ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЧЕТЫРЬМЯ КЛАССАМИ СОПРЯЖЕННЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП. III[1]

В. А. Белоногов

Продолжается изучение конечных групп, имеющих точно четыре класса сопряженных максимальных подгрупп. Группы с этим свойством названы $4M$-группами. В первой части были описаны простые $4M$-группы и непростые неразрешимые $4M$-группы без нормальных подгрупп простого индекса (т. е. $4M$-группы, совпадающие со своим коммутантом). Во второй части начато исследование конечных неразрешимых $4M$-групп, имеющих нормальную максимальную подгруппу. При этом используются ранние результаты Г. Паздерского о строении конечных групп, имеющих точно два класса сопряженных максимальных подгрупп, и результаты автора о строении конечных групп, которые имеют точно три класса сопряженных максимальных подгрупп. Результаты первых двух частей напоминаются во введении в теоремах 1–3. В настоящей третьей части работы (см. теорему 4) получено полное описание конечных непростых почти простых $4M$-групп. Доказательства полученных результатов основываются на работах многих авторов, изучавших строение максимальных подгрупп различных классов конечных простых и почти простых групп.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, максимальная подгруппа, $4M$-группа.

V. A. Belonogov. Finite groups with four conjugacy classes of maximal subgroups. III.

We continue the study of finite groups with exactly four conjugacy classes of maximal subgroups. Groups with this property are called $4M$-groups. In the first part of this series of papers, we described simple $4M$-groups and nonsimple nonsolvable $4M$-groups without normal subgroups of prime index. In the second part, we started the investigation of finite nonsolvable $4M$-groups with a normal maximal subgroup using G. Pazderski's results on the structure of finite groups with exactly two conjugacy classes of maximal subgroups and the author's results on the structure of finite groups with exactly three conjugacy classes of maximal subgroups. The results of parts I and II are recalled in the introduction in Theorems 1–3. In the present third part, a complete description of finite nonsimple almost simple $4M$-groups is given (see Theorem 4). The proofs of the results are based on the works of many authors who studied the structure of maximal subgroups of finite simple and almost simple groups from various classes.

Keywords: finite group, almost simple group, maximal subgroup, $4M$-group.

MSC: 20D05, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-5-18

Введение

В предлагаемой статье продолжается изучение конечных групп, имеющих точно четыре класса сопряженных максимальных подгрупп, начатое в [1] и [2], с учетом результатов работы [3]. Список обозначений приводится в конце этого введения.

О п р е д е л е н и е 1. Группа, имеющая точно n классов сопряженных максимальных подгрупп (n — натуральное число), называется *nM-группой*.

Понятно, что конечные $1M$-группы — это примарные неединичные циклические группы, а конечные абелевы $2M$-группы — циклические бипримарные.

Конечные неабелевы $2M$-группы были описаны в 1964 г. Г. Паздерским в [4], и этот результат является, по-существу, первым шагом в изучении nM-групп. Данные группы бипримарны и являются полупрямыми произведениями нормальной и циклической силовских подгрупп.

Описание конечных $3M$-групп (разрешимых и неразрешимых) было получено автором в 1986 г. в работе [5], где, в частности, был доказан следующий результат.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00456).

Предложение 1 [5, теорема 1]. *Конечная неразрешимая группа G есть $3M$-группа, если и только если $G/\Phi(G)$ — простая группа, изоморфная $L_2(7)$ или $L_2(2^r)$, где r — простое число.*

Ввиду работ [4; 5] конечные nM-группы при $n \leq 3$ известны.

Сформулируем теперь результаты о $4M$-группах, доказанные в [1] и [2]. Теоремы этой серии работ имеют номера 1–3.

Теорема 1 [1, теорема 1]. *Конечная простая группа G является $4M$-группой, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

(1) $G \cong L_2(11)$;

(2) $G \cong L_2(p)$, *где p — простое число,* $p > 3$ *и* $p \equiv \pm 3, \pm 13 \pmod{40}$;

(3) $G \cong L_2(p^{r^m})$, *где p, r — простые числа,* $r > 2$ *при* $p > 2$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $pm > 2$;

(4) $G \cong L_3(3)$;

(5) $G \cong U_3(q)$, *где* $q = 3$ *или* $q = 2^{2^m}$, $m \in \mathbb{N}$;

(6) $G \cong Sz(2^r)$, *где r — простое число* $(r > 2)$.

Теорема 2 [1, теорема 2]. *Пусть G — конечная непростая группа без нормальных подгрупп простого индекса. Равносильны следующие утверждения:*

(1) G — $4M$*-группа и* $\Phi(G) = 1$;

(2) $G = P \leftthreetimes M$, *где P — минимальная нормальная p-подгруппа в G при некотором простом p,* $M_G = 1$ *и* $M/\Phi(M)$ *изоморфна* $L_2(7)$ *или* $L_2(2^r)$ *при некотором простом r.*

Теорема 3 [2, теорема 3]. *Пусть G — конечная неразрешимая группа, имеющая нормальную подгруппу простого индекса p. Предположим, что G есть $4M$-группа и $\Phi(G) = 1$. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $G = P \times L$, *где* $|P| = p$ *и L изоморфна* $L_2(7)$ *или* $L_2(2^r)$, *где r — простое число*;

(2) *группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу S, причем* $S = L_1 \times \cdots \times L_t$, *где* $L_1, \ldots, L_t$ *— изоморфные простые неабелевы группы, t делит $|G/S|$ и G/S есть разрешимая группа не более чем с двумя классами сопряженных максимальных подгрупп.*

В настоящей работе исследуется строение таких групп G в случае, когда $t = 1$, т. е. когда *группа G непростая и имеет простой цоколь S.*

Предварительно введем следующее определение.

Определение 2. Пусть $S = L_2(q)$, где $q = p^{2k}$, $p > 2$ — простое число и $k \in \mathbb{N}$. Хорошо известно (см., например, лемму 4.1 ниже), что $\mathrm{Out}(S) = \langle\delta\rangle \times \langle\varphi\rangle$, где δ и φ — образы в $\mathrm{Out}(S)$ диагонального и полевого автоморфизмов группы S. Положим

$$PGL_2^-(q) := S.\langle\delta\varphi^k\rangle \quad (\delta\varphi^k \text{ — инволюция}).$$

Заметим, что $PGL_2(q) = S.\langle\delta\rangle$, $P\Gamma L_2(q) = PGL_2(q).\langle\varphi\rangle$ и $P\Sigma L_2(q) = S.\langle\varphi\rangle$ при любом q.

Главным результатом статьи является теорема 4 (продолжаем нумерацию теорем, начатую в статьях этой серии).

Теорема 4. *Пусть G — конечная непростая почти простая группа с простым цоколем S. Тогда группа G является $4M$-группой, если и только если $S \cong L_2(q)$, где $q = p^f$, p — простое число, $f \in \mathbb{N}$, и выполнено одно из условий*

(1) $q = 2^r$, *где r — простое нечетное число и* $G \cong P\Sigma L_2(q)$;

(2) $q = p^{2^m}$, *где* $p > 2$, $m \in \mathbb{N}$, *и G изоморфна* $PGL_2(q)$ *или* $PGL_2^-(q)$;

(3) $q = p$, *где* $p = 5$ *или* $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, *и* $G \cong PGL_2(q)$.

Как видим, условие (1) задает бесконечную серию конечных непростых почти простых $4M$-групп при четном q, условие (2) задает две бесконечные серии таких групп при каждом простом $p > 2$, а условие (3) — одну бесконечную серию таких групп при заданных простых q. Условие $G \cong PGL_2(q)$ в п. (3) теоремы 4 непосредственно следует из равенства $q = p$, так как по условию теоремы $G \leq \mathrm{Aut}(S) \cong S.\mathrm{Out}(S) = S.\langle\delta\rangle$.

Для завершения описания $4M$-групп предстоит еще (в следующих работах) исследовать
1) конечные $4M$-группы с непростым цоколем (группы п. (2) теоремы 3 при $t \geq 2$),
2) конечные разрешимые $4M$-группы.

Краткое сообщение о некоторых результатах настоящей статьи сделано в [6].

Используемые в статье обозначения в основном стандартные (см., например, [7–10]). Через $\mathbb{N}$ обозначено множество всех натуральных чисел. Если $m, n \in \mathbb{N}$, то запись $m \mid n$ означает, что m делит n. Через C_n, E_n и D_n обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка n; при этом условимся, что $D_2 := C_2$ и $D_4 := E_4$ (знак ":=" означает "по определению равно"). Используются также записи $A \cong B$ (A изоморфно B) и $A \lesssim B$ (A изоморфно подгруппе из B). Рассматриваются только конечные группы.

Если H — подгруппа группы G, то $\{H\}^G := \{H^g | g \in G\}$ есть класс сопряженных подгрупп группы G, содержащий подгруппу H, и H_G — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с H в G (*ядро H в G*). Если $S \lhd G$ (S — собственная нормальная подгруппа группы G) и $H < S$, то класс подгрупп $\{H\}^S$ группы S называется *G-инвариантным*, если $\{H\}^S = \{H\}^G$. Подгруппа группы G, порожденная ее подмножеством M, обозначается через $\langle M\rangle$.

Запись $H \lessdot G$ означает, что H есть *максимальная подгруппа* в G; $m(G)$ обозначает число классов сопряженных максимальных подгрупп группы G. Классы сопряженных (максимальных) подгрупп группы G мы будем называть иногда просто *классами* (*максимальных*) *подгрупп группы G*; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

Используются также следующие обозначения из Атласа конечных групп [7, с. XX]. Запись $G = A.B$ означает, что группа G имеет нормальную подгруппу, изоморфную A, фактор-группа по которой изоморфна B (т. е. G есть расширение подгруппы A с помощью группы B). В случае расщепляемого расширения подгруппы A с помощью подгруппы B вместо точки может быть использован знак $\leftthreetimes$ (в частности, в настоящей статье) или знак ":" (например, в [7]). Запись $G = A \leftthreetimes B$ равносильна записи $G = B \rightthreetimes A$; каждую из них можно прочитать как "*G есть полупрямое произведение A на B*".

1. Первые примеры непростых почти простых $4M$-групп

Первые примеры непростых почти простых $4M$-групп приведены автором в тезисах [3]. Отметим некоторые из них и приведем необходимые доказательства.

Лемма 1.1 [3, предложение 1]. *Пусть G — непростая почти простая $4M$-группа с цоколем S. Тогда*
(1) *S не является спорадической простой группой*;
(2) *если $S \cong A_n$ с $n \in \mathbb{N}$, то G/S — примарная циклическая группа, и тогда либо*
(2.1) *$n = 5$ и $G \cong S_5$ (это равносильно п.* (1) *леммы* 2.5 *ниже*), *либо*
(2.2) *$n = 6$, $\mathrm{Inn}(A_6) < G < \mathrm{Aut}(A_6)$ и $G \not\cong S_6$ (существуют точно две такие подгруппы G в $\mathrm{Aut}(A_6)$; п.* (2.2) *равносилен объединению пп.* (4) *и* (5) *леммы* 1.3 *ниже*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1): Если S — спорадическая простая группа, то согласно Атласу конечных групп (см. [7, с. viii]) $G \cong \mathrm{Aut}(S) = S.C_2$ и число классов максимальных подгрупп в такой G для любой спорадической простой группы S более четырех.

(2): Пусть $S \cong A_n$ ($n \geq 5$). Тогда согласно [10, теорема 2.3] и [7]
либо $n \neq 6$ и $\mathrm{Aut}(A_n) \cong S_n$,
либо $n = 6$, $\mathrm{Aut}(A_6) \cong P\Gamma L_2(9)$ и $\mathrm{Aut}(A_6)/\mathrm{Inn}(A_6) \cong E_4$.
В любом случае должно быть $G = S.C_2$.

Пусть $n \neq 6$. Тогда число классов максимальных подгрупп в G равно четырем при $n = 5$ и больше четырех при $n > 6$, что следует из [7] при $n \leq 13$ и п. (I) основной теоремы в [11] (при $n \geq 13$ достаточно подсчитать лишь максимальные подгруппы вида $S_m \times S_k$, где $n = m + k$ с $m \neq k$). Следовательно, в этом случае G есть $4M$-группа, если и только если $n = 5$.

При $n = 6$ утверждение леммы непосредственно следует из [7, p. 4].

Лемма 1.1 доказана.

Из теоремы 1 и леммы 1.1 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 1.2. *Цоколь конечной почти простой $4M$-группы G является группой лиева типа.*

Естественно начать изучение конечных непростых почти простых $4M$-групп с “маленьких” групп. Обратимся к Атласу конечных групп [7], в котором для 93 конечных простых групп S выписаны списки их максимальных подгрупп и также списки максимальных подгрупп всех подгрупп вида $\mathrm{Inn}(S).X$ из $\mathrm{Aut}(S)$. При этом группа $\mathrm{Inn}(S).X$ отождествляется там с $S.X$, и из этих групп $G = S.X$ легко выбрать все возможные $4M$-группы. Таким образом, получаем 11 непростых почти простых 4M-групп небольшого порядка для первого знакомства (см. лемму 1.3) и можем уже использовать их для формирования и проверки некоторых гипотез (например, о строении максимальных подгрупп).

Попутно укажем в этих группах $G = S.X$ (S — цоколь группы G) так называемые *новинки — novelty* (см. [12, p. 10]); это максимальные подгруппы M из G такие, что $M = N_G(M \cap S)$, но $M \cap S$ не является максимальной подгруппой в S (если $M \lessdot G$ — не новинка, то $M \cap S \lessdot S$).

Лемма 1.3. *Пусть G — непростая почти простая $4M$-группа с цоколем S. Предположим, что S есть произвольная конкретная простая группа, рассматриваемая в Атласе конечных групп* [7]. *Тогда верно одно из следующих утверждений* (*группа G — зана с точностью до изоморфизма, в скобках записаны типы ее максимальных подгрупп*):

(1) $G = PGL_2(5) = S.C_2,\ S = L_2(5)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ C_5 \leftthreetimes C_4,\ S_4,\ C_2 \times S_3$);

(2) $G = PGL_2(7) = S.C_2,\ S = L_2(7)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ C_7 \leftthreetimes C_6,\ D_{12}$ (*novelty*), D_{16} (*novelty*));

(3) $G = P\Sigma L_2(8) = S.C_3,\ S = L_2(8)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ E_8 \leftthreetimes C_7 \leftthreetimes C_3,\ C_9 \leftthreetimes C_6,\ C_7 \leftthreetimes C_6$);

(4) $G = PGL_2(9) = S.C_2,\ S = L_2(9)$ ($\cong U_2(9) \cong A_6$)
(*максимальные подгруппы*: $S,\ E_9 \leftthreetimes C_8,\ D_{20}$ (*novelty*), D_{16} (*novelty*)):

(5) $G = PGL_2^-(9) = M_{10} = S.C_2,\ S = L_2(9)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ E_9 \leftthreetimes Q_8,\ C_5 \leftthreetimes C_4$ (*novelty*), $C_8 \leftthreetimes C_2$) (*novelty*);

(6) $G = PGL_2(17) = S.C_2,\ S = L_2(17)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ C_{17} \leftthreetimes C_{16},\ D_{36},\ D_{32}$);

(7) $G = PGL_2(23) = S.C_2,\ S = L_2(23)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ C_{23} \leftthreetimes C_{22},\ D_{48},\ D_{44}$);

(8) $G = PGL_2(25) = S.C_2,\ S = L_2(25)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ E_{25} \leftthreetimes C_{24},\ D_{52},\ D_{48}$);

(9) $G = PGL_2^-(25) = S.C_2,\ S = L_2(25)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ E_{25} \leftthreetimes Z_{12} \leftthreetimes C_2,\ C_{13} \leftthreetimes C_4,\ Q_8 \times S_3$);

(10) $G = PGL_2(31) = S.C_2,\ S = L_2(31)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ C_{31} \leftthreetimes C_{30},\ D_{64},\ D_{60}$);

(11) $G = P\Sigma L_2(32) = S.C_5,\ S = L_2(32)$
(*максимальные подгруппы*: $S,\ E_{32} \leftthreetimes C_{31} \leftthreetimes C_5,\ C_{33} \leftthreetimes C_{10},\ C_{31} \leftthreetimes C_{10}$).

Далее находим очень естественную по своему построению *бесконечную серию почти простых* $4M$*-групп* G, цоколи которых S суть простые $3M$-группы; в этом случае согласно предложению 1 S изоморфна $L_2(2^r)$ при некотором простом r или $L_2(7)$ (но группа $L_2(7)$ в серии не участвует).

Лемма 1.4. *При любом простом числе* r *равносильны условия*
(1) G *— непростая почти простая* $4M$*-группа с цоколем* $S \cong L_2(2^r)$;
(2) $G \cong \mathrm{Aut}(S) \cong P\Sigma L_2(2^r) = S.C_r$ *(максимальные подгруппы группы* G *имеют типы:* S, $(E_{2^r} \leftthreetimes C_{2^r-1}) \leftthreetimes C_r$, $C_{2^r+1} \leftthreetimes C_{2r}$, $(C_{2^r-1} \leftthreetimes C_2) \leftthreetimes C_r$ *).*

Слово "непростая" в п. (1) леммы 1.4 может быть опущено ввиду предложения 1.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие (1). Тогда согласно [10, теорема 3.2(ii), с. 50] $\mathrm{Out}(L_2(p^f)) \cong C_{(2,p-1)} \times C_f$, так что в нашем случае $\mathrm{Out}(S) \cong C_r$ и $\mathrm{Aut}(S) \cong S.C_r$ с $S \cong L_2(2^r)$, а поскольку по [5] S имеет точно 3 класса максимальных подгрупп с представителями $H_1 = C_{2^r} \leftthreetimes C_{2^r-1}$ (группа Фробениуса), $H_2 = C_{2^r+1} \leftthreetimes C_2 \cong D_{2(2^r+1)}$, $H_3 = C_{2^r-1} \leftthreetimes C_2 \cong D_{2(2^r-1)}$, то эти классы G-инвариантны, и, следовательно, G имеет максимальные подгруппы типов $M_i = H_i.C_r$ (3 класса). Если G имеет еще максимальную подгруппу M, не сопряженную с этими $M_i = H_i.C_r$ и отличную от S, то она должна иметь вид $M = S_0.C_r$, где $S_0 = S \cap M < S$. Но тогда с точностью до сопряженности $S_0 \le H_i$ для некоторого $i \le 3$ и, значит, $M = S_0.C_r \le H_i.C_r = M_i$, что противоречиво. Отсюда следует условие (2).

Из условия (2), очевидно, следует (1).

Лемма 1.4 доказана.

Непростая почти простая $4M$-группа G с цоколем S, изоморфным $3M$-группе $L_2(7)$ (упомянутым перед леммой 1.4), согласно [7] изоморфна $4M$-группе $PGL_2(7)$. Отсюда и из леммы 1.4 выводим

Следствие 1. *Пусть* G *— непростая почти простая группа, цоколь которой является* $3M$*-группой. Тогда* G *является* $4M$*-группой.*

Отметим еще, что лемма 1.4 подтверждает реальность (выполнимость) утверждения (1) основной теоремы 4, и, очевидно, верно следующее предложение.

Предложение 2. *Утверждение теоремы* 4 *справедливо, если* $q \le 31$ *или* $q = 2^r$*, где* r *— простое число.*

2. Некоторые предварительные результаты

Согласно классификации конечных простых групп (см. [9]) каждая конечная простая неабелева группа S является знакопеременной, спорадической группой или группой лиева типа.

Задача: для каждой конечной простой неабелевой группы S выяснить, существуют ли непростые почти простые $4M$-группы с цоколем S. Если "да", то указать их.

Некоторые простые примеры таких групп указаны в разд. 1. Здесь же мы приведем ряд предварительных результатов общего характера, которые, в частности, будут использованы и в других работах рассматриваемой серии. Вычисления, связанные с конкретными сериями конечных почти простых групп, приведены в разд. 3 и 4.

Лемма 2.1. *Конечная неразрешимая* $4M$*-группа имеет не более одной нормальной максимальной подгруппы.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 2 работы [5], по которой конечная группа, имеющая не более двух классов сопряженных ненормальных максимальных подгрупп, разрешима.

Лемма 2.2. *Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условию* (2) *теоремы* 3. *Тогда*

(1) *G изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(S)$ и G/S изоморфна подгруппе из $\mathrm{Out}(S)$;*

(2) *G/S есть либо примарная циклическая группа, либо неабелева бипримарная $2M$-группа.*

Доказательство. Утверждение (1) есть [2, лемма 1]. Утверждение (2) непосредственно вытекает из теоремы 3 и леммы 2.1.

Лемма 2.2 доказана.

Отметим, что в леммах 2.3–2.6 на G и S накладываются гораздо более слабые ограничения, а именно лишь одно условие $S \lhd G$.

По аналогии с [13, Satz 7.8] (где подобное свойство силовской подгруппы названо "аргументом Фраттини") следующий факт можно назвать "*обобщенным аргументом Фраттини*".

Лемма 2.3. *Пусть $S \lhd G$ и H — ненормальная подгруппа из S такая, что $\{H\}^S = \{H\}^G$ (т. е. класс $\{H\}^S$ G-инвариантен). Тогда $G = N_G(H)S$ и, следовательно, существует $M \lessdot G$ такая, что $M = N_G(H)S_0$, где $S_0 = M \cap S < S$ (и $H \le S_0 \lhd M$).*

Доказательство. По условию для любого $g \in G \setminus S$ существует элемент $s = s_g \in S$ такой, что $H^g = H^s$ и, значит, $gs^{-1} \in N_G(H)$ и $g \in N_G(H)s \subseteq N_G(H)S$. Таким образом, $G = N_G(H)S$. При этом $N_G(H) \not\supseteq S$, так как H не нормальна в S. Поэтому существует некоторая максимальная подгруппа $M = M(H)$ группы G, содержащая $N_G(H)$, и понятно, что $M = N_G(H)S_0$, где $S_0 = S \cap M \lhd M$ (в частности, $H \le S_0$).

Лемма 2.3 доказана.

Таким образом, в ситуации, когда $S \lhd G$, каждому G-инвариантному классу $\{H\}^S$ ненормальных подгрупп из S соответствует *класс сопряженных максимальных подгрупп $\{M(H)\}^G$ группы G, не содержащих S*. Более того, справедлива лемма.

Лемма 2.4. *Пусть $S \lhd G$ и H — ненормальная* ***максимальная*** *подгруппа из S такая, что $\{H\}^S = \{H\}^G$. Тогда $N_G(H) \lessdot G$ (и $N_G(H) \not\geq S$).*

Доказательство. При выполнении условия этого утверждения по лемме 2.3 в G существует максимальная подгруппа $M = N_G(H)S_0$ с $H \le S_0 = M \cap S < S$. Но так как $H \lessdot S$, то должно быть $S_0 = H$ и, следовательно, $M = N_G(H)H = N_G(H)$.

Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. *Пусть $S \lhd G$ и H_1, H_2 — ненормальные подгруппы из S такие, что классы $\{H_1\}^S$ и $\{H_2\}^S$ различны и G-инвариантны. Предположим, что*

(∗) *$H_1 \lessdot S$, H_2 не сопряжена в G с подгруппами из H_1 (например, $H_1 \ne H_2 \lessdot S$).*

Тогда любые две максимальные подгруппы M_1 и M_2 группы G, содержащие соответственно $N_G(H_1)$ и $N_G(H_2)$, не сопряжены в G.

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы 2.5. Тогда по лемме 2.3 $M_i = N_G(H_i)S_i$, где $H_i \le S_i < S$ и $S_i = S \cap M_i \lhd M_i$ при $i \in \{1, 2\}$.

Если предположить, что M_1 и M_2 сопряжены в G, т. е. $M_1 = M_2^g$, где $g \in G$, то по условию леммы будет $H_1 \not\geq H_2^g$, откуда $M_1 = M_2^g \geq \langle H_1, H_2^g \rangle \geq S$ (так как по условию $H_1 \lessdot S$ и $H_2^g \not\leq H_1$), что противоречиво.

Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. *Пусть $S \lhd G$. Предположим, что среди классов сопряженных ненормальных* ***максимальных*** *подгрупп группы S имеются n G-инвариантных классов с представителями $H_1, \ldots, H_n$. Тогда группа G имеет n классов сопряженных максимальных подгрупп, не содержащих S, с представителями $N_G(H_1), \ldots, N_G(H_n)$. В частности, $m(G) \ge n + 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно леммам 2.4, 2.5 для любых двух подгрупп H_i и H_j, входящих в различные G-инвариантные классы ненормальных максимальных подгрупп группы S, содержащие их максимальные подгруппы $M(H_i) = N_G(H_i)$ и $M(H_j) = N_G(H_j)$ группы G входят в различные классы сопряженных максимальных подгрупп группы G и не содержат S. Следовательно, число таких классов равно n. Кроме того, G имеет еще некоторое число $m \geq 1$ классов максимальных подгрупп, содержащих S. Таким образом, число всех классов максимальных подгрупп группы G равно $n + m \geq n + 1$.

Лемма 2.6 доказана.

В частности, если S имеет по крайней мере четыре G-инвариантных класса максимальных подгрупп, то G не является $4M$-группой.

Далее будут использоваться таблицы из книги [12], и в частности табл. 8.1 и 8.2, расширяющие на случай полупростых групп так называемую *теорему Диксона*, в которой дано описание подгруппового строения групп $L_2(q) := PSL_2(q)$, приведенное Леонардом Диксоном в гл. XII его книги (см. [14]). Сейчас же будет использоваться следующая таблица максимальных подгрупп группы $PGL_2(q)$, также вытекающая из [14, гл. XII]; см., например, [15, следствие 2.3] (здесь, по-видимому случайно, в типе (v) пропущено условие нечетности r). Поскольку $PGL_2(q) = L_2(q)$ при четных q, то можно предположить, что q нечетно (при $q = 5$ см. лемму 1.3).

Лемма 2.7. *Пусть $G = PGL_2(q)$, где $q = p^a$ — степень нечетного простого числа p, $a \in \mathbb{N}$ и $q > 5$. Тогда $|G \colon L_2(q)| = 2$ и G имеет лишь следующие максимальные подгруппы:*

(1) $L_2(q)$ *(всегда существует, 1 класс)*;
(2) $E_q \rtimes C_{(q-1)}$ *(всегда существует, 1 класс)*;
(3) $D_{2(q-1)}$ *($q > 5$, 1 класс)*;
(4) $D_{2(q+1)}$ *(всегда существует, 1 класс)*;
(5) $PGL_2(q_0)$ *($q = q_0^r$, $q_0|q$, r — простое нечетное, 1 класс при каждом r)*;
(6) S_4 *($q = p \equiv \pm 3 \pmod 8$, 1 класс)*.

Отсюда непосредственно вытекает лемма.

Лемма 2.8. *Пусть $G = PGL_2(q)$, где q — степень нечетного простого числа p и $q > 5$. Тогда*

(1) $m(G) \geq 4$;
(2) *если $q = p$, то $m(G) = 4$ при $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ и $m(G) = 5$ при $p \equiv \pm 3 \pmod 8$*;
(3) *если $q = p^a$, где $a > 1$, то $m(G) = 4 + k$, где k — число различных нечетных простых делителей числа a*;
(4) $m(G) = 4 \Leftrightarrow q = p^{2^m}$, $m \in \mathbb{N}$ *или* $q = p \equiv \pm 1 \pmod 8$.

Обратимся теперь к группе $G = PGL_2^-(q)$ (здесь по определению $q = p^{2k}$). Известно определение группы $M(s,q) := L_2(q)\langle \delta\phi^s \rangle$, где $q = p^{2k}$, $p > 2$ и $s|k$. Таким образом, $G = PGL_2^-(q) = M(k,q)$ при $q = p^{2k}$, и согласно [16, Theorem 1.5] она имеет подгруппы пяти типов, подобных типам (1)–(5) леммы 2.7; однако тип (5) не реализуется, так как $q = p^{2^m}$. Таким образом, G есть $4M$-группа, и верна следующая лемма.

Лемма 2.9. *Группа $G = PGL_2^-(q)$ в теореме 4 (т. е. при $q = p^{2^m}$) является $4M$-группой.*

Из лемм 2.7–2.9 непосредственно вытекает предложение.

Предложение 3. *Обратное утверждение теоремы 4 справедливо, а именно, если $S \cong L_2(q)$, то при выполнении любого из условий (1)–(3) группа G является $4M$-группой (в частности, теорема 4 справедлива при $q = p$).*

3. О почти простых $4M$-группах с цоколем, отличным от $L_n(q)$

Предложение 4. *Пусть G — конечная непростая почти простая группа с простым цоколем $S \not\cong L_n(q)$ при любых n и q. Тогда $m(G) > 4$, т. е. G не является $4M$-группой.*

Доказательство предложения существенно опирается на результаты работ [12][2] (при $n \le 12$), [17] (при $n \ge 13$) и [18]. В таблицах из [12; 17] вместо простых групп фигурируют обычно их накрывающие группы ($SL_n(q)$, $SU_n(q), \ldots$ вместо $L_n(q)$, $U_n(q), \ldots$), и искомая информация о простых группах читается по модулю скаляров (вместо S там употребляется знак $\bar{\Omega}$, а ее накрывающая группа есть Ω). При этом $G = \bar{\Omega}.T$, где $T \le \mathrm{Out}(\bar{\Omega})$.

Во втором столбце таблицы из [12] записаны некоторые подгруппы H_i из Ω, H_i лежит в i-й строке. Пусть $\bar{H}_i$ — образ H_i в $\bar{\Omega}$, при этом $H_i \lessdot \Omega \Leftrightarrow H_i$ не имеют метки вида Nk, где $k \in \mathbb{N}$.

Информация о конкретной H_i записана в той же строке на пересечении со столбцами "C_i", "$Notes$", "c" и "$Stab$". Число c (в четвертом столбце) обозначает число классов сопряженных Ω-подгрупп в классе $\{H_i\}^A$. Очень важно отметить, что

$c = 1 \Leftrightarrow \{H_i\}^A = \{H_i\}^\Omega$, и тогда $\{\bar{H}_i\}^G = \{\bar{H}_i\}^S$, т. е. *класс $\{\bar{H}_i\}^S$ G-инвариантен.*

Определение 3. Пусть G и S — из предложения 4, и пусть $i_G(S)$ означает число G-инвариантных классов максимальных подгрупп группы S.

Согласно лемме 2.6 $m(G) \ge i_G(S) + 1$ и, в частности, если $i_G(S) \ge 4$, то $m(G) > 4$.

Доказательство предложения 4 проводится в несколько шагов A1–A9. Как отмечено выше, достаточно показать, что $i_G(S) \ge 4$.

A1. *Если S изоморфна одной из групп $G_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ ($q = 3^{2m+1} > 3$), ${}^3D_4(q)$, $Sz(q)$ ($q = 2^{2m+1} > 2$),* то утверждение $i_G(S) \ge 4$ непосредственно видно из табл. 8.16 (для $S = Sz(q)$), табл. 8.30 ($S = G_2(2^m)$), табл. 8.41 ($S = G_2(p^m)$ при $p \ge 5$), табл. 8.42 ($S = G_2(3^m)$), табл. 8.43 ($S = {}^2G_2(3^m)$ с нечетным $m > 1$ (группа ${}^2G_2(3) \cong L_2(8) \rtimes Z_3$ непроста)) и табл. 8.51 (для $S = {}^3D_4(p^m)$) в [12].

A2. *Пусть S изоморфна $F_4(q)$, ${}^2F_4(q)$ ($q = 2^{2n+1} \ge 2$) или ${}^2F_2(2)'$.* Группа $S \cong F_4(q)$ по [18, теоремы 8.2.1, 8.2.2, 8.3.4] имеет 4 класса параболических максимальных подгрупп: либо они G-инвариантны, и тогда $i_G(S) \ge 4$, либо G содержит графовый автоморфизм γ (порядок γ равен 2) и γ "склеивает" эти классы S попарно в два класса максимальных подгрупп группы G. Однако по [19, Table 5.1] G имеет еще максимальные подгруппы M_1 и M_2 с $M_1 \cap S \cong E_{d^2}.P\Omega_8^+(q).S_3$ ($d \in \mathbb{N}$) и $M_2 \cap S \cong {}^3D_4(q).C_3$. Таким образом, $m(G) > 4$.

Далее, при $S \cong {}^2F_4(q)$ с $q = 2^{2n+1} \ge 2$ результат следует из [20], а при $S \cong {}^2F_2(2)'$ — из [7].

A3. *Пусть S есть $E_6(q)$ или ${}^2E_6(q)$.* Группа $S \cong E_6(q)$ по [18, теоремы 8.2.1, 8.2.2, 8.3.4] имеет 6 классов параболических максимальных подгрупп, а по [18, с. 222, 13.3.3, +] S имеет графовый автоморфизм γ порядка 2, который оставляет на месте два таких класса и "склеивает" попарно остальные 4 класса в $\mathrm{Aut}(S)$. Итак, при $\gamma \in G$ и $\gamma \notin G$ $m(G) > 4$.

Если $S \cong {}^2E_6(q)$, то кроме параболических группа G имеет согласно [19, Table 5.1] максимальные подгруппы M_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) такие, что $M_1 \cap S \cong C_d.(L_2(q) \times U_6(q)).C_{de}$, $M_2 \cap S \cong C_e.(U_3(q))^3.E_{e^2}.S_3$, $M_3 \cap S \cong U_3(q^3).(C_e \times C_3)$ ($d, e \in \mathbb{N}$) и, следовательно, $m(G) > 4$.

A4. *Пусть $S \cong E_n(q)$ при $n \in \{7, 8\}$.* Согласно [18, теоремы 8.2.1, 8.2.2, 8.3.4] группа S имеет n классов сопряженных параболических максимальных подгрупп. Эти классы G-инвариантны, так как S не имеет графовых автоморфизмов по [18, p. 200]). Следовательно, $i_G(S) \ge 4$.

A5. *Пусть G и S — из предложения* 4, *причем S — классическая простая группа степени n, отличная от $L_n(q)$. Тогда $n \le 12$.*

[2] Необходимо отметить некорректность названия таблиц в [12], вводящая читателя в заблуждение, поскольку в приводимых в них списках подгрупп группы Ω (колонка "Subgp") присутствуют также и немаксимальные подгруппы из Ω (а именно, подгруппы, "индуцирующие" некоторые "novel" максимальные подгруппы определенных подгрупп из $\mathrm{Aut}(\Omega)$; см. [12, начало с. 374]).

Действительно, при $n \geq 13$ согласно табл. 3.5B–3.5F из [17] подгруппа S имеет $m \geq 4$ G-инвариантных (так как здесь $c = 1$) классов максимальных подгрупп типа P_i с $i \leq m$ (из класса C_1), и, следовательно, $i_G(S) \geq n/2 \geq 4$.

A6. *Пусть* $S \cong U_n(q)$. Согласно A5 мы используем [12]. В табл. 8.5 для $U_3(q)$ выбираем подгруппы в строках 1–4 (при $q \in \{3, 5\}$ см. Атлас [7]). Другие таблицы групп $SU_n(q)$ в [12] (табл. $8.10, 8.20, 8.26, 8.37, 8.46, 8.56, 8.62, 8.72, 8.78$) определенно подтверждают условие $i_G(S) \geq 4$.

A7. *Пусть* $S \cong Sp_n(q)$. Условие $i_G(S) \geq 4$ видно из [12] (пусть $G = S.T$): см. табл. 8.12 (строки 1, 2, 3, 5), табл. 8.14 (строки 1, 2, 4, 5 при $T \leq \langle\varphi\rangle$ и строки 3, 6, 7, 8 при $T \not\leq \langle\varphi\rangle$), табл. 8.28 (строки 3, 4, 5, 8), табл. 8.48 (строки 3–6), табл. 8.64 (строки 3–6), табл. 8.80 (строки 3–6).

A8. *Пусть* $S \cong \Omega_n(q)$, *где* nq *нечетно,* $n \geq 5$. По [12] утверждение $i_G(S) \geq 4$ видно из изоморфизма $\Omega_5(q) \cong S_4(q)$ и табл. 8.39 (для $\Omega_7(q)$), табл. 8.58 (для $\Omega_9(q)$), табл. 8.74 (для $\Omega_{11}(q)$).

A9. *Пусть* $S \cong \Omega^+_{2n}(q)$ $(n \geq 3)$. Условие $i_G(S) \geq 4$ видно из таблиц [12]: табл. 8.50 (для $\Omega^+_8(q)$, строки 3, 4, 17, 26, 30), табл. 8.66 (для $\Omega^+_{10}(q)$, строки 1, 2, 3, 8, 10, 11), табл. 8.82 (для $\Omega^+_{12}(q)$, строки 1–4) (при $2n = 8$: $\tau \notin G$).

A10. *Пусть* $S \cong \Omega^-_{2n}(q)\,(n \geq 2)$. Условие $i_G(S) \geq 4$ видно из [12, табл. $8.33, 8.52, 8.68, 8.82$].

Из шагов A1–A10 вытекает сформулированное выше предложение 4.

4. О почти простой $4M$-группе с цоколем $L_n(q)$ при $n > 2$

Примем обозначения из [12], как в разд. 3. По [12, разд. 1.7.2] справедлива

Лемма 4.1. *Пусть* $S \cong L_n(q)$, *где* $q = p^f$, p — *простое число,* $f \in \mathbb{N}$, *и пусть* $(n, q) \notin \{(2,2), (2,3), (2,4)\}$. *Тогда*

(1) $\mathrm{Aut}(S) \cong P\Gamma L_n(q) = \langle L_n(q), \tilde{\delta}, \tilde{\phi}, \tilde{\gamma}\rangle$, *где* $n \geq 2$, $\tilde{\delta}$, $\tilde{\varphi}$ *и* $\tilde{\gamma}$ — *диагональный, полевой и графовый автоморфизмы группы* S *соответственно*;

(2) $\mathrm{Out}(S)$ *порождается образами* δ, γ, ϕ *в* $\mathrm{Out}(S)$ *автоморфизмов* $\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\phi}$, *а именно,*

(2a) *при* $n = 2$ — $\mathrm{Out}(S) = \langle\delta\rangle \times \langle\phi\rangle \cong C_{(q-1,2)} \times C_f = \begin{cases} C_f \text{ при четном } q, \\ C_2 \times C_f \text{ при нечетном } q; \end{cases}$

(2b) *при* $n \geq 3$ — $\mathrm{Out}(S) = (\langle\delta\rangle \leftthreetimes \langle\gamma\rangle) \leftthreetimes \langle\phi\rangle$, *где* $\langle\delta\rangle \cong C_{(n+1,q-1)}$, $\langle\gamma\rangle \cong C_2$, $\delta^\gamma = \delta^{-1}$, $\langle\phi\rangle \cong C_f$, $\delta^\phi = \delta^p$ *и* $\gamma\phi = \phi\gamma$;

(3) *если* G — *конечная почти простая группа с цоколем* $S \cong L_n(q)$, *то* $G \lesssim \mathrm{Aut}(S)$ *и* $G = S.T$, *где* $T \leq \mathrm{Out}(S)$.

Лемма 4.2. *Пусть* G — *конечная непростая почти простая группа с цоколем* $S \cong L_n(q)$. *Тогда в каждом из следующих случаев группа* G *не является* $4M$*-группой*:

(1) $n = 3$ *и* $q > 2$ (*при* $q = 2$ $L_3(2) \cong L_2(7)$, *и* $G \cong PGL_2(7)$ *есть* $4M$*-группа*);

(2) $n \in \{5, 7, 9, 11\}$.

Доказательство. (1): По табл. 8.3 из [12] в группе $G = S.T \leq \mathrm{Aut}(S)$, где $S \cong L_3(q)$, находим четыре класса максимальных подгрупп, не содержащих S. А именно при $T \leq \langle\delta, \varphi\rangle$ (здесь $\gamma \notin G$) это — нормализаторы в G подгрупп, изоморфных H_1 (два класса в 1-й строке таблицы), и еще два класса с представителями $N_G(H_4)$ при $q \geq 5$ и $N_G(H_5)$ при $q \neq 4$; а эти ограничения на q снимаются обращением к Атласу [7]. Если же $T \not\leq \langle\delta, \varphi\rangle$, то по лемме 2.3 группа G содержит два класса максимальных подгрупп с представителями $N_G(H_2)$ и $N_G(H_3)$ и (снова) два класса с представителями $N_G(H_4)$ и $N_G(H_5)$. Итак, здесь $m(G) > 4$.

(2): Пусть $n = 5$. Рассмотрим табл. 8.18 для групп $G = S.T \leq \mathrm{Aut}(S)$ при $S \cong SL_5(q)$ в [12]. Здесь также при любом T группа G имеет четыре класса максимальных подгрупп, не содержащих S. А именно при $T \leq \langle\delta, \varphi\rangle$ $(\gamma \notin G)$ это — нормализаторы в G подгрупп, изоморфных H_1 и H_2 (четыре класса в 1-й и 2-й строках), а при $T \not\leq \langle\delta,\varphi\rangle$ — четыре класса с представителями $N_G(H_i)$ при $3 \leq i \leq 6$. Таким образом, группа G не является $4M$-группой.

При $n \in \{7,9,11\}$ используем табл. 8.35, 8.54, 8.70 в [12] и подобно предыдущим пунктам при любом T находим в $G = S.T$ четыре класса максимальных подгрупп, не содержащих S. Таким образом, G не является $4M$-группой.

Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Пусть G — конечная непростая почти простая группа с цоколем $S \cong L_n(q)$. Тогда при любом $n \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ группа G не является $4M$-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжим использовать таблицы книги [12] для групп $S = L_n(q)$ и $G = S.T \lesssim \mathrm{Aut}(S)$, где $1 < T \leq \mathrm{Out}(S) = \langle\delta,\varphi,\gamma\rangle$, как в лемме 4.1.

При $n = 4$ обратимся к табл. 8.8 для $S \cong L_4(q)$. Поскольку группа G с цоколем $S \cong L_4(2)$ ($\cong A_8$) или с $S \cong L_4(3)$ не является $4M$-группой согласно Атласу [7, p. 22, 69], то далее мы можем считать, что $q \geq 4$. В следующих случаях группа G имеет четыре класса максимальных подгрупп, не содержащих S.

В случае, когда $T \leq \langle\delta,\varphi\rangle$, группа G содержит классы максимальных подгрупп с представителями $N_G(H_2)$ и $N_G(H_8)$ и два класса максимальных подгрупп (нормализаторы в G подгрупп, изоморфных H_1). Если же $T \not\leq \langle\delta,\varphi\rangle$, то G содержит два класса максимальных подгрупп в строках 3, 4 (с меткой $N1$) и (снова) классы максимальных подгрупп в строках 2, 8.

Из табл. 8.24 для групп $S \cong L_6(q)$ мы усматриваем в группе $G = S.T$:

(а) при $T \leq \langle\delta,\varphi\rangle$ — четыре класса максимальных подгрупп (используя строки 1–2);

(б) при $T \not\leq \langle\delta,\varphi\rangle$ — шесть классов максимальных подгрупп в строках 4–7 (согласно $N1$).

Следовательно, G не является $4M$-группой.

Из табл. 8.44 для групп $S \cong SL_8(q)$ при любом q имеем

(а) при $T \leq \langle\delta,\varphi\rangle$ в группе $G = S.T$ — шесть классов максимальных подгрупп (в строках 1–3);

(б) при $T \not\leq \langle\delta,\varphi\rangle$ — шесть классов максимальных подгрупп в строках 5–10 (согласно $N1$).

Подобные утверждения для $n \in \{10,12\}$ следуют из табл. 8.60 и 8.76.

Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. *Пусть G — конечная непростая почти простая группа с цоколем $S \cong L_n(q)$, т. е. $S \lhd G \leq A \cong \mathrm{Aut}(S)$. Пусть $n \geq 13$. Положим $l(n) := [n-1/2]$. Тогда*

(1) *группа S имеет*

(1a) *$2l(n)$ классов $\{H_m^{(1)}\}^S$ и $\{H_m^{(2)}\}^S$ максимальных подгрупп типа P_m с $m \in \{1,\dots,l(n)\}$, а также еще один класс максимальных подгрупп $\{H\}^S$ типа $P_{n/2}$ в случае, когда число n четно,*

(1b) *$l(n)$ классов $\{B_m\}^S$ максимальных подгрупп типа $P_{m,n-m}$ $(1 \leq m < n/2)$,*

(1c) *$l(n)$ классов $\{C_m\}^S$ максимальных подгрупп типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$ $(1 \leq m < n/2)$;*

(2) *группа G имеет*

(2a) *$l(n)$ (A-инвариантных) классов $\{H_m^{(1)}\}^G = \{H_m^{(1)}\}^S \cup \{H_m^{(2)}\}^S$ максимальных подгрупп при $m < n/2$ и еще (A-инвариантный) класс $\{H\}^G$ при четном n,*

(2b) *$2l(n)$ (A-инвариантных) классов $\{N_G(B_m)\}^G$ и $\{N_G(C_m)\}^G$ максимальных подгрупп с $m \in \{1,\dots,l(n)\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) вытекает, по-существу, из табл. 3.5.A в [17].

Докажем утверждение (2). Рассмотрим табл. 3.5.H и ее объяснение в [17, с. 78, 66, 68]. Найдем в таблице строки (8 и 9), соответствующие подгруппам, которые обозначены через B_m и C_m. Каждая из этих подгрупп содержится в одной из подгрупп $H_m^{(i)}$ $(i \in \{1,2\})$ типа P_m (пятая колонка таблицы). В последней колонке рассматриваемых строк табл. 3.5.H стоит символ N, а это означает, что $N_G(B_m)$ ($m \in \{1, \ldots, n-1\}$) есть G-новинка относительно $A_m^{(i)}$ (при соответствующем i), т. е. $N_G(B_m) \nleq N_G(H_m^{(i)})$), и следовательно, $N_G(B_m) \lessdot G$. Подобно $N_G(C_m) \lessdot G$. Далее (см. с. 66 перед примером 5), $|\{H_i\}^A| = 1$ и $|\{H_m\}^A| = 2$, т. е. верно утверждение (1). Утверждение о максимальности в G подгрупп $N_G(B_m)$ и $N_G(C_m)$ отмечено в [17] в последнем абзаце на с. 68 (см. также гл. 5). Отсюда и из (1) вытекает утверждение (2).

Лемма 4.4 доказана.

Лемма 4.5. *Пусть G — конечная непростая почти простая группа с цоколем $S \cong L_n(q)$ при $n \geq 13$. Тогда группа G не является $4M$-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно вытекает из леммы 4.4, согласно которой (см. утверждение (2b)) группа G имеет по крайней мере $2l(13) = 2[13-1/2] = 12$ классов максимальных подгрупп типов $P_{m,n-m}$ и $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$.

Лемма 4.5 доказана.

Из предложения 4 и лемм 1.1, 1.2, 4.2, 4.3, 4.5 вытекает следующее утверждение.

Предложение 5. *Пусть G — конечная непростая почти простая группа с цоколем S, которая является $4M$-группой. Тогда $S \cong L_2(q)$, где $q = p^f$, p — простое число, $f \in \mathbb{N}$.*

5. О почти простой $4M$-группе с цоколем $L_2(q)$

Согласно предложению 5 нам остается рассмотреть лишь следующую ситуацию.

Пусть G — конечная непростая почти простая $4M$-группа с цоколем $S \cong L_2(q)$ такая, что $G = S.T \leq P\Gamma L_2(q) = \mathrm{Aut}(S)$ и $T \leq \mathrm{Out}(S)$. Пусть $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$. Тогда согласно лемме 4.1 имеем

$$\mathrm{Out}(S) = \langle\delta\rangle \times \langle\phi\rangle \cong C_{(q-1,2)} \times C_f = \begin{cases} C_f \text{ при четном } q, \\ C_2 \times C_f \text{ при нечетном } q. \end{cases}$$

В лемме 2.8 мы определили максимальные подгруппы группы G в частном случае, когда $G \cong PGL_2(q)$. Кроме того, мы знаем максимальные подгруппы таких групп G при малых q, в частности, при $q \leq 31$ (лемма 1.3).

Описание максимальных подгрупп групп G в общем случае можно получить из результатов предыдущих разделов (например, предложений 4 и 5) и (основной вклад) табл. 8.1 и 8.2 работы [12]. А именно максимальные подгруппы группы G являются нормализаторами в G подгрупп столбца “Subgp”, *если* рассматривать эти вхождения “по модулю скаляров”, т. е. по модулю центра подгруппы $SL_2(q)$. Поступая таким образом, получаем список максимальных подгрупп группы G, несколько упростив таблицы и предположив дополнительно (на основании вышесказанного), что $q > p$ и $q > 11$. И тогда формулируем следующее предложение о максимальных подгруппах группы G (которое является очень естественным расширением знаменитой теоремы Диксона, упомянутой перед леммой 2.7).

Предложение 6. *Пусть G — конечная непростая почти простая группа с цоколем $S \cong L_2(q)$, т. е. $S < G \leq P\Gamma L_2(q)$. Пусть $q = p^f$, где p — простое число. Предположим, что $f > 1$ и $q > 11$. Тогда все максимальные подгруппы M_i группы G, не содержащие S, имеют вид $M_i = N_G(H_i)$, где подгруппы H_i из S находятся в следующем списке*:

(1) $H_1 \cong E_q \leftthreetimes C_{(q-1)/d}$, $c = 1$ *при любом* q (*строка* 1 *табл.* 8.1);

(2) $H_2 \cong D_{2(q-1)/d}$, $c = 1$ *при любом* q (*строки* 2, 5 *табл.* 8.1);

(3) $H_3 \cong D_{2(q+1)/d}$, $c = 1$ *при любом* q (*строки* 6, 9 *табл.* 8.1);

(4) $H_4 \cong L_2(q_0)$, *где* $q = 2^f = q_0^r$, $q_0 \neq 2$ *и* r — *простое число,* $c = 1$ *для каждой пары* (q_0, r) (*строка* 12 *табл.* 8.1);

(5) $H_5 \cong L_2(q_0)$, *где* $p > 2$ *и* $q = q_0^r$, r — *нечетное простое число,* $c = 1$ *для каждой пары* (q_0, r) (*строка* 11 *табл.* 8.1);

в каждом из пп. (1)–(5) $Stab = \langle\delta\rangle \times \langle\phi\rangle$ (*порядок* δ *равен* $(2, q-1)$);

(6) H_6 *изоморфна* $PGL_2(q_0)$ *или* $PGL_2^-(q_0)$, *где* $q = q_0^2$, q_0 *нечетно,* $c = 2$, $Stab = \langle\phi\rangle$ (*строка* 10 *табл.* 8.1);

(7) $H_7 \cong A_5$, *где* $q = p^2$, $p \equiv \pm 3 \pmod{10}$, $c = 2$, $Stab = \langle\phi\rangle$ (*строка* 2 *табл.* 8.2).

Следствие 2. *Пусть выполнено условие предложения* 6. *Тогда*

(1) $m(G) \geq 4$;

(2) $m(G) = 4$, *если и только если*

(2*a*) *группа* G *не имеет максимальных подгрупп типов* M_4, M_5, M_6, M_7, M_8 *и*

(2*b*) G/S *— примарная циклическая группа.*

Доказательство. Группа G при любом q определенно имеет максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3, а также некоторое число $k \geq 1$ максимальных подгрупп, содержащих S. Следовательно, верно (1).

Если же $m(G) = 4$, то должно быть $k = 1$ и верно (2a), и обратно.

Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Пусть выполнено условие предложения* 6 (*в частности,* $q = p^f$, *где* p *— простое число и* $f > 1$). *Тогда*

(1) *группа* G *не имеет максимальных подгрупп типа* M_4, *если и только если* $q = 2^r$, *где* r *— простое число*;

(2) *группа* G *не имеет максимальных подгрупп типа* M_5, *если и только если* $q = p^{2^m}$, *где* $p > 2$ *и* $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$;

(3) *группа* G *не имеет максимальных подгрупп типа* M_6, *если и только если* $q = p^f$, *где* $p > 2$, f *нечетно и* $\varphi \notin G$;

(4) *группа* G *не имеет максимальных подгрупп типа* M_7, *если и только если* $f > 2$ *или* $f = 2$ *и* $p \equiv \pm 1$ (mod10).

Теперь мы докажем нашу главную теорему — теорему 4.

Доказательство. Пусть для G и S выполнено условие теоремы 4.

Согласно предложению 3 при выполнении любого из условий (1)–(3) теоремы 4 группа G является $4M$-группой. Понятно также, что при $q = 2^r$ с простым r и при $q = p^{2^m}$ с $p > 2$ в G нет подгрупп M_4–M_7. Кроме того, ввиду леммы 2.2 можно выбрать G так, чтобы G/S была примарной циклической группой (просчитать все G).

Обратно, пусть G и S — из теоремы 4 и для q выполнены условия (1), (2). Без ограничения общности можно считать, что для G и S выполнены обозначения предложения 4. Далее, проверяем, какие именно из утверждений (1)–(7) этого предложения выполнены при каждом из условий (1)–(3) теоремы 4.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В.А.** Конечные группы с четырьмя классами максимальных подгрупп. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 4. С. 52–62. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-52-62.
2. **Белоногов В.А.** Конечные группы с четырьмя классами максимальных подгрупп. II // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 86–91. doi: 10.17377/semi.2018.15.010.
3. **Белоногов В.А.** Конечные группы с четырьмя классами максимальных подгрупп // Теория групп и ее приложения: материалы XII шк.-конф. по теории групп, посвящен. 65-летию А. А. Махнева / Кубанский гос. ун-т. Краснодар, 2018. С. 7–13.
4. **Pazderski G.** *Ü*ber maximal Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Nachr. 1964. Vol. 26, no. 6. P. 307–319.
5. **Белоногов В.А.** Конечные группы с тремя классами максимальных подгрупп // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 225–239.
6. **Belonogov V.A.** On finite almost simple groups with exactly four conjugate classes of maximal subgroups // Тез. Междунар. конф. "Мальцевские чтения" (Malcev Meeting). 2019. С. 142.

7. **Conway J.H., Curtis R.T., Norten S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
8. **Gorenstein D.** Finite groups. N Y: Harper & Row, 1968. 642 p.
9. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Providence: AMS, 1994. 165 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 40, no 1).
10. **Wilson R.A.** The finite simple groups. London: Springer, 2009. 313 p.
11. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. Vol. 111, no. 2. P. 365–383.
12. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lecture Note; vol. 407).
13. **Huppert B.** Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 793 S. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3.
14. **Dickson L.E.** Linear groups with an exposition of the Galois field theory // Teubner, Leipzig, 1901 (Dover reprint 1958). doi: 10.5962/bhl.title.22174 .
15. **King O.** The subgroup structure of finite classical groups in terms of geometric configurations // Surveys in Combinatorics / ed. B.S. Webb. (British Combinatorial Conf. — BC, 2005). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. P. 29–56. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 327.) doi: 10.1017/CBO9780511734885.003 .
16. **Giudici M.** The maximal subgroups of almost simple groups with socle $PSL(2, q)$ [e-resource]. Available on: arXiv:math/0703685v1 [math. GR] 23 Mar 2007. P. 1–11.
17. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 304 p. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 129).
18. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: John Willey and Sons, 1972. 331 p.
19. **Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** Subgroups of maximal rank in finite exeptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. vol. 65, no. 2. doi: 10.1112/plms/s3-65.2.297 .
20. **Malle G.** The maximal subgroups of ${}^2F_4(q^2)$ // J. Algebra. 1991. Vol. 139. P. 52–69.

Поступила 4.03.2020
После доработки 29.11.2020
Принята к публикации 11.01.2021

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Belonogov V.A. Finite simple groups with four conjugacy classes of maximal subgroups. I. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 52–62 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-52-62 .
2. Belonogov V.A. The finite groups with exactly four conjugate classes of maximal subgroups. II. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 86–91 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2018.15.010 .
3. Belonogov V.A. Finite groups with four classes of maximal subgroups. In: *Proc. XII School-Conf. "Group theory and its applications", dedicated to the 65th anniversary of A.A. Makhnev.* Krasnodar: Kuban State Univ., 2018, pp. 7–13.
4. Pazderski G. Über maximal Untergruppen endlicher Gruppen. *Math. Nachr.*, 1964, vol. 26, no. 6, pp. 307–319.
5. Belonogov V.A. Finite groups with three classes of maximal subgroups. *Math. USSR-Sb.*, 1988, vol. 59, no. 1, pp. 223–236. doi: 10.1070/SM1988v059n01ABEH003132 .
6. Belonogov V.A. On finite almost simple groups with exactly four conjugate classes of maximal subgroups. In: *Abstr. Int. Conf. "Malcev Meeting"*, 2019, p. 142.
7. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990.
8. Gorenstein D. *Finite groups.* N Y: Harper & Row, 1968, 642 p.

9. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups*. Ser. Math. Surveys and Monographs, vol. 40. no. 1. Providence: AMS, 1994, 165 p. ISBN: 0821803344.
10. Wilson R. *The Finite simple groups*. London: Springer-Verlag, 2009, 298 p. doi: 10.1007/978-1-84800-988-2 .
11. Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J. The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups. *J. Algebra*, 1987, vol. 111, no. 2, pp. 365–383. doi: 10.1016/0021-8693(87)90223-7.
12. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*. London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576 .
13. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin etc.: Springer, 1967, 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
14. Dickson L.E. *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*. Leipzig: Teubner, 1901. doi: 10.5962/bhl.title.22174 .
15. King O. The subgroup structure of finite classical groups in terms of geometric configurations. In: B.S. Webb (ed.), *Surveys in Combinatorics*. London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 327, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005, pp. 29–56. doi: 10.1017/CBO9780511734885.003 .
16. Giudici M. The maximal subgroups of almost simple groups with socle $PSL(2, q)$. Available on: *arXiv*: math/0703685v1 [math.GR], 2007, 11 p.
17. Kleidman P., Liebeck M. *The subgroup structure of the finite classical groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990, 304 p. ISBN: 0-521-35949-X.
18. Carter R. *Simple groups of Lie type*. N Y: Wiley and Sons, 1972, 331 p. ISBN: 0471137359.
19. Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M. Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1992, vol. 65, no. 2. doi: 10.1112/plms/s3-65.2.297 .
20. Malle G. The maximal subgroups of ${}^2F_4(q^2)$. *J. Algebra*, 1991, vol. 139, no. 1, pp. 52–69. doi: 10.1016/0021-8693(91)90283-E .

Received March 4, 2020
Revised November 29, 2020
Accepted January 11, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00456).

Vyacheslav Aleksandrovich Belonogov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: belonogov@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. A. Belonogov. Finite groups with four conjugacy classes of maximal subgroups. III, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 5–18 .