $P_i, i \in I$, полагая $u_i(\tau) = u^*_i(\tau, v(\tau)), i \in I$. Покажем, что данные управления преследователей гарантируют m-кратную поимку убегающего. Решение задачи Коши системы (1.1) имеет вид

$$z_i(t) = e^{A_i t}\biggl(z^0_i + \int\limits_0^t e^{-A_i s}(u_i(s) - v(s))ds\biggr).$$

В силу выбора управлений преследователей $P_i, i \in I$, получаем

$$z_i(t) = e^{A_i t}\biggl(E - \int\limits_0^t B^*_i(s, v(s))ds\biggr)z^0_i.$$

Из определения $B^*_i(\tau,v)$, леммы 1 следует, что существует множество $\Lambda \in \Omega(m)$ такое, что $z_l(\hat{T}) = 0$ для всех $l \in \Lambda$.

Теорема доказана.

Предположение 3. *Матрицы* A_i *являются диагональными матрицами вида*

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{i2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{ik} \end{pmatrix}, \text{ причем } a_{ij} \leqslant 0 \text{ для всех } i \in I,\ j \in J.$$

Введем многозначные отображения

$$\mathcal{M}^0_i(v) = \bigl\{L_i \colon L_i \geqslant 0, -L_i z^0_i \in \bigl(U_i - v\bigr)\bigr\}.$$

В силу предположения 1 для всех $i \in I$, $v \in V$ множества $\mathcal{M}^0_i(v)$ не пусты, $0 \in \mathcal{M}^0_i(v)$. Определим далее функции $\overline{\lambda}_i(v)$ вида

$$\overline{\lambda}_i(v) = \sup_{L_i \in \mathcal{M}^0_i(v)} \min_j \lambda_{ij}(v). \tag{2.3}$$

В предположении, что в (2.3) точная верхняя грань достигается, определим множества

$$\overline{\mathcal{M}}_i(v) = \{L_i(v) \in \mathcal{M}_i^0(v) \colon \overline{\lambda}_i(v) = \min_j \lambda_{ij}(v)\}.$$

Пусть далее $\overline{\lambda_i^*}(v)$ — измеримый селектор $\overline{\mathcal{M}}_i(v)$,

$$\delta_0 = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{l \in \Lambda} \overline{\lambda_l^*}(v).$$

З а м е ч а н и е 4. Если $m = 1$, то

$$\delta_0 = \inf_{v \in V} \max_{l \in I} \overline{\lambda_l^*}(v) = \inf_{v \in V} \max_{l \in I} \min_{j \in J} \overline{\lambda_{lj}^*}(v).$$

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения 1, 3, $\delta_0 > 0$. Тогда существует момент $T > 0$ такой, что для каждой допустимой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T]$, найдется множество $\Lambda \in \Omega(m)$ такое, что для всех $l \in \Lambda$, $j \in J$ справедливы неравенства*

$$\int_0^T e^{-a_{lj}s} \overline{\lambda_{lj}^*}(v(s))ds \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a = \max_{i \in I, j \in J} a_{ij}$. Тогда $a \leqslant 0$, и для всех $t \geqslant 0$, $l \in I$, $j \in J$ справедливы неравенства

$$\int_0^t e^{-a_{ij}s} \overline{\lambda_{lj}^*}(v(s))ds \geqslant \int_0^t e^{-as} \overline{\lambda_{lj}^*}(v(s))ds \geqslant \int_0^t e^{-as} \overline{\lambda_l^*}(v(s))ds.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям при доказательстве леммы 1.

Лемма доказана.

Предположение 4. *Селекторы $B_l(v) = \mathrm{diag}(\beta_{l1}(v), \ldots, \beta_{lk}(v))$ вида*

$$\beta_{lj}(v) = \begin{cases} \lambda_{lj}^*(v), & j \in J_0, \\ 0, & j \notin J_0 \end{cases}$$

удовлетворяют условию $B_l(v) \in \mathcal{M}_l^0(v)$ для любых $v \in V$, $l \in I$, $J_0 \subset J$.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что предположение 4 выполнено не всегда. Пусть в системе (1.1) $k = 2$, $n = 1$, $m = 1$, $z_1^0 = (1, 2)$, A_1 — нулевая матрица и

$$U_1 = V = \{(u_1, u_2) \colon u_1 = u_2, u_2 \in [-1, 1]\}.$$

Возьмем $v = 0$. Тогда

$$\mathcal{M}_1^0(0) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda/2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

Поэтому $\sup_{L \in \mathcal{M}_1^0(0)} \min_j \lambda_{1j} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$\overline{\mathcal{M}}_1(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

и $\lambda_1^*(0) = \mathrm{diag}\Big(1, \dfrac{1}{2}\Big)$ — экстремальный селектор. Однако селектор $B_1(0) = \mathrm{diag}(1, 0) \notin \mathcal{M}_1^0(0)$. Аналогично, селектор $B_2(0) = \mathrm{diag}\Big(0, \dfrac{1}{2}\Big) \notin \mathcal{M}_1^0(0)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1, 3, 4, $\delta_0 > 0$. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы может быть проведено по схеме, приведенной при доказательстве теоремы 1 с использованием леммы 2.

П р и м е р 1. Пусть в системе (1.1) $k = 2$, $n = 1$, $m = 1$, $V = \{0\}$, $z_1^0 = (1, 2)$, A_1 — нулевая матрица и

$$U_1 = \{(u_1, u_2) : u_1 = 0, u_2 \in [-1, 1]\} \cup \{(u_1, u_2) : u_2 = 0, u_1 \in [-1, 1]\} \\ \cup \{(u_1, u_2) : u_1 = u_2 \in [-1, 1]\}.$$

Тогда

$$\mathcal{M}_1^0(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in [0, 1/2] \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in [0, 1] \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda/2 \end{pmatrix}, \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

Отсюда $\sup\limits_{L \in \mathcal{M}_1^0(0)} \min\limits_j \lambda_{1j} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$\overline{\mathcal{M}}_1(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

и экстремальный селектор $\lambda_1^*(0) = \operatorname{diag}\Bigl(1, \dfrac{1}{2}\Bigr)$. Управление преследователя P_1 на первом шаге имеет вид $u_1(t) = 0 - L_1 z_1^0 = (-1, -1)$. Тогда $z_1(t) = (1 - t, 2 - t)$. В момент $t = 1$ получаем $z_1(1) = (0, 1)$. На отрезке $[1, 2]$ разрешающая функция имеет вид $L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Отметим, что $L_1 \in \mathcal{M}_1^0(0)$. Управление преследователя P_1 на отрезке $[1, 2]$ полагаем равным $u_1(t) = (0, -1)$. В момент $T = 2$ получим $z_1(2) = 0$. Отметим, что использование скалярных разрешающих функций, т.е. функций вида $L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ не позволяет получить поимку, так как в этом случае условие $-Lz_0 \in U_1 - v$ выполнено только для нулевой матрицы L.

П р и м е р 2. Пусть $k = 2$, $n = 3$, $m = 1$, $U_i = V = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $z_1^0 = (1, 1)$, $z_2^0 = (-1, 1)$, $z_3^0 = (0, -1)$, матрицы A_i имеют вид $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Тогда

$$\mathcal{M}_1^0(v) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ \lambda_1 \in [0, 1 + v_1], \lambda_2 \in [0, 1 + v_2] \right\},$$

$$\mathcal{M}_2^0(v) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ \lambda_1 \in [0, 1 - v_1], \lambda_2 \in [0, 1 + v_2] \right\},$$

$$\mathcal{M}_3^0(v) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \in [0, 1 - v_2] \right\}.$$

Поэтому

$$\overline{\lambda_1^*}(v) = \min\{1 + v_1, 1 + v_2\}, \quad \overline{\lambda_2^*}(v) = \min\{1 - v_1, 1 + v_2\}, \\ \overline{\lambda_3^*}(v) = 1 - v_2, \quad \delta_0 = \min_v \max_l \overline{\lambda_l^*}(v) > 0.$$

Пусть убегающий E использует постоянное управление $v_0 = (1, 1)$. Фиксируем $\lambda_1 \geqslant 0$. Тогда на первом шаге преследователи $P_i, i \in I$, выбирают свои управления u_i так, чтобы выполнялись равенства

$$u_i - v = -\overline{L_i^*}(v_0) z_i^0, \text{ где}$$

$$\overline{L_1^*}(v_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{L_2^*}(v_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{L_3^*}(v_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$z_1(t) = \big(1-2t, 3e^{-t}-2\big), \quad z_2(t) = \big(-1, 2e^{-2t}-1\big), \quad z_3(t) = \big(0, -3e^{-3t}\big).$$

В момент $T_1 = \ln\sqrt{2}$ имеем $z_{22}(T_1) = 0$. На втором шаге (начиная с момента T_1) преследователи $P_i, i \in I$, выбирают свои управления так, чтобы выполнялись равенства

$$u_i - v = -\overline{L_i^*}(v_0)z_i^0, \text{ где}$$

$$\overline{L_1^*}(v_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{L_2^*}(v_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{L_3^*}(v_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$z_1(t) = \big(1-2t, 3e^{-t}-2\big), \quad z_2(t) = \big(-1, 0\big), \quad z_3(t) = \big(0, -3e^{-3t}\big).$$

В момент $T_2 = \ln\dfrac{3}{2}$ имеем $z_{12}(T_2) = 0$. На третьем шаге (начиная с момента T_2) преследователи $P_i, i \in I$, выбирают свои управления так, чтобы были справедливы равенства

$$u_i - v = -\overline{L_i^*}(v_0)z_i^0, \text{ где}$$

$$\overline{L_1^*}(v_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{L_2^*}(v_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{L_3^*}(v_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выводим

$$z_1(t) = \big(1-2t, 0\big), \quad z_2(t) = \big(-1, 0\big), \quad z_3(t) = \big(0, -3e^{-3t}\big).$$

В момент $T_3 = \dfrac{1}{2}$ имеем $z_{11}(T_3) = 0$. Следовательно, в момент T_3 происходит поимка убегающего E. Отметим, что использование в данном примере скалярных разрешающих функций не позволяет получить поимку.

Приведем теперь условия на параметры игры, при которых поимка гарантирована при использовании скалярных разрешающих функций.

Предположение 5. *В системе* (1.1) *матрицы* A_i *имеют вид* $A_i = a_iE, a_i \leqslant 0, i \in I$, E *— единичная матрица и*

$$\delta_0 = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{l \in \Lambda} \mu_l(v) > 0,$$

где $\mu_l(v) = \sup\{\mu \geqslant 0\colon\ -\mu z_l^0 \in U_l - v\}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* 1, 5. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Доказательство данной теоремы может быть проведено по схеме, приведенной при доказательстве теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть в системе* (1.1) *матрицы* A_i *имеют вид* $A_i = a_iE, a_i \leqslant 0, i \in I$, E *— единичная матрица,* $U_i = V$ *для всех* $i \in I$, V *— строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega(n-m+1)} \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_l^0, l \in \Lambda\}, \tag{2.4}$$

где $\operatorname{Int} A, \operatorname{co} A$ *обозначают соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества* A. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Действительно, в этом случае из условия (2.4) следует, что $\delta_0 > 0$ [14].

3. Задача о поимке заданного числа убегающих

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n,p)$ $n+p$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и p убегающих $E_1, \ldots, E_p$, описываемая системой вида

$$\dot{z}_{is} = Az_{is} + u_i - v_s, \quad z_{is}(0) = z^0_{is}, \quad u_i \in U_i, \quad v_s \in V_s.$$

Здесь $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $s \in I_1 = \{1, \ldots, p\}$, $z_{is}, u_i, v_s \in \mathbb{R}^k$, U_i, V_s — компакты $\mathbb{R}^k$, A — постоянная квадратная матрица порядка $k \times k$. Считаем, что $z^0_{is} \neq 0$ для всех $i \in I, s \in I_1$. Обозначим $z^0 = \{z^0_{is}, i \in I, s \in I_1\}$ — вектор начальных позиций.

Цель группы преследователей — осуществить поимку не менее чем q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем m преследователей $(m \geqslant 1, 1 \leqslant q \leqslant p)$ при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи на основе информации о выборе убегающих выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant mq, p \geqslant q$.

Измеримая функция $v_s(s \in I_1) : [0, \infty) \to V_s$ называется допустимой.

О п р е д е л е н и е 3. В игре $\Gamma(n,p)$ *происходит m-кратная поимка* (*при $m = 1$ поимка*) *не менее q убегающих,* если существует $T > t_0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_s(t)$, $t \in [0, \infty)$, $s \in I_1$, убегающих найдутся допустимые управления преследователей $u_i(t) = u_i(t, z^0_{is}, v_s(t), t \in [0, \infty), s \in I_1)$, $i \in I$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset I_1,\ |M| = q,\ \{N_\alpha, \alpha \in M\},\ N_\alpha \subset I,\ |N_\alpha| = m \text{ для всех } \alpha \in M,$$
$$N_\alpha \cap N_\beta = \varnothing \text{ для всех } \alpha \neq \beta,$$

такие, что группа преследователей $\{P_\alpha, \alpha \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет m-кратную поимку убегающего E_β, причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Предположение 6. *Для всех $i \in I, s \in I_1$ верно* $0 \in \bigcap\limits_{v \in V_s} \big(U_i - v\big)$.

Предположение 7. A — *диагональная матрица вида*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_k \end{pmatrix}, \ \textit{причем} \ \ a_j \leqslant 0 \ \ \textit{для} \ \ \textit{всех}\ j = 1, \ldots, k.$$

Введем многозначные отображения

$$\mathcal{M}^s_i(v) = \big\{L^s_i \colon L^s_i \geqslant 0, -L^s_i z^0_{is} \in \big(U_i - v\big)\big\} \ (v \in V_s),\ L^s_i = \mathrm{diag}(\lambda^s_{i1}, \ldots, \lambda^s_{ik}).$$

В силу предположения 4 для всех $i \in I$, $s \in I_1$, $v \in V_s$ множества $\mathcal{M}^s_i(v)$ не пусты, $0 \in \mathcal{M}^s_i(v)$. Определим далее функции $\overline{\lambda}_i(v)$ вида

$$\overline{\lambda}^s_i(v) = \sup_{L^s_i \in \mathcal{M}^s_i(v)} \min_j \lambda^s_{ij}(v). \tag{3.1}$$

В предположении, что в (3.1) точная верхняя грань достигается, определим множества

$$\overline{\mathcal{M}}^s_i(v) = \big\{L^s_i(v) \in \mathcal{M}^s_i(v) \colon \overline{\lambda}^s_i(v) = \min_j \lambda^s_{ij}(v)\big\}.$$

Пусть далее $\tilde{\lambda}_i^s(v)$ — измеримый селектор $\overline{\mathcal{M}}_i^s(v)$. Обозначим

$$\Omega_l(K) = \{(i_1, \ldots, i_l)\colon i_1, \ldots, i_l \in K \text{ и попарно различны}\},$$

где K — конечное подмножество множества натуральных чисел, и определим

$$\delta_N(s) = \min_{v \in V_s} \max_{\Lambda \in \Omega_m(N)} \min_{l \in \Lambda} \tilde{\lambda}_l^s(v).$$

Предположение 8. *Для любых $s \in I_1$, $v \in V_s$, $l \in I$, $J_0 \subset J$ селекторы $B_l^s(v) = \mathrm{diag}(\beta_{l1}^s(v), \ldots, \beta_{lk}^s(v))$ вида*

$$\beta_{lj}(v) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_{lj}^s(v), & j \in J_0, \\ 0, & j \notin J_0 \end{cases}$$

удовлетворяют условию $B_l^s(v) \in \mathcal{M}_l^s(v)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения 6, 7, 8, и для каждого $r \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - rm$ найдется множество $M \subset I_1$, $|M| = m - r$ такое, что $\delta_N(s) > 0$ для всех $s \in M$. Тогда в игре $\Gamma(n, p)$ происходит m-кратная поимка не менее q убегающих.*

Доказательство данной теоремы может быть проведено по схеме, приведенной при доказательстве теоремы 4.1 [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Isaacs R.** Differential games. N Y: John Wiley & Sons, 1965. 480 c.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems fot ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Cordon & Breach, 1995. 625 p.
6. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 576 с.
7. **Чикрий А.А.** Конфликтно управлямые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
8. **Chikrii A.A.** Quasilinear controlled prosesses under conflict dynamical systems // J. Math. Sci. 1996. Vol. 80, no. 1. P. 1489–1518.
9. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
10. **Пшеничный Б.Н.** Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
11. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
12. **Чикрий А.А., Раппопорт И.С.** Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. 2012. №4. С. 40–64.
13. **Раппопорт И. С.** Стратегии группового сближения в методе разрешающих функций для квазилинейных конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. 2019. Т. 55, № 1. С. 149–163.
14. **Petrov N.N., Solov'eva N.A.** Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games // J. Optim. Theory Appl. 2019. Vol. 182, no. 1. P. 417–429. doi: 10.1007/s10957-019-01526-7.
15. **Петров Н.Н.** Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временных шкалах // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, вып. 2. С. 249–258. doi: 10.35634/vm200208.

16. **Петров Н.Н., Мачтакова А.И.** Поимка двух скоординированных убегающих в задаче с дробными производными, фазовыми ограничениями и простой матрицей // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2020. Т. 56. С. 50–62. doi: 10.35634/2226-3594-2020-56-05 .
17. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** К задаче группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Итоги науки и техники. Сер. Современ. математика и ее приложение. Тематический обзор. 2017. Т. 132. С. 81–85.
18. **Чикрий А. А., Чикрий Г.Ц.** Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 324–333.
19. **Чикрий А. А., Чикрий Г.Ц.** О матричных разрешающих функциях в динамических задачах сближения // Кибернетика и системный анализ. 2014. Т. 50, № 2. С. 44–63.
20. **Чикрий А. А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН. 2010. Т. 271, С. 76–92.
21. **Aubin J.P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.

Поступила 14.01.2021
После доработки 12.02.2021
Принята к публикации 22.02.2021

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
главный науч. сотрудник
лаборатории математической теории управления,
директор
Института математики, информационых технологий и физики Удмуртского университета
г. Ижевск
e-mail: kma3@list.ru

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games.* N Y: John Wiley & Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604 .
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow: Nauka Publ., 1974, 458 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p.
5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* Basel: Gordon & Breach, 1995, 625 p.
6. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy. T.* 2 [Selected scientific works. Vol. 2]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 576 p.
7. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 424 p. doi: 10.1007/978-94-017-1135-7 . Original Russian text published in Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyamye protsessy.* Kiev: Nauk. Dumka Publ., 1992, 384 p.
8. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict. *J. Math. Sci.*, 1996, vol. 80, no. 1, pp. 1489–1518. doi: 10.1007/BF02363923 .
9. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi processami* [Mathematical methods for control of several dynamic processes]. Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p. ISBN: 5-211-00954-1 .
10. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).
11. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk: Udmurt. State Univ. Publ., 2009, 266 p. ISBN: 978-5-904524-17-3 .
12. Chikrii A.A., Rappoport I.S. Method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 512–531. doi: 10.1007/s10559-012-9430-y .
13. Rappoport J.S. Strategies of group approach in the method of resolving functions for quasilinear conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 128–140. doi: 10.1007/s10559-019-00118-7 .

14. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games. *J. Optim. Theory Appl.*, 2019, vol. 182, no. 1, pp. 417–429. doi: 10.1007/s10957-019-01526-7 .
15. Petrov N.N. The task of simple group pursuit with phase constraints in time scales. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki,* 2020, vol. 30, no. 1, pp. 249–258 (in Russian). doi: 10.35634/vm200208 .
16. Petrov N.N., Machtakova A.I. Capture of two coordinated evaders in a problem with fractional derivatives, phase restrictions and a simple matrix. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta,* 2020, vol. 56, pp. 50–62 (in Russian). doi: 10.35634/2226-3594-2020-56-05 .
17. Petrov, N.N., Solov'eva, N.A. Problem of group pursuit in linear recurrent differential games. *J. Math. Sci. (United States)*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 732–736. doi: 10.1007/s10958-018-3779-z .
18. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Instit. Math.*, 2014, vol. 291, suppl. 1, pp. 56–65. doi: 10.1134/S0081543815090047 .
19. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix resolving functions in dynamic pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis,* 2014, vol. 50, no. 2, pp. 201–217. doi: 10.1007/s10559-014-9607-7 .
20. Chikrii A. A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Instit. Math.,* 2010, vol. 271, pp. 69–85. doi: 10.1134/S0081543810040073 .
21. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-valued analysis.* Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1990, 461 p. ISBN: 0817634789 .

Received January 14, 2021
Revised February 12, 2021
Accepted February 22, 2021

Funding Agency: This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-00232-20-01, project FEWS-2020-0010 and under grant 20-01-00293 from the Russian Foundation for Basic Research.

Nikolai Nikandrovich Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: kma3@list.ru .

Cite this article as: N. N. Petrov. Matrix resolving functions in a linear problem of group pursuit with multiple capture, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 185–196 .