ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

УСТОЙЧИВОЕ СЛЕЖЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ И МЕНЯЮЩЕЙСЯ ИНФОРМАЦИИ[1]

Е. Т. Ларин

Рассматривается задача отслеживания траектории динамической системы, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы заданное качество управляемого процесса, в нашем случае, отслеживание траекторией заданной системы предписанной траекториеи некоторой эталонной системы, подверженной влиянию неизвестного нам возмущения. Указываются два алгоритма решения этой задачи. Первый алгоритм ориентирован на случай непрерывного измерения фазовых состояний, а второй — на случай их дискретного измерения. Алгоритмы устойчивы к информационным помехам и погрешностям вычислений.

Ключевые слова: Отслеживания траектории, фазовые состояния, дифференциальные уравнения.

E. T. Larin. Stable tracking under incomplete and changing information.

We consider the problem of tracking a trajectory of a dynamical system described by a system of ordinary differential equations. It is required to design a feedback control algorithm guaranteeing a prescribed quality of the controlled process; more exactly, the trajectory of the system must track a given trajectory of a certain reference system subject to an unknown disturbance. We propose two algorithms, which cover the cases of continuous and discrete measurement of phase states, respectively. The algorithms are stable with respect to information noises and computational errors.

Keywords: trajectory tracking, phase states, differential equations.

MSC: 49J35

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-141-149

1. Введение. Постановка задачи

В статье рассматривается задача управления системой нелинейных дифференциальных уравнений. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы заданное качество управляемого процесса, а именно отслеживание траекторией заданной системы предписанной траектории некоторой эталонной системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения. Методы решения подобного типа задач хорошо известны и излагаются, в частности, в рамках теории позиционного управления [1-3]. В настоящей работе мы исследуем задачу, которая имеет две особенности. Во-первых, ошибки измерения фазовых состояний в отдельные моменты времени могут быть достаточно большими. Во-вторых, относительно неизвестного возмущения, действующего на эталонную систему, известно лишь, что оно является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т.е может быть неограниченным. Указанные предположения ведут к невозможности точного отслеживания траекторией заданной управляемой системы траектории эталонной системы. Учитывая данную особенность задачи, мы конструируем два устойчивых к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритма решения, которые основаны на сочетании элементов теории некорректных задач с известным

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига. Задача отслеживания траектории — одна из “классических” задач оптимального управления. Различные варианты этой задачи исследовались многими авторами (см., [4-7]). В цитированных выше работах полагалось, что ошибки измерения достаточно малы, во все моменты времени.

Имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + Bu(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовое пространство, $x(t_0) = x_0$ — начальное состояние, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, B — $n \times m$-мерная матрица, функция $f(t,x)$ непрерывна по t и липшицева по x.

Наряду с системой (1.1) имеется еще одна система того же вида

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) + Bv(t), \quad t \in T, \tag{1.2}$$

с начальным состоянием $y(t_0) = y_0$. Полагаем $|x_0 - y_0|_n \le h$. Эта система (назовем ее в дальнейшем *эталонной*) подвержена воздействию некоторого эталонного управления $v(\cdot)$, $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$. Эталонное управление, а также отвечающая ему траектория $y(\cdot) = y(\cdot; t_0, y_0, v(\cdot))$ системы (1.2) заранее неизвестны. В дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m \quad (\tau_0 = t_0,\ \tau_m = \vartheta,\ \tau_{i+1} = \tau_i + \delta) \tag{1.3}$$

измеряются состояния $x(\tau_i) = x(\tau_i; t_0, x_0, u(\cdot))$ системы (1.1), а также состояния $y(\tau_i) = y(\tau_i; t_0, y_0, v(\cdot))$ эталонной системы. Состояния $x(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ — удовлетворяют неравенствам

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_n \le \nu_i^h, \quad \Big(\delta \sum_{i=0}^{m-1} (\nu_i^h)^2\Big)^{1/2} \le ch. \tag{1.4}$$

Здесь величина $h \in (0,1)$ характеризует точность измерения, $\nu_i^h \in (0,1)$ — величина ошибки измерения, символ $|x|_n$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $c = \mathrm{const} > 0$.

Требуется указать алгоритм формирования управления u в системе (1.1), позволяющий синхронно с развитием процесса осуществлять отслеживание траекторией $x(\cdot)$ этой системы траектории $y(\cdot)$ эталонной системы. Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$ в “реальном времени” формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u^h(\cdot)$ такое, что равномерное отклонение $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u^h(\cdot))$ от $y(\cdot) = y(\cdot; t_0, y_0, v(\cdot))$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

Наряду с измерениями фазовых состояний в дискретные моменты времени (см. (1.3), (1.4)) мы рассмотрим также случай, когда измерения фазовых состояний $x(t)$ и $y(t)$ осуществляются “непрерывно”. А именно, предполагается, что в каждый момент времени $t \in T$ производятся измерения фазовых состояний систем (1.1) и (1.2), в результате чего определяются векторы $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^n$ со свойствами

$$|\xi^h(t) - x(t)|_n \le \nu(h,t), \quad t \in T, \quad \Big(\int_{t_0}^{\vartheta} \nu^2(h,t)\, dt\Big)^{1/2} \le ch, \tag{1.5}$$

функции $\xi^h(t)$, $t \in T$, являются измеримыми по Лебегу.

2. Алгоритм решения. Случай непрерывного измерения фазовых состояний

Укажем алгоритм решения задачи в случае непрерывного измерения фазовых состояний. Пусть L — постоянная Липшица функции f, т. е.

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)|_n \le L|x_1 - x_2|_n \quad \forall\, t \in T, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Управление $u = u^h(t)$ в системе (1.1) зададим следующим образом:

$$u^h(t) = \alpha^{-1}(h)B'(y(t) - \xi^h(t)), \tag{2.1}$$

где функция $\alpha(h)\colon (0,1) \to (0,1)$. Таким образом, управление $u^h(t)$ вида (2.1) находится по правилу

$$u^h(t) = \arg\min\{\alpha(h)|v|_m^2 + 2(\varphi^h(t), B'v) : v \in \mathbb{R}^m\}. \tag{2.2}$$

Здесь штрих означает транспонирование, символ $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве, $\varphi^h(t) = \xi^h(t) - y(t)$. При таком выборе управления система (1.1) примет вид

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \alpha^{-1}(h)BB'(y(t) - \xi^h(t)), \quad t \in T.$$

Обозначим ее решение символом $x^h(\cdot)$.

Пусть $\mu_h(t) = x^h(t) - y(t)$. Обозначим через $d_j,\ c_j,\ c^{(j)},\ j = 1, 2, \ldots,$ некоторые положительные постоянные, и далее $\alpha = \alpha(h)$.

Теорема 1. *Пусть $\beta \in (0,1)$ и $C_* \in (0,+\infty)$ — некоторые постоянные. Пусть также $\alpha \to 0$ при $h \to 0$, $\alpha^{-2}h^{2-\beta} \le C_*$. Тогда можно указать (в явном виде) постоянную $d_0 > 0$ такую, что справедливо неравенство*

$$\sup_{t \in T} |\mu_h(t)|_n^2 \le d_0(h^\beta + \alpha).$$

Доказательство. В силу (1.5), (2.1) справедливо неравенство

$$|u^h(t)|_m^2 \le 2b^2\alpha^{-2}(\nu^2(h,t) + |\mu_h(t)|_n^2), \quad t \in T,$$

где $b = \|B'\|$ — евклидова норма матрицы B'. В таком случае

$$\int\limits_{t_0}^{t} |u^h(\tau)|_m^2\, d\tau \le 2b^2\alpha^{-2}K(t) + 2b^2\alpha^{-2}K_h(t), \tag{2.3}$$

$$K(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\mu_h(\tau)|_n^2\, d\tau, \quad K_h(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \nu^2(h,\tau)d\tau \le c^2h^2.$$

Нетрудно видеть также, что в силу (1.5) верно неравенство

$$(B\varrho(t), \mu_h(t)) \le (B\varrho(t), \varphi^h(t)) + b\nu(h,t)\varrho_h(t) \quad \text{при п.в. } t \in T,$$

$$\varrho_h(t) = |u^h(t)|_m + |v(t)|_m, \quad \varrho(t) = u^h(t) - v(t).$$

Далее, умножив на $\mu_h(t)$ правую и левую части равенства

$$\dot{x}^h(t) - \dot{y}(t) = f(t, x^h(t)) - f(t, y(t)) + B\varrho(t),$$

будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d|\mu_h(t)|_n^2}{dt} \le (B\varrho(t), \mu_h(t)) + L|\mu_h(t)|_n^2 \le (B\varrho(t), \varphi^h(t)) + b\nu(h,t)\varrho_h(t) + L|\mu_h(t)|_n^2.$$

Следовательно,

$$\frac{d|\mu_h(t)|_n^2}{dt} + \alpha(|u^h(t)|_m^2 - |v(t)|_m^2) \le 2(u^h(t), B'\varphi^h(t))$$

$$+ \alpha|u^h(t)|_m^2 - 2(v(t), B'\varphi^h(t)) - \alpha|v(t)|_m^2 + 2b\nu(h,t)\varrho_h(t) + 2L|\mu_h(t)|_n^2. \tag{2.4}$$

Из соотношения (2.4) в силу равенства (2.2) получаем

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(t_0) + 2b\int_{t_0}^{t} \nu(h,\tau)\varrho_h(\tau)\,d\tau + 2LK(t), \tag{2.5}$$

где

$$\varepsilon_h(t) = |\mu_h(t)|_n^2 + \alpha\Big(\int_{t_0}^{t} |u^h(\tau)|_m^2\,d\tau - \int_{t_0}^{t} |v(\tau)|_m^2\,d\tau\Big).$$

Ввиду включения $v(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^m)$, а также неравенства $\Big(\int_{t_0}^{\vartheta} \nu^2(h,\tau)d\tau\Big)^{1/2} \le ch$ имеем

$$\int_{t_0}^{t} \nu(h,\tau)|v(\tau)|_m d\tau \le \Big(\int_{t_0}^{\vartheta} \nu^2(h,\tau)d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int_{t_0}^{t} |v(\tau)|_m^2 d\tau\Big)^{1/2} \le c_1 h,$$

$$\int_{t_0}^{t} \nu(h,\tau)|u^h(\tau)|_m d\tau \le c_3 h^\beta + c_4 h^{2-\beta}\int_{t_0}^{t} |u^h(\tau)|_m^2 d\tau.$$

В таком случае отсюда и из неравенства (2.5) выводим

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(t_0) + c_5(h + h^\beta) + h^{2-\beta}\int_{t_0}^{t} |u^h(\tau)|_m^2\,d\tau + 2LK(t), \quad \beta \in (0,1). \tag{2.6}$$

В свою очередь, из соотношения (2.6) в силу неравенства (2.3) выводим (так как $\varepsilon_h(t_0) = |y_0 - x_0|_n^2 \le h^2$)

$$\varepsilon_h(t) \le c_6 h^\beta + c_7(h^{2-\beta}\alpha^{-2} + 1)K(t) + c_8 h^{2-\beta}\alpha^{-2}K_h(t). \tag{2.7}$$

Заметим, что

$$c_8 h^{2-\beta}\alpha^{-2}K_h(t) \le c_9 h^{4-\beta}\alpha^{-2}. \tag{2.8}$$

Поэтому из (2.7) и (2.8) следует оценка

$$|\mu_h(t)|_n^2 \le c_{10}(h^\beta + \alpha + h^{4-\beta}\alpha^{-2}) + c_7(h^{2-\beta}\alpha^{-2} + 1)\int_{t_0}^{t} |\mu_h(\tau)|_n^2\,d\tau.$$

По лемме Гроноулла отсюда имеем

$$|\mu_h(t)|_n^2 \le c_{10}(h^\beta + \alpha + h^{4-\beta}\alpha^{-2})\,\exp\big\{c_7(t - t_0)(h^{2-\beta}\alpha^{-2} + 1)\big\}, \quad t \in T.$$

В силу условия теоремы $h^{2-\beta}\alpha^{-2} \le C_*,\ h \in (0,1)$. Тогда $|\mu_h(t)|_n^2 \le c_{11}(h^\beta + \alpha)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если $\beta = 2/3$, $\alpha = h^{2/3}$, то справедливо неравенство

$$\sup_{t\in\tau} |\mu_h(t)|_n^2 \le d_1 h^{2/3}.$$

3. Алгоритм решения. Случай дискретного измерения фазовых состояний

Укажем алгоритм решения задачи в случае дискретного измерения фазовых состояний. Таким образом, ниже предполагаются выполненными соотношения (1.4).

Пусть взято семейство разбиений отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h).$$

До начала работы алгоритма фиксируем величину h и разбиение Δ_h. Работу алгоритма разобьем на $m-1$ однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляется вектор

$$u_i^h = \alpha^{-1} B'(y(\tau_i) - \xi_i^h). \tag{3.1}$$

Затем на вход системы (1.1) подается управление

$$u^h(t) = u_i^h, \quad t \in \delta_i.$$

Под действием этого управления, система (1.1) переходит из состояния $x^h(\tau_i) = x(\tau_i; \tau_{i-1}, x^h(\tau_{i-1}), u_{i-1}^h)$ в состояние $x^h(\tau_{i+1}) = x(\tau_{i+1}; \tau_i, x^h(\tau_i), u_i^h)$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть при некотором* $\varepsilon \in (0,1)$, $\delta^{1-\varepsilon}(h)\alpha^{-2} \le \mathrm{const}$ *при* $h \in (0,1)$. *Тогда справедливо*

$$\sup_{t \in \tau} |x^h(t) - y(t)|_n^2 \le d_2\big(h^2\delta^{\varepsilon-1}(h) + \alpha + \delta^{1-\varepsilon}(h)\big).$$

Доказательство Рассмотрим величину $\varepsilon(t) = \dfrac{1}{2}|x^h(t) - y(t)|_n^2$. Для почти всех $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ имеем

$$\dot\varepsilon(t) = \Bigg(x_i^h - y_i + \int_{\tau_i}^{t} \big[f(\tau, x^h(\tau)) - f(\tau, y(\tau)) + B(u_i^h - v(\tau))\big]\, d\tau,$$
$$f(t, x^h(t)) - f(t, y(t)) + B(u_i^h - v(t))\Bigg),$$

где $x_i^h = x^h(\tau_i)$, $y_i = y(\tau_i)$. После интегрирования правой и левой частей этого равенства получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_i + \sum_{j=0}^{5} \int_{\tau_i}^{t} \mu_i^{(j)}(\tau)\, d\tau, \tag{3.2}$$

где $\varepsilon_i = \dfrac{1}{2}|x_i^h - y_i|_n^2$,

$$\mu_i^{(0)}(t) = \Big(x_i^h - y_i, B(u_i^h - v(t))\Big), \quad \mu_i^{(1)}(t) = \Big(x_i^h - y_i, f(t, x^h(t)) - f(t, y(t))\Big),$$

$$\mu_i^{(2)}(t) = \Bigg(\int_{\tau_i}^{t} \big(f(x^h(\tau)) - f(y(\tau))\big) d\tau, f(t, x^h(t)) - f(t, y(t))\Bigg),$$

$$\mu_i^{(3)}(t) = \Bigg(\int_{\tau_i}^{t} \big(f(\tau, x^h(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\big) d\tau, B(u_i^h - v(t))\Bigg),$$

$$\mu_i^{(4)}(t) = \Big(\int\limits_{\tau_i}^{t} B(u_i^h - v(\tau))\, d\tau, f(t, x^h(t)) - f(t, y(t)) \Big),$$
$$\mu_i^{(5)}(t) = \Big(\int\limits_{\tau_i}^{t} B(u_i^h - v(\tau))\, d\tau, B(u_i^h - v(t)) \Big).$$

Оценим правую часть равенства (3.2). В силу неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} \mu_i^{(1)}(\tau)\, d\tau \le L^2(t-\tau_i)\varepsilon_i + \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau)\, d\tau, \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} \mu_i^{(2)}(\tau)\, d\tau \le \Big(\int\limits_{\tau_i}^{t} \sqrt{2} L \varepsilon^{1/2}(\tau)\, d\tau \Big)^2 \le 2L^2(t-\tau_i) \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau)\, d\tau, \tag{3.4}$$

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} \mu_i^{(3)}(\tau)\, d\tau \le b^2 L^2 (t-\tau_i) \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau)\, d\tau + (t-\tau_i) \int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m^2 + |v(\tau)|_m^2 \big) d\tau. \tag{3.5}$$

Учитывая липшицевость функции $f(t,x)$ по второму аргументу, получаем

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} \mu_i^{(4)}(\tau)\, d\tau \le \int\limits_{\tau_i}^{t} L|x^h(\tau) - y(\tau))|_n\, d\tau \int\limits_{\tau_i}^{t} b\big(|u_i^h|_m + |v(\tau)|_m\big) d\tau$$

$$\le b^2 L^2 (t-\tau_i) \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau)\, d\tau + (t-\tau_i) \int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m^2 + |v(\tau)|_m^2 \big) d\tau. \tag{3.6}$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} \mu_i^{(5)}(\tau)\, d\tau \le b^2 \Big[\int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m + |v(\tau)|_m \big) d\tau \Big]^2$$

$$\le b^2 (t-\tau_i) \Big[\Big(\int\limits_{\tau_i}^{t} |u_i^h|_m^2\, d\tau \Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_{\tau_i}^{t} |v(\tau)|_m^2\, d\tau \Big)^{1/2} \Big]^2 \le 2b^2 (t-\tau_i) \int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m^2 + |v(\tau)|_m^2 \big) d\tau. \tag{3.7}$$

Объединив (3.2)–(3.7), будем иметь

$$\varepsilon(t) \le \varepsilon_i + \mu_{t,i} + c_1(t-\tau_i)\varepsilon_i + c_2 \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau)\, d\tau + c_3 \lambda_{t,i}, \tag{3.8}$$

где

$$\mu_{t,i} = \int\limits_{\tau_i}^{t} \Big(x_i^h - y_i, B(u_i^h - v(\tau)) \Big) d\tau, \quad \lambda_{t,i} = (t-\tau_i) \int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m^2 + |v(\tau)|_m^2 \big) d\tau.$$

Нетрудно видеть, что

$$|u_i^h|_m = |\alpha^{-1} B'(y_i - \xi_i^h)|_m \le \alpha^{-1} \big(\nu_i^h + \sqrt{2} \varepsilon_i^{1/2} \big) b. \tag{3.9}$$

Заметим, что $\delta^{1-\varepsilon}(h)\alpha^{-2} \le \text{const}$ при всех $h \in (0,1)$. Поэтому с учетом (3.9) верна оценка

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} |u_i^h|_m^2\, d\tau \le \frac{2(t-\tau_i)}{\alpha^2} b^2((\nu_i^h)^2 + 2\varepsilon_i) \le c_4((\nu_i^h)^2 + \varepsilon_i)\delta^{\varepsilon}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : m-1]. \tag{3.10}$$

Следовательно,

$$\lambda_{t,i} \le c_4(t-\tau_i)^{1+\varepsilon}((\nu_i^h)^2 + \varepsilon_i) + (t-\tau_i)\int\limits_{\tau_i}^{t} |v(\tau)|_m^2\, d\tau. \tag{3.11}$$

Далее имеем в силу (1.4)

$$\mu_{t,i} \le \int\limits_{\tau_i}^{t} \Big(s_i, B(u_i^h - v(\tau))\Big)\, d\tau + \chi_{t,i}, \tag{3.12}$$

где

$$s_i = \xi_i^h - y(\tau_i), \quad \chi_{t,i} = 2\nu_i^h b\int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m + |v(\tau)|_m\big) d\tau.$$

Кроме того, с учетом (3.10)

$$\chi_{t,i} \le 2b\nu_i^h(t-\tau_i)^{1/2}\Bigg[\int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m^2 + |v(\tau)|_m^2\big) d\tau\Bigg]^{1/2}$$

$$\le (\nu_i^h)^2(t-\tau_i)^{1-\gamma}b^2 + 2(t-\tau_i)^{\gamma}\int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m^2 + |v(\tau)|_m^2\big) d\tau$$

$$\le (\nu_i^h)^2(t-\tau_i)^{1-\gamma}b^2 + c_5(t-\tau_i)^{\gamma+\varepsilon}((\nu_i^h)^2 + \varepsilon_i) + 2(t-\tau_i)^{\gamma}\int\limits_{\tau_i}^{t} |v(\tau)|_m^2\, d\tau. \tag{3.13}$$

Пусть $\gamma + \varepsilon = 1$. Из (3.8) в силу (3.11)–(3.13) получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\varepsilon(t) + \frac{1}{2}\alpha\int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m^2 - |v(\tau)|_m^2\big) d\tau \le \big(\varepsilon_i + c^{(1)}(t-\tau_i)\varepsilon_i\big) + c^{(2)}(\nu_i^h)^2(t-\tau_i)^{\varepsilon}$$

$$+\int\limits_{\tau_i}^{t} \Big(s_i, B(u_i^h - v(\tau))\Big)\, d\tau + \frac{1}{2}\alpha\int\limits_{\tau_i}^{t} \big(|u_i^h|_m^2 - |v(\tau)|_m^2\big) d\tau + c^{(3)}(t-\tau_i)^{1-\varepsilon}\int\limits_{\tau_i}^{t} |v(\tau)|_m^2\, d\tau + c^{(4)}\int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau)\, d\tau.$$

Заметим, что

$$u_i^h = \arg\min\{(s_i, Bu) + \alpha|u|_m^2 \colon u \in \mathbb{R}^m\}.$$

Значит при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\varepsilon(t) \le \big(\varepsilon_i + c^{(1)}(t-\tau_i)\varepsilon_i\big) + c^{(2)}(\nu_i^h)^2(t-\tau_i)^{\varepsilon} + c^{(5)}(\delta^{1-\varepsilon} + \alpha)\int\limits_{\tau_i}^{t} |v(\tau)|_m^2\, d\tau + c^{(4)}\int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau)\, d\tau. \tag{3.14}$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, из (3.14) будем иметь при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\varepsilon(t) \le \Bigg[\varepsilon_i + c^{(1)}\delta\varepsilon_i + c^{(2)}(\nu_i^h)^2\delta^{\varepsilon} + c^{(5)}(\delta^{1-\varepsilon} + \alpha)\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_m^2\, d\tau\Bigg] \exp\{c^{(4)}(t-\tau_i)\}.$$

Нетрудно видеть, что при $t-\tau_i<\delta<1$ верно неравенство $\exp\{c^{(4)}(t-\tau_i)\}\le 1+c^{(6)}\delta$. В таком случае

$$\varepsilon(t)\le (1+c^{(9)}\delta)\varepsilon_i+c^{(7)}(\nu_i^h)^2(\delta)^{\varepsilon}+c^{(8)}(\alpha+\delta^{1-\varepsilon})\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|v(\tau)|_m^2\,d\tau,\quad t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]. \tag{3.15}$$

Аналогично [1, с. 54–59] получаем справедливое при $\delta^{1-\varepsilon}(h)\alpha^{-2}\le\mathrm{const}$ неравенство

$$\varepsilon(\tau_i)\le\left[\varepsilon(t_0)+c^{(7)}c^2h^2\delta^{\varepsilon-1}+c^{(8)}(\alpha+\delta^{1-\varepsilon})\int\limits_{t_0}^{\tau_i}|v(\tau)|_m^2\,d\tau\right]\exp\{c^{(9)}(\tau_i-t_0)\}$$

$$\le c^{(10)}\big(\varepsilon(t_0)+h^2\delta^{\varepsilon-1}+\alpha+\delta^{1-\varepsilon}\big). \tag{3.16}$$

Из (3.16) получаем следующее неравенство:

$$\varepsilon(t)\le c^{(11)}\big(h^2\delta^{\varepsilon-1}+\alpha+\delta^{1-\varepsilon}\big),\quad \tau\in T.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Утверждения теорем 1 и 2 останутся справедливыми, если измерения состояний эталонной системы неточны, т. е. в «дискретном» случае вместо величин $y(\tau_i)$ становятся известными величины $\psi_i^h\in\mathbb{R}^n$, $|\psi_i^h-y(\tau_i)|_n\le h$, а в непрерывном — вместо величин $y(t)$ — величины $\psi^h(t)$ такие, что $|y(t)-\psi^h(t)|_n\le h$, $t\in T$, а функция $t\to\psi^h(t)$, $t\in T$ измерима по Лебегу. При этом $u_i^h=\alpha^{-1}B'(\psi_i^h-\xi^h(t))$ — в непрерывном случае (см. (2.1)), $u_i^h=\alpha^{-1}B'(\psi_i^h-\xi_i^h)$ — в дискретном (см. (3.1)).

Замечание 3. Если $\alpha=ch^{(1-\varepsilon)/2},\delta(h)=h$, то справедливо неравенство

$$\sup_{t\in\tau}|x^h(t)-y(t)|_n^2\le d_3h^{(1-\varepsilon)/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 451 с.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 392 с.
3. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой: Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
4. **Максимов В.И.** Об отслеживании решения параболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. №1. С. 40–48
5. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** Одна задача об устойчивом отслеживании движения// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т.12, №1. С. 142–156.
6. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одном алгоритме отслеживания движения эталонной системы с последействием при измерении части координат // Дифферец. уравнения. 2011. Т.47, №3. С. 415–421.
7. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме управления линейной системой при измерения части координат фазового вектора// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, №4. С. 218–230.

Поступила 12.03.2021
После доработки 22.03.2021
Принята к публикации 29.03.2021

Ларин Егор Тимурович
математик 2 кат.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: larin.gor@bk.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the encounter of motions). Moscow: Nauka Publ., 1970, 392 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of a dynamical system). Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
4. Maksimov V.I. On tracking solutions of parabolic equations. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 1, pp. 35–42. doi: 10.3103/S1066369X12010057 .
5. Krasovskii N.N., Kotel'nikova A.N. One problem on stable tracking of motion. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2006, vol. 253, suppl. 1, pp. S151–S167. doi: 10.1134/S0081543806050117 .
6. On an algorithm for tracking the motion of the reference system with aftereffect when only part of the coordinates is measured. *Differ. Uravn.*, 2011, vol. 47 no. 3, art.-no. 412–418. doi: 10.1134/S0012266111030128 .
7. Maksimov V.I. On a control algorithm for a linear system with measurements of a part of coordinates of the phase vector. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2016, vol. 292, no. 1, pp. 197–210. doi: 10.1134/S0081543816020164 .

Received March 12, 2021
Revised March 22, 2021
Accepted March 29, 2021

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2021-1383).

Egor Timurovich Larin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: larin.gor@bk.ru .

Cite this article as: E. T. Larin. Stable tracking under incomplete and changing information, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 141–149 .