ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 512.54

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА СОПРЯЖЕННЫХ ИНВОЛЮЦИЙ ГРУПП $SL_n(q)$ ПРИ $n = 4, 5, 7, 8$ И НЕЧЕТНОМ q [1]

И. Ю. Ефимов, Я. Н. Нужин

В 2009 г. Дж.М. Уорд дал ответ для спорадических и знакопеременных групп и для проективных специальных линейных групп $PSL_n(q)$ над полем нечетного порядка q, исключая случай $q = 9$ при $n \geq 4$, а при $n = 6$ и случай $q \equiv 3 \bmod 4$, на вопрос 14.69в) из Коуровской тетради, сформулированный вторым автором статьи: для каждой конечной простой неабелевой группы G найти минимум числа $n_c(G)$ порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно единице. Известно, что $n_c(G) \geq 5$ для любой простой неабелевой группы G. В данной статье ограничение $q \neq 9$ снимается для размерностей $n = 4, 5, 7, 8$. Оказалось, что в этих размерностях порождающие пятерки сопряженных инволюций, произведение которых равно единице, для специальных линейных групп $SL_n(q)$, а следовательно, и для $PSL_n(q)$, указанные Дж.М. Уордом, годятся и при $q = 9$.

Ключевые слова: специальная линейная группа над конечным полем, порождающие тройки сопряженных инволюций.

I. Yu. Efimov, Ya. N. Nuzhin. Generating sets of conjugate involutions of the groups $SL_n(q)$ for $n = 4, 5, 7, 8$ and odd q.

In 2009 J. M. Ward answered for sporadic and alternating groups and for projective special linear groups $PSL_n(q)$ over a field of odd order q except for the case $q = 9$ for $n \geq 4$ and, for $n = 6$, the case $q \equiv 3 \mod 4$ Question 14.69c from *The Kourovka Notebook* posed by the second author of the present paper: *For every finite simple nonabelian group G, find the minimum number $n_c(G)$ of generating conjugate involutions whose product is* 1. It is known that $n_c(G) \geq 5$ for any simple nonabelian group G. We discard the constraint $q \neq 9$ for the dimensions $n = 4, 5, 7, 8$. It turns out that in these dimensions the generating quintiples of conjugate involutions with the product equal to 1 for special linear groups $SL_n(q)$ and, consequently, for $PSL_n(q)$, specified by Ward, are also suitable for $q = 9$.

Keywords: spacial linear group over a finite field, generating triples of conjugate involutions.

MSC: 20G40

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-62-69

1. Введение

В 1999 г. второй автор статьи записал в Коуровской тетради следующую задачу [1, вопрос 14.69в)]: *для каждой конечной простой неабелевой группы G найти минимум числа $n_c(G)$ порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно единице.*

Из простоты группы G несложно получается, что $n_c(G) \geq 5$ (см., например, [2]). С другой стороны, если группа G порождается тремя сопряженными инволюциями, то $n_c(G) \leq 6$. Назовем группу $(2, 3)$-*порожденной*, если она порождается инволюцией и элементом порядка 3. Всякая совершенная, в частности простая, $(2, 3)$-порожденная группа порождается тремя сопряженными инволюциями [3]. Таким образом, для простой $(2, 3)$-порожденной группы G либо $n_c(G) = 5$, либо $n_c(G) = 6$. Однако имеются примеры простых конечных групп, для которых число n_c равно 7 [2; 4].

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1) и РФФИ (проект 19–01–00566).

Дж.М. Уорд [4] дал ответ на вопрос 14.69в) для спорадических и знакопеременных групп и для проективных специальных линейных групп $PSL_n(q)$ над полем нечетного порядка q, исключая случай $q = 9$ при $n \geq 4$, а при $n = 6$ и случай $q \equiv 3 \bmod 4$.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема. *Специальная линейная группа $SL_n(q)$ размерности $n = 4, 5, 7, 8$ над конечным полем нечетного порядка q порождается тремя сопряженными инволюциями a, b, c, причем произведение ab также является инволюцией и она сопряжена с инволюцией a.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы состоит в том, что порождающие тройки инволюций с необходимыми свойствами указываются явно, причем они те же, что и в диссертации Дж.М. Уорда [4], который существенно опирался на известную теорему Л. Диксона о том, что порожденная двумя противоположными элементарными трансвекциями группа над конечным полем нечетного порядка $q \neq 9$ с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с группой SL_2 над некоторым подполем основного поля. Наше доказательство носит общий характер, т. е. не зависит от мощности основного поля и опирается на результаты В.М. Левчука [5; 6] и второго автора [7]. Некоторые промежуточные вычисления при доказательстве теоремы проводились на языке групп лиева типа, затем они были переведены на матричный язык. Все вычисления с матрицами были проверены в системе компьютерной алгебры Maxima.

Отметим один технический результат, полезный для получения ответа на указанный выше вопрос.

Лемма 1 [4]. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Группа G порождается тремя инволюциями a, b, c, первые две из которых перестановочны* (*инволюции a, b, c, ab сопряжены*).

2) *Группа G порождается инволюциями a, b, c, d, e, две из которых совпадают, и $abcde = 1$* (*соответственно инволюции a, b, c, d, e сопряжены*).

Ясно, что если $\overline{G}$ — гомоморфный образ группы G, то $n_c(\overline{G}) \leq n_c(G)$. Поэтому, применяя лемму 1 и учитывая, что $n_c(G) \geq 5$ для простой группы G, из теоремы получаем

Следствие. *Если $n = 4, 5, 7, 8$ и q нечетно, то $n_c(SL_n(q)) = n_c(PSL_n(q)) = 5$.*

Для пропущенной в следствии размерности $n = 6$ число $n_c(PSL_6(q))$ неизвестно, как уже отмечалось выше, только при $q = 9$ и при $q \equiv 3 \bmod 4$, а число $n_c(SL_6(q))$ равно 6 при любом нечетном q, см. работу второго автора 2020 г. (Тензорные представления и порождающие множества инволюций некоторых матричных групп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Vol. 26, № 3. С. 133–141.) На самом деле, в данной работе доказано неравенство $n_c(SL_6(D)) > 5$ для любой коммутативной области целостности характеристики, отличной от 2, а в силу порождаемости группы $SL_6(q)$ при нечетном q тремя инволюциями [8–10] получаем равенство $n_c(SL_6(q)) = 6$.

2. Порождающие множества элементов специальных линейных групп

В статье приняты такие сокращения: $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством M из некоторой группы G; $x^y = yxy^{-1}$; $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. По определению ненулевой элемент поля называется *собственным*, если он не лежит ни в каком его собственном подполе. Отметим, что в любом конечном поле существуют собственные элементы такие, что и их квадраты являются таковыми [7, лемма 7].

Хорошо известно, что специальная линейная группа $SL_n(K)$ над полем K порождается всеми своими (элементарными) трансвекциями

$$t_{ij}(k), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j, \quad k \in K.$$

Здесь, как обычно, $t_{ij}(k) = E_n + ke_{ij}$, где E_n — единичная матрица степени n, а e_{ij} — $(n \times n)$-матрица с 1 на позиции (i, j) и нулями в остальных местах. Положим

$$t_{ij}(K) = \{t_{ij}(k) \mid k \in K\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

В случае конечного поля K порядка q группу $SL_n(K)$ будем обозначать также через $SL_n(q)$. Частным случаем предложения 2 работы [7], когда группа лиева типа совпадает с $SL_n(q)$, является следующая лемма, которая дает более компактное порождающее множество трансвекций для $SL_n(q)$.

Лемма 2. *Пусть t и t^2 — собственные элементы конечного поля K нечетного порядка q. Тогда если подгруппа M из $SL_n(K)$, $n \geq 3$, имеет неединичные пересечения $M \cap t_{ii+1}(K)$, $M \cap t_{i+1i}(K)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и $t_{ij}(t), t_{ji}(t) \in M$ для некоторой пары индексов i, j, то $M = SL_n(K)$.*

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ по определению $n_i = \mathrm{diag}\Big(E_{i-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E_{n-i-1}\Big)$. В силу транзитивного действия сопряжениями мономиальной подгруппы $N = \langle n_i \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\rangle$ на множестве подгрупп $t_{ij}(K)$ следствием леммы 2 является

Лемма 3. *Пусть t и t^2 — собственные элементы конечного поля K нечетного порядка q. Тогда группа $SL_n(K)$, $n \geq 3$, порождается любой фиксированной парой трансвекций $t_{ij}(t)$, $t_{ji}(t)$ вместе с каждым набором представителей $\overline{n}_i$ всех смежных классов n_iH, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, где H — диагональная подгруппа из $SL_n(K)$. Более того, она порождается любой фиксированной трансвекцией $t_{ij}(t)$ вместе со всеми мономиальными элементами n_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.*

Для наших целей будет полезна также

Лемма 4. *Пусть t, t^2, K, q, n_i и $\overline{n}_i$ — те же, что и в лемме 3 и $i < j$. Тогда*

$$n_i \in \langle t_{ij}(t),\ t_{ji}(t)\rangle. \tag{1}$$

В общем случае для любых ненулевых $u, v \in K$

$$\overline{n}_i \in \langle t_{ij}(u),\ t_{ji}(v)\rangle, \tag{2}$$

а значит, и $h_i \in \langle t_{ij}(u),\ t_{ji}(v)\rangle$, где $h_i = \mathrm{diag}\Big(E_{i-1}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_{n-i-1}\Big)$.

Лемма является следствием основной теоремы работы В.М. Левчука [5], в которой обобщается и усиливается известная теорема Л. Диксона. Включение (2) указано в [5], а частное включение (1) установлено в [7, лемма 5]; см. также лемму 2 в работе второго автора 1997 г. (Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. I // Алгебра и логика. 1997. Vol. 36, №1. P. 77–96).

3. Доказательство теоремы

Пусть везде ниже t и t^2 — собственные элементы конечного поля K нечетного порядка q.

3.1. Доказательство теоремы для $SL_4(q)$. Положим

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Элементы a, b, c и ab являются инволюциями с собственными значениями $\{1^2,(-1)^2\}$ и поэтому лежат в одном классе сопряженности. Действительно, в силу теории К. Жордана все они сопряжены в группе $GL_n(\overline{K})$, где $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание поля K. Так как их собственные значения лежат в K, то они сопряжены в $GL_n(K)$, а поскольку их клетки Жордана одномерны, то они сопряжены и в $SL_n(K)$.

Пусть $M=\langle a,b,c\rangle$. Покажем, что $M=SL_4(q)$. Прямые матричные вычисления дают равенства

$$(bc)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -t & -1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -2t & -2 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(-1,1,-1,1)t_{42}(-2t)t_{43}(-2),$$

$$(bc)^4=t_{42}(-4t).$$

Отсюда $t_{42}(t)\in M$, так как характеристика основного поля K нечетна. Ниже в этом и других пунктах доказательства теоремы данный факт будет использоваться без пояснений. Далее последовательно получаем следующие включения:

$$t_{42}(2t)(bc)^2=\mathrm{diag}(-1,1,-1,1)t_{43}(-2)\in M,\qquad t_{42}(t)^a=t_{31}(t)\in M,$$

$$t_{31}(t)^c=t_{13}(t)t_{43}(t)\in M,\qquad [t_{31}(t),\mathrm{diag}(-1,1,-1,1)t_{43}(-2)]=t_{41}(-2t)\in M,$$

$$t_{41}(t)^a=t_{32}(t)\in M,\qquad t_{41}(t)^c=t_{43}(-t)\in M,$$

$$t_{43}(t)^a=t_{34}(t)\in M,\qquad t_{31}(t)^ct_{41}(t)^c=t_{13}(t)\in M.$$

Из включений $t_{43}(t),\ t_{34}(t)\in M$ в силу леммы 4 следует, что и мономиальный элемент n_3 лежит в подгруппе M. Отсюда и

$$n_3a=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},1,-1\right)=\mathrm{diag}(1,-1,1,-1)n_1\in M,\quad n_3at_{13}(t)an_3^{-1}=t_{23}(t)\in M.$$

Из включений $t_{23}(t),\ t_{32}(t)\in M$ снова по лемме 4 получаем включение $n_2\in M$.

Таким образом, в подгруппе M лежат мономиальные элементы $n_3,n_2,diag(1,-1,1,-1)n_1$ и, например, трансвекции $t_{23}(t),t_{32}(t)$. Поэтому $M=SL_4(q)$ в силу леммы 3.

3.2. Доказательство теоремы для $SL_5(q)$. Положим

$$a=\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&t&-t&0&1\end{pmatrix}.$$

Элементы a, b, c и ab являются инволюциями с собственными значениями $\{1^3,(-1)^2\}$ и поэтому лежат в одном классе сопряженности (см. п. 3.1).

Пусть $M=\langle a,b,c\rangle$. Покажем, что $M=SL_5(q)$. Матричные вычисления дают равенства

$$(bc)^4=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ -1&0&0&0&0\\ 0&-t&t&0&-1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} -1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&2t&-2t&0&1\end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&4t&-4t&0&1\end{pmatrix}=t_{52}(4t)t_{53}(-4t).$$

Сейчас последовательно получаем включения

$$((bc)^4)^a = t_{42}(4t)t_{41}(-4t) \in M, \quad (((bc)^4)^a)^c = t_{13}(4t)t_{14}(-4t) \in M,$$

$$[(((bc)^4)^a)^c, b] = t_{14}(-8t) \in M, \quad [(((bc)^4)^a)^c, b]^c = t_{41}(-8t) \in M.$$

Таким образом, $t_{42}(t),\ t_{13}(t),\ t_{14}(t),\ t_{41}(t) \in M$. Поэтому, и $t_{13}(t)^a = t_{31}(t) \in M$. В силу леммы 2 трансвекции $t_{31}(t),\ t_{13}(t),\ t_{14}(t),\ t_{41}(t)$ порождают подгруппу S, изоморфную группе $SL_3(q)$, причем в S лежат элементы $t_{34}(1)$, $t_{43}(1)$, а значит, и мономиальный элемент n_3. Далее,

$$t_{43}(1)^c = t_{12}(1) \in M, \quad t_{34}(1)^c = t_{21}(1)t_{51}(\pm t) \in M,$$

$$b^{n_3} = \mathrm{diag}(1,1,-1,1,-1) \in M, \quad (t_{34}(1)^c\, b^{n_3})^2 = t_{21}(2) \in M.$$

Поскольку $t_{12}(1), t_{21}(1) \in M$, то $n_1 \in M$, а отсюда, и $n_2 = (n_1^a)^{-1} \in M$. Наконец, $n_1n_2n_1a = \mathrm{diag}(1,-1,1,1,-1)n_4 \in M$.

Итак, в подгруппе M лежат мономиальные элементы $n_1, n_2, n_3, \mathrm{diag}(1,-1,1,1,-1)n_4$ и, например, трансвекции $t_{41}(t)$ и $t_{14}(t)$. Поэтому в силу леммы 3 получаем равенство $M = SL_5(q)$.

3.3. Доказательство теоремы для $SL_7(q)$. Положим

$$a = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&t&t&0&0&-1 \end{pmatrix}.$$

Элементы a, b, c и ab являются инволюциями с собственными значениями $\{1^3, (-1)^4\}$ и поэтому лежат в одном классе сопряженности (см. п. 3.1). Покажем, что они порождают группу $SL_7(q)$. Пусть $M = \langle a, b, c\rangle$. Очевидно, матрица c раскладывается в произведение $n_0 t_{73}(-t)t_{74}(-t)$, где

$$n_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}.$$

Так как $(bc)^8 = t_{73}(-8t)t_{74}(-8t)$, то в подгруппе M лежит произведение двух трансвекций $g = t_{73}(t)t_{74}(t)$, а в силу этого и матрица n_0. Последовательные сопряжения элемента g мономиальными матрицами дают равенства

$$g^a = t_{62}(\pm t)t_{61}(\pm t), \quad (g^a)^{n_0} = t_{15}(\pm t)t_{16}(\pm t), \quad ((g^a)^{n_0})^b = t_{25}(\pm t)t_{26}(\pm t),$$

$$(((g^a)^{n_0})^b)^{n_0} = t_{52}(\pm t)t_{51}(\pm t), \quad ((((g^a)^{n_0})^b)^{n_0})^a = t_{53}(\pm t)t_{54}(\pm t),$$

$$(((((g^a)^{n_0})^b)^{n_0})^a)^{n_0} = t_{24}(\pm t)t_{23}(\pm t), \quad ((((((g^a)^{n_0})^b)^{n_0})^a)^{n_0})^a = t_{31}(\pm t)t_{32}(\pm t),$$

$$(((((((g^a)^{n_0})^b)^{n_0})^a)^{n_0})^a)^{n_0} = t_{46}(\pm t)t_{45}(\pm t).$$

Сейчас исходя из коммутаторной формулы для трансвекций получаем включение

$$[g, t_{46}(\pm t)t_{45}(\pm t)] = t_{76}(\pm t^2)t_{75}(\pm t^2) \in M.$$

Инволюция b централизует трансвекцию $t_{76}(\pm t^2)$ и переводит в обратную трансвекцию $t_{75}(\pm t^2)$. Поэтому $[t_{76}(\pm t^2)t_{75}(\pm t^2), b] = t_{75}(\pm 2t^2) \in M$. Из двух последних включений, очевидно, вытекает включение $t_{76}(t^2) \in M$. Отсюда $(t_{76}(t^2))^a = t_{67}(t^2) \in M$ и, следовательно, $\overline{n}_6 \in M$ согласно лемме 4. Далее, $[t_{75}(t^2), t_{67}(t^2)] = t_{65}(\pm t^4)$, $[t_{46}(\pm t)t_{45}(\pm t), t_{65}(t^4)] = x_{45}(\pm t^5)$ и, таким образом, справедливы включения

$$(t_{65}(\pm t^5))^{n_0} = t_{12}(\pm t^5) \in M, \quad (t_{45}(\pm t^5))^{n_0} = t_{32}(\pm t^5) \in M,$$

$$(t_{32}(\pm t^5))^a = t_{23}(\pm t^5) \in M, \quad (t_{12}(\pm t^4))^b = t_{21}(\pm t^4) \in M.$$

Из четырех последних включений в силу леммы 4 получаем $\overline{n}_1, \overline{n}_2 \in M$, а следовательно, и $\overline{n}_1 b = \overline{n}_3 \in M$, $(\overline{n}_2)^{n_0} = \overline{n}_4 \in M$, $(\overline{n}_1)^{n_0} = \overline{n}_5 \in M$, $(\overline{n}_2)^2 = h_2 \in M$. Наконец, учитывая, что $h_2 = \mathrm{diag}(1, -1, -1, 1, 1, 1, 1)$, имеем

$$(t_{62}(\pm t)t_{61}(\pm t)h_2)^2 = t_{61}(\pm 2t) \in M, \quad (t_{61}(\pm 2t))^{n_0} = t_{16}(\pm 2t) \in M.$$

Таким образом, в M лежат мономиальные элементы $\overline{n}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, и трансвекции $t_{61}(t)$, $t_{16}(t)$. Поэтому в силу леммы 3 справедливо равенство $M = SL_7(q)$.

3.4. Доказательство теоремы для $SL_8(q)$. Положим

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Элементы a, b, c и ab являются инволюциями с собственными значениями $\{1^4, (-1)^4\}$ и поэтому лежат в одном классе сопряженности (см. п. 3.1). Докажем, что они порождают группу $SL_8(q)$. Пусть $M = \langle a, b, c \rangle$. Вычисления показывают, что

$$(bc)^2 = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1)t_{84}(-2t)t_{87}(-2), \quad (bc)^4 = t_{84}(-4t).$$

Следовательно,

$$t_{84}(t) \in M. \tag{3}$$

Для краткости положим $g = t_{84}(2t)(bc)^2 = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,1,-1,-1,-1,1)t_{87}(-2)$. Тогда $[t_{84}(t)^a, g] = t_{83}(-2t)$, и поэтому

$$t_{83}(t)^{ac} = t_{14}(t)t_{84}(t) \in M. \tag{4}$$

Теперь в силу (3) и (4) получаем включение $t_{14}(t) \in M$. Отсюда последовательно получаем

$$t_{14}(t)^a = t_{23}(t) \in M,$$

$$t_{23}(t)^c = t_{65}(t) \in M, \tag{5}$$

$$t_{65}(t)^a = t_{56}(t) \in M, \quad t_{56}(t)^c = t_{32}(t) \in M, \quad t_{83}(t)^{ca} = t_{76}(-t) \in M,$$

$$t_{76}(t)^c = t_{82}(t)t_{12}(t) \in M, \tag{6}$$

$$[t_{76}(t), g] = t_{86}(-2t) \in M, \tag{7}$$

$$t_{86}(t)^c = t_{82}(-t) \in M. \tag{8}$$

Сейчас в силу (6) и (8) имеем $t_{12}(t) \in M$. Следовательно, $t_{12}(t)^a = t_{21}(t) \in M$, $t_{21}(t)^c = t_{67}(t) \in M$, $[t_{82}(t)^a, g]^c = t_{87}(2t) \in M$, $t_{87}(t)^a = t_{78}(t) \in M$,

$$[t_{82}(-t)^a, g^{-1}]^{ca} = t_{86}(2t)t_{16}(2t) \in M. \tag{9}$$

Далее из (7) и (9) получаем включение $t_{16}(t) \in M$. Отсюда $t_{16}(t)^{aca} = t_{54}(t) \in M$, $t_{54}(t)^c = t_{34}(t) \in M$, $t_{34}(t)^a = t_{43}(t) \in M$,

$$t_{43}(t)^c = t_{45}(t)[t_{86}(t), t_{65}(t)] \in M. \tag{10}$$

Наконец, из (5), (7) и (10) следует включение $t_{45}(t) \in M$.

Таким образом, мы установили, что

$$t_{i,i+1}(t), t_{i+1,i}(t) \in M, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Поэтому по лемме 2 получаем равенство $M = SL_8(q)$.

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook [e-resource]. No. 19. Novosibirsk. 2018. 250 p. URL: `http://math.nsc.ru/~alglog/19tkt.pdf\,`.
2. **Нужин Я.Н.** О порождающих множествах инволюций простых конечных групп // Алгебра и логика. 2019. Vol. 58, no. 3. P. 426–434.
3. **Di Martino L., Tamburini M.C.** 2-generation of finite simple groups and some related topics // Generatots and Ralations in Groups and Geometries / eds. A. Barlotti et al. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. P. 195–233. doi: 10.1007/978-94-011-3382-1_8 . (NATO ASI Ser.; vol. 333.)
4. **Ward J.M.** Generation of simple groups by conjugate involutions / Queen Mary college, University of London. Thesis of Doctor of Philosophi. 2009. 193 p.
5. **Левчук В.М.** Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика. 1983. Vol. 22, №4. P. 421–434.
6. **Левчук В.М.** О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. 1983. Vol. 22, № 5. P. 526–541.
7. **Нужин Я.Н.**, Порождающие множества элементов групп Шевалле над конечным полем // Алгебра и логика. 1989. Vol. 28, № 6. P. 670–686.
8. **Di Martino L., Vavilov N.** $(2,3)$-generation of $SL(n,q)$. I. Cases $n = 5, 6, 7$ // Comm. Algebra. 1994. Vol. 22. P. 1321–1347.
9. **Tabakov K., Tchakerian K.** $(2,3)$-generation of the groups $PSL_6(q)$ // Serdica Math. J. 2011. Vol. 37. P. 365–370.
10. **Pellegrini M.A.** The $(2,3)$-generation of the special linear groups over finite fields // Bull. Aust. Math. Soc. 2017. Vol. 95, no. 1. P. 48–53.

Поступила 6.08.2020
После доработки 20.09.2020
Принята к публикации 11.01.2021

Ефимов Иван Юрьевич
студент
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: va1319@yandex.ru

Нужин Яков Нифантьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

REFERENCES

1. *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook.* No. 19. Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2018, 250 p. Available on: `http://math.nsc.ru/~alglog/19tkt.pdf` .
2. Nuzhin Ya.N. Generating sets of involutions of finite simple groups. *Algebra Logika*, 2019, vol. 58, no. 3, pp. 426–434 (in Russian) . doi: 10.33048/alglog.2019.58.310 .
3. Di Martino L., Tamburini M.C. 2-generation of finite simple groups and some related topics. In: Barlotti A. et al. (eds), *Generators and relations in groups and geometries.* NATO ASI Series, vol. 333, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991, pp. 195–233. doi: 10.1007/978-94-011-3382-1_8 .
4. Ward J.M. *Generation of simple groups by conjugate involutions.* Queen Mary college, University of London, Thesis of Doctor of Philosophy, 2009, 193 p.
5. Levchuk V.M. A remark on a theorem of L. Dickson. *Algebra Logika*, 1983, vol. 22, no. 4, pp. 421–434 (in Russian).
6. Levchuk V.M. Generating sets of root elements of Chevalley groups over a field. *Algebra Logika*, 1983, vol. 22, no. 5, pp. 504–517 (in Russian).
7. Nuzhin J.N. Generating sets of elements of Chevalley groups over a finite field. *Algebra Logika*, 1989, vol. 28, no. 6, pp. 670–686 (in Russian).
8. Di Martino L. and Vavilov N. $(2,3)$-generation of $L(n,q)$. I. Cases $n = 5, 6, 7$. *Comm. Algebra*, 1994, vol. 22, no. 4, pp. 1321–1347. doi: 10.1080/00927879408824908 .
9. Tabakov K. and Tchakerian K. $(2,3)$-generation of the groups $PSL_6(q)$. *Serdica Math. J.*, 2011, vol. 37, no. 4, pp. 365–370.
10. Pellegrini M.A. The $(2,3)$-generation of the special linear groups over finite fields. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2017, vol. 95, no. 1, pp. 48–53. doi: 10.1017/s0004972716000617 .

Received August 6, 2020
Revised September 20, 2020
Accepted January 11, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center, which is financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the project for the establishment and development of regional centers for mathematical research and education (agreement no. 075-02-2020-1534/1), and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00566).

Ivan Yur'evich Efimov, undergraduate student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: va1319@yandex.ru .

Yakov Nifant'evich Nuzhin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: nuzhin2008@rambler.ru .

Cite this article as: I. Yu. Efimov, Ya. N. Nuzhin. Generating sets of conjugate involutions of the groups $SL_n(q)$ for $n = 4, 5, 7, 8$ and odd q, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 62–69 .