ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ПЕРЕВОДА ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С НУЛЕВЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧАСТЯМИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ ПРИ БЫСТРЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НА НЕОГРАНИЧЕННОЕ ЦЕЛЕВОЕ МНОЖЕСТВО

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Настоящая работа посвящена одной задаче оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы с гладкими геометрическими ограничениями на управление и неограниченным целевым множеством:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad u \in \mathbb{R}^{2m}, \\ \varepsilon \dot{y} = Jy - Ju, & \|u\| \leqslant 1, \quad \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x^0, \quad y(0) = \varepsilon y^0, & \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \beta \cdot I \\ -\beta \cdot I & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta > 0.$$

Собственные значения матрицы J при быстрых переменных не удовлетворяют стандартному требованию отрицательности вещественной части. Доказана разрешимость задачи. Получена полная степенная асимптотика в смысле Эрдейи времени быстродействия при стремлении малого параметра ε при производных в уравнениях системы к нулю по некоторому множеству. Показано, что вид асимптотики существенно зависит от множества, по которому малый параметр стремится к нулю.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенная задача, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of the optimal time of transferring a linear control system with zero real parts of the eigenvalues of the matrix at the fast variables to an unbounded target set.

This paper is devoted to a time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system with smooth geometric constraints on the control and an unbounded target set:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad u \in \mathbb{R}^{2m}, \\ \varepsilon \dot{y} = Jy - Ju, & \|u\| \leqslant 1, \quad \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x^0, \quad y(0) = \varepsilon y^0, & \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases}$$

where

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \beta \cdot I \\ -\beta \cdot I & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta > 0.$$

The eigenvalues of the matrix J at the fast variables do not satisfy the standard requirement that the real part is negative. The solvability of the problem is proved. We also construct and justify a complete power asymptotic expansion in the sense of Erdelyi of the optimal time as the small parameter ε at the derivatives in the equations of the system tends to zero over some set. It is shown that the form of the asymptotics depends essentially on the set over which the small parameter tends to zero.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problem, small parameter.

MSC: 93C70, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-48-61

1. Постановка задачи

В работе рассматривается одна из задач о быстродействии оптимального управления [1] для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными (см. обзоры [2;3]) в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями в виде шара

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad u \in \mathbb{R}^{2m}, \\ \varepsilon \dot{y} = Jy - Ju, & \|u\| \leqslant 1, \quad \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x^0, \quad y(0) = \varepsilon y^0, & \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \beta \cdot I \\ -\beta \cdot I & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta > 0.$$

Здесь $\| \cdot \|$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном пространстве, $I = I_m$, $0 = 0_m$ — матрицы тождественного и нулевого операторов $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ соответственно. Далее, если размер матрицы ясен из контекста, нижний индекс у единичной или нулевой квадратной матрицы будем опускать.

Задача (1.1) есть задача наискорейшего перевода точки $(x^0, \varepsilon y^0)$ на следующее целевое множество:

$$G := \{\, (0, y) : \ y \in \mathbb{R}^{2m} \,\}.$$

В работе [4] даются основные соотношения для линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами и многоугольником в качестве ограничивающего множества. В свою очередь, работы [5;6] посвящены исследованию поведения областей достижимости при стремлении малого параметра к нулю. Линейно-квадратичные задачи оптимального управления для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и с неограниченным многомерным управлением изучаются в статьях [7–9]. Отметим также ряд исследований (см. библиографию в [10]), в которых получены полные асимптотики решений задач управления для линейных систем с быстрыми и медленными переменными и ограничивающим множеством в виде шара в евклидовом пространстве: задача о быстродействии (А.Р. Данилин, А.М. Ильин, 1998; А.Р. Данилин, О.О. Коврижных, 2013), терминальный критерий качества (А.Р. Данилин, Ю.В. Парышева, 2009), и интегральный выпуклый критерий качества (А.А. Шабуров, 2019).

Одна из отличительных особенностей рассматриваемой задачи (1.1) состоит в том, что вещественные части собственных значений матрицы J при быстрых переменных равны нулю и тем самым нарушено стандартное условие (см. [6]) их отрицательности, другой особенностью является неограниченное целевое множество. Настоящее исследование дополняет и развивает результаты авторов, опубликованные в статье “Асимптотика решения одной задачи о быстродействии с малым параметром ” (*Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 2016, Т. 22, № 1) и в работе [10], которая использует общие соотношения, полученные в [11].

Без ограничения общности можно считать, что $\beta = 1$, т. е.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

поскольку заменой параметра по формуле $\varepsilon / \beta = \overline{\varepsilon}$ можно получить систему с $\beta = 1$. Заметим, что тогда в силу вида матрицы (1.2) справедливы равенства

$$J^2 = -I, \quad J^{-1} = -J, \quad J^* = -J. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $*$ — знак операции транспонирования матриц.

Из определения матричной экспоненты с помощью ряда следует, что

$$e^{Jt/\varepsilon} = I + \frac{t}{1!\,\varepsilon}J - \frac{t^2}{2!\,\varepsilon^2}I - \frac{t^3}{3!\,\varepsilon^3}J + \ldots = \cos\frac{t}{\varepsilon}\cdot I + \sin\frac{t}{\varepsilon}\cdot J. \tag{1.4}$$

Принимая во внимание равенства (1.3), (1.4), приходим к справедливости следующих соотношений

$$(I - e^{J\tau/\varepsilon})(I - e^{-J\tau/\varepsilon}) = 2I - e^{J\tau/\varepsilon} - e^{-J\tau/\varepsilon} = 2\left(1 - \cos\frac{\tau}{\varepsilon}\right)I,$$

$$\begin{aligned}\|(I - e^{-J\tau/\varepsilon})\psi\|^2 &= \langle (I - e^{-J\tau/\varepsilon})\psi, (I - e^{-J\tau/\varepsilon})\psi\rangle = \langle (I - e^{J\tau/\varepsilon})(I - e^{-J\tau/\varepsilon})\psi, \psi\rangle \\ &= 2\left(1 - \cos\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\|\psi\|^2 \qquad \text{для любого } \psi \in \mathbb{R}^{2m},\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$J(I - e^{JT_\varepsilon/\varepsilon}) = \left(1 - \cos\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}\right)J + \sin\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}\cdot I.$$

Вырожденная задача (при $\varepsilon = 0$) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x,\, u \in \mathbb{R}^{2m} \\ x(0) = x^0, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(T_{\text{в}}) = 0, \quad T_{\text{в}} \longrightarrow \min. \end{cases}$$

Согласно принципу максимума [1; 12, п. 2.5, теорема 18] оптимальное управление $u_0(t)$ имеет вид

$$u_0(t) = l_0, \qquad \|l_0\| = 1,$$

где вектор l_0 удовлетворяет соотношению

$$0 = x^0 + T_{\text{в}} l_0.$$

Естественным является предположение

$$x^0 \neq 0. \tag{1.6}$$

Отсюда с учетом (1.6) выводим

$$T_{\text{в}} = \|x^0\|, \quad l_0 = -\frac{x^0}{\|x^0\|}. \tag{1.7}$$

Обозначим

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & \varepsilon^{-1}J \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon^{-1}J \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ \varepsilon y^0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

В силу этих обозначений задача (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}_\varepsilon z + \mathcal{B}_\varepsilon u, & z \in \mathbb{R}^{4m}, \quad u \in \mathbb{R}^{2m}, \\ z(0) = z_\varepsilon^0 \notin G, & \|u\| \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ z(T_\varepsilon) \in G, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min. \end{cases} \tag{1.9}$$

Непосредственным вычислением из (1.8), (1.4) получаем, что

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I & \displaystyle\int_0^t e^{Js/\varepsilon}ds \\ 0 & e^{Jt/\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \varepsilon J(I - e^{Jt/\varepsilon}) \\ 0 & e^{Jt/\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} I - e^{Jt/\varepsilon} \\ -\varepsilon^{-1}J\,e^{Jt/\varepsilon} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* t} = \begin{pmatrix} I - e^{-Jt/\varepsilon} & \varepsilon^{-1}e^{-Jt/\varepsilon}\,J \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Теорема 1. *Задача* (1.1) *разрешима при любом фиксированном* $\varepsilon \in (0,1)$.

Доказательство. В силу формулы Коши, примененной к системе из (1.9), для такого $T>0$, что $x(T)=0$, выполняется

$$0 = R\biggl(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z_\varepsilon^0 + \int\limits_0^T e^{\mathcal{A}_\varepsilon (T-\tau)} \mathcal{B}_\varepsilon u(\tau)\, d\tau\biggr) = Re^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z_\varepsilon^0 + \int\limits_0^T Re^{\mathcal{A}_\varepsilon \tau} \mathcal{B}_\varepsilon u(T-\tau)\, d\tau,$$

где $R=(I_{2m},0)$, $R\colon \mathbb{R}^{4m} \to \mathbb{R}^{2m}$. Разрешимость задачи (1.1) к моменту времени T эквивалентна тому, что $0 \in \Xi_\varepsilon(T,x^0) \subset \mathbb{R}^{2m}$, где

$$\Xi_\varepsilon(T,x^0) = \biggl\{x \in \mathbb{R}^{2m} : x = R(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z_\varepsilon^0) + \int\limits_0^T Re^{\mathcal{A}_\varepsilon \tau} \mathcal{B}_\varepsilon u(T-\tau)\, d\tau, u \in \mathcal{U}\biggr\},$$

$\mathcal{U}$ — множество допустимых управлений. Отметим, что $\Xi_\varepsilon(T,x^0)$ — выпуклое компактное множество. Включение $0 \in \Xi_\varepsilon(T,x^0)$, в свою очередь, справедливо [13, п. 3.4] тогда и только тогда, когда для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^{2m}$, $\|\psi\|=1$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant \rho(\psi|\Xi_\varepsilon(T,x^0)) = \langle R^*\psi, e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z_\varepsilon^0\rangle + \int\limits_0^T \rho\left(\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} R^*\psi | U\right) d\tau; \tag{1.12}$$

здесь $\rho(\psi|\Xi_\varepsilon(T,x^0))$ — опорная функция множества $\Xi_\varepsilon(T,x^0))$, $U=\{u : \|u\| \leqslant 1\}$. Преобразуем правую часть неравенства (1.12) с учетом соотношений (1.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle R^*\psi, e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z_\varepsilon^0\rangle + \int\limits_0^T \left\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} R^*\psi\right\| d\tau \\ &= \langle \psi, x^0 + \varepsilon^2 J(I - e^{JT/\varepsilon}) y^0\rangle + \int\limits_0^T \|I - e^{-Jt/\varepsilon}\psi\| d\tau \\ &= \langle \psi, x^0 + \varepsilon^2 J(I - e^{JT/\varepsilon}) y^0\rangle + 2\|\psi\| \int\limits_0^T \left|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\right| d\tau. \end{aligned}$$

В силу (1.4) для любого T норма матрицы $e^{JT/\varepsilon}$ ограничена, а $\int_0^T |\sin(\tau/(2\varepsilon))|\, d\tau \to +\infty$ при $T \to +\infty$, поэтому найдется $T>0$, что для любого $\psi \in \mathbb{R}^{2m}$, $\|\psi\|=1$, выполнено неравенство (1.12).

Вследствие критерия Калмана (см, например, [12, п. 2.3, теорема 5]) при каждом фиксированном $\varepsilon>0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ из (1.8) вполне управляема. Тогда из утверждения 1 работы [10], поскольку при его доказательстве используется только вполне управляемость пары $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$, следует, что если существует $T>0$ такое, что $z(T) \in G$, то задача (1.1) разрешима и $T_\varepsilon \leqslant T$, где T_ε — время быстродействия. □

2. Основное уравнение и предельное соотношение

Пусть $u_\varepsilon(t)$ — оптимальное управление в задаче (1.1). Тогда в силу принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи (см., например, теорему 18 из [12, п. 2.5]) существует такой вектор $L_\varepsilon \perp G$, т. е. $L_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, 0^*)^*$, $l_\varepsilon \in \mathbb{R}^{2m}$, $l_\varepsilon \neq 0$, что для решения сопряженной задачи

$$\dot{\psi}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon^* \psi, \quad \psi_\varepsilon(T_\varepsilon) = L_\varepsilon$$

выполняется соотношение

$$\langle\psi_\varepsilon(t),\mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon(t)\rangle=\max_{\|u\|\leqslant 1}\langle\psi_\varepsilon(t),B_\varepsilon u\rangle=\|B_\varepsilon^*\psi_\varepsilon(t)\|.$$

Поскольку $\psi_\varepsilon(t)=e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)}L_\varepsilon$, то при t таких, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)}L_\varepsilon\neq 0$, оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$u_\varepsilon(t)=\frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)}L_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)}L_\varepsilon\|}. \tag{2.1}$$

С учетом условия $x(T_\varepsilon)=0$ в силу формулы Коши и определения $u_\varepsilon(t)$ (2.1) получим

$$0=R\left(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon}z_\varepsilon^0+\int\limits_0^{T_\varepsilon}\frac{e^{\mathcal{A}_\varepsilon(T_\varepsilon-t)}\mathcal{B}_\varepsilon\,\mathcal{B}_\varepsilon^*\,e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)}\begin{pmatrix} l_\varepsilon\\ 0\end{pmatrix}}{\left\|\mathcal{B}_\varepsilon^*\,e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)}\begin{pmatrix} l_\varepsilon\\ 0\end{pmatrix}\right\|}\,dt\right),\quad R=(I_{2m},0). \tag{2.2}$$

После замены переменной интегрирования по формуле $\tau=T_\varepsilon-t$, используя соотношения (1.10), (1.11), приходим к уравнению

$$0=x^0+\varepsilon^2 J(I-e^{JT_\varepsilon/\varepsilon})y^0+\int\limits_0^{T_\varepsilon}\frac{(I-e^{J\tau/\varepsilon})(I-e^{-J\tau/\varepsilon})l_\varepsilon}{\|(I-e^{-J\tau/\varepsilon})l_\varepsilon\|}d\tau, \tag{2.3}$$

эквивалентному (2.2). Отметим, что подынтегральная функция в уравнении (2.3) положительно однородна относительно вектора l_ε, поэтому в дальнейшем уравнение (2.3) необходимо дополнить каким-либо условием нормировки этого вектора. Выражение (2.1) для оптимального управления запишется в форме

$$u_\varepsilon(t)=\frac{(I-e^{-J(T_\varepsilon-t)/\varepsilon})l_\varepsilon}{\|(I-e^{-J(T_\varepsilon-t)/\varepsilon})l_\varepsilon\|}. \tag{2.4}$$

В силу соотношений (1.5) уравнение (2.3) преобразуется к виду

$$0=\|l_\varepsilon\|x^0+\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|\Big(1-\cos\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)Jy^0+\varepsilon^2\|l_\varepsilon\|\sin\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}\cdot y^0+2\int\limits_0^{T_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big|d\tau\cdot l_\varepsilon. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) назовем *основным.*

Отметим, что при всех $T_\varepsilon>0$ выполняется

$$\int\limits_0^{T_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big|d\tau>0.$$

Дополним уравнение (2.3) условием нормировки

$$\|l_\varepsilon\|=2\int\limits_0^{T_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big|d\tau. \tag{2.6}$$

Тогда, выразив вектор l_ε из основного уравнения (2.5), получим

$$l_\varepsilon=-x^0-\varepsilon^2\Big(1-\cos\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)Jy^0-\varepsilon^2\sin\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}\cdot y^0. \tag{2.7}$$

Поскольку (в силу (2.7)) $l_\varepsilon=-x^0+O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon\to+0$, то и $\|l_\varepsilon\|=\|x^0\|+O(\varepsilon^2)$. Следовательно, уравнение (2.6) можно записать в форме

$$\|x^0\|=2\int\limits_0^{T_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big|d\tau+O(\varepsilon^2),\qquad \varepsilon\to+0. \tag{2.8}$$

Теорема 2. *Для оптимального времени в задаче* (1.1) *выполняется* $T_\varepsilon \to \dfrac{\pi}{4} T_в$, $\varepsilon \to +0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу секвенциального подхода для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что у функции T_ε все частичные пределы при $\varepsilon \to +0$ совпадают с $\pi T_в/4$. Пусть $\overset{0}{T}$ — произвольный частичный предел, т. е. существует такая последовательность $\varepsilon_n \to +0$, что $T_{\varepsilon_n} \to \overset{0}{T}$. Далее для сокращения записи будем опускать номера членов последовательности. В силу того, что функция T_ε ограничена, все ее частичные пределы конечны.

Для этой последовательности интеграл в правой части уравнения (2.8) записывается в виде

$$\int_0^{T_\varepsilon} \Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big| d\tau = \int_0^{\overset{0}{T}} \Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big| d\tau + o(1) = \int_0^{2\pi\varepsilon n_\varepsilon} \Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big| d\tau + o(1)$$

$$= n_\varepsilon \int_0^{2\pi\varepsilon} \sin\frac{\tau}{2\varepsilon} d\tau + o(1) = 4\varepsilon n_\varepsilon + o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.9}$$

где $n_\varepsilon \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ удовлетворяет соотношению

$$\overset{0}{T} = 2\pi\varepsilon n_\varepsilon + o(1), \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.10}$$

Вследствие (2.10) имеем $n_\varepsilon \varepsilon \to \dfrac{\overset{0}{T}}{2\pi}$ при $\varepsilon \to +0$. Тогда при $\varepsilon \to +0$ из уравнения (2.8) получим, что $\overset{0}{T}$ удовлетворяет следующему предельному соотношению

$$\|x^0\| = \frac{4}{\pi} \overset{0}{T}.$$

Отсюда

$$\overset{0}{T} = T_0 = \frac{\pi}{4}\|x^0\| = \frac{\pi}{4} T_в. \tag{2.11}$$

□

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в силу теоремы 2 в рассматриваемой задаче предельное время T_0 строго меньше оптимального времени $T_в$ в вырожденной задаче (1.7).

3. Асимптотика решения основного уравнения

Рассмотрим сначала случай

$$y^0 \neq 0.$$

Будем искать новую неизвестную величину ϑ_ε

$$T_\varepsilon = T_0 + \varepsilon\vartheta_\varepsilon. \tag{3.1}$$

Представим T_0 в виде

$$T_0 = 2\pi\varepsilon n_\varepsilon + \varepsilon\delta_\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0, \quad n_\varepsilon = \Big[\frac{T_0}{2\pi\varepsilon}\Big], \quad 0 \leqslant \delta_\varepsilon < 2\pi. \tag{3.2}$$

Отметим, что δ_ε — известная функция от ε:

$$\delta_\varepsilon = \frac{T_0}{\varepsilon} - 2\pi\Big[\frac{T_0}{2\pi\varepsilon}\Big]; \tag{3.3}$$

здесь и далее скобками $[\cdot]$ обозначается целая часть числа.

Интеграл в правой части уравнения (2.8) с учетом соотношений (3.1), (3.2) преобразуется следующим образом:

$$\int\limits_0^{T_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big|d\tau=\int\limits_0^{2\pi\varepsilon\cdot n_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big|d\tau+\int\limits_{T_0-\varepsilon\delta_\varepsilon}^{T_0+\varepsilon\vartheta_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big|d\tau=2\frac{T_0-\varepsilon\delta_\varepsilon}{\pi}+\varepsilon\int\limits_0^{\delta_\varepsilon+\vartheta_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta.$$

Второй интеграл в формуле выше получен в результате замены переменной интегрирования по формуле $\eta=(\tau-T_0)/\varepsilon+\delta_\varepsilon$. Принимая во внимание предельное соотношение (2.11), запишем уравнение (2.8) в виде

$$2\frac{\delta_\varepsilon}{\pi}+O(\varepsilon)=\int\limits_0^{\delta_\varepsilon+\vartheta_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta=:F(\varepsilon,\vartheta_\varepsilon). \tag{3.4}$$

Утверждение 1. *Величина ϑ_ε ограничена.*

Доказательство. В противном случае найдется такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n\to+0$, что $\vartheta_{\varepsilon_n}\to\infty$. Тогда и

$$\int\limits_0^{\delta_{\varepsilon_n}+\vartheta_{\varepsilon_n}}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta\longrightarrow\infty,$$

что в силу (3.2) противоречит равенству (3.4). □

Далее, будем искать величину ϑ_ε:

$$\vartheta_\varepsilon=\vartheta_0(\varepsilon)+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon, \tag{3.5}$$

где $\vartheta_0(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$2\frac{\delta_\varepsilon}{\pi}=\int\limits_0^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta\ =:\ F(\varepsilon,\vartheta_0). \tag{3.6}$$

при этом зависимость от ε в записи $\vartheta_0(\varepsilon)$ будем опускать. Отметим, что если $\delta_\varepsilon=0$, то из уравнения (3.6) следует $\vartheta_0=0$. Поскольку подынтегральная функция в (3.6) неотрицательна и непрерывна на всей числовой прямой, то для любого $\varepsilon>0$ функция $F(\varepsilon,\vartheta_0)$ строго возрастающая и непрерывная по ϑ_0. Далее, при фиксированном $\varepsilon>0$ в силу (3.2) имеем

$$F(\varepsilon,-\delta_\varepsilon)=0\leqslant2\frac{\delta_\varepsilon}{\pi},\quad F(\varepsilon,2\pi-\delta_\varepsilon)=\int\limits_0^{2\pi}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta=4>2\frac{\delta_\varepsilon}{\pi}$$

при всех $\delta_\varepsilon\in[0,2\pi)$. Тогда по теореме Больцано — Коши при любом фиксированном $\varepsilon>0$ найдется такое $\vartheta_0\in[-\delta_\varepsilon,2\pi-\delta_\varepsilon)$, что $F(\varepsilon,\vartheta_0)=2\delta_\varepsilon/\pi$, т. е. ϑ_0 — корень уравнения (3.6), при этом единственный. Поскольку

$$\delta_\varepsilon+\vartheta_0\in[0,2\pi), \tag{3.7}$$

то справедливы следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta=\int\limits_0^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}\sin\frac{\eta}{2}d\eta=2\Big(1-\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}\Big)=4\sin^2\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{4}.$$

В силу равенства (3.6) имеем $\cos\dfrac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}=1-\dfrac{\delta_\varepsilon}{\pi}\in(-1,1]$, $\quad\dfrac{\delta_\varepsilon}{2\pi}=\sin^2\dfrac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{4}$. Тогда исходя из (3.7)

$$\vartheta_0=2\arccos\Big(1-\frac{\delta_\varepsilon}{\pi}\Big)-\delta_\varepsilon, \tag{3.8}$$

$$\sin^2\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}=4\sin^2\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{4}\Big(1-\sin^2\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{4}\Big)=4\frac{\delta_\varepsilon}{2\pi}\Big(1-\frac{\delta_\varepsilon}{2\pi}\Big)=\frac{\delta_\varepsilon(2\pi-\delta_\varepsilon)}{\pi^2}.$$

Отсюда согласно (3.7) получаем $\sin\dfrac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}=\dfrac{\sqrt{\delta_\varepsilon(2\pi-\delta_\varepsilon)}}{\pi}$. Уравнение (3.4) с учетом соотношений (3.5), (3.6) примет вид

$$O(\varepsilon)=\int\limits_{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta. \tag{3.9}$$

Утверждение 2. *Выполняется соотношение* $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon=o(1)$, $\varepsilon\to+0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения 1 и оценки (3.7) величина $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon$ ограничена. Предположим, что найдется предельная точка множества $\{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon\}$, отличная от 0. Пусть для определенности для некоторой последовательности $\varepsilon_n\to+0$ выполняется $\widetilde{\vartheta}_{\varepsilon_n}\geqslant\theta>0$ при $n\geqslant N$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta_{\varepsilon_n}+\vartheta_0(\varepsilon_n)\to\beta\geqslant0$, далее номер n у членов последовательности ε_n будем опускать. Тогда из уравнения (3.9) получаем

$$O(\varepsilon)=\int\limits_{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\theta}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta+\int\limits_{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\theta}^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta\geqslant\int\limits_{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\theta}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta\to\int\limits_{\beta}^{\beta+\theta}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta>0.$$

Пришли к противоречию. Если $\widetilde{\vartheta}_{\varepsilon_n}\leqslant-\theta<0$ при $n\geqslant N$, т.е. $-\widetilde{\vartheta}_{\varepsilon_n}\geqslant\theta>0$, то из (3.9) аналогичным образом приходим к противоречию:

$$O(\varepsilon)=\int\limits_{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta=\int\limits_{\delta_\varepsilon+\vartheta_0-2\pi+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0-2\pi}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta=\int\limits_{2\pi-\delta_\varepsilon-\vartheta_0}^{2\pi-\delta_\varepsilon-\vartheta_0-\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta>0.$$

□

В дальнейшем при $0<\alpha<1$ будем рассматривать множества

$$E_\alpha=\Big\{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\,:\,\frac{\sqrt{\delta_\varepsilon(2\pi-\delta_\varepsilon)}}{\pi}\geqslant\alpha>0\Big\}. \tag{3.10}$$

Если $\varepsilon\in E_\alpha$, то в силу утверждения 2 при всех достаточно малых ε $(0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1)$ выполняется

$$\delta_\varepsilon+\vartheta_0(\varepsilon)+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon\in[0,2\pi]. \tag{3.11}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}^{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\eta}{2}\Big|d\eta=2\Big(\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}-\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}{2}\Big), \tag{3.12}$$

а уравнение (2.6) примет вид

$$0=\Big\|x^0+\varepsilon^2(1-\cos(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon))Jy^0+\varepsilon^2\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)\,y^0\Big\|-\|x^0\|$$
$$-4\varepsilon\Big(\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}-\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}{2}\Big). \tag{3.13}$$

В силу утверждения 2 функции $\cos(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)$, $\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)$ и $\cos((\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)/2)$ можно разложить в ряды Тейлора при малых $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon$:

$$\begin{gathered}
\cos(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)=\cos(\delta_\varepsilon+\vartheta_0)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^{2k}}{(2k)!}-\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)!},\\
\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)=\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^{2k}}{(2k)!}+\cos(\delta_\varepsilon+\vartheta_0)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)!},\\
\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}{2}=\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\,\frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^{2k}}{(2k)!}-\sin\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}\,\frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)!}.
\end{gathered}\tag{3.14}$$

С учетом условия (1.6) и соотношений (3.14) при $\varepsilon\to 0$, $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon\to 0$ получаем

$$\begin{gathered}
\|l_\varepsilon\|-\|x^0\|=\varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon),\quad P_0=2\sin^2\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}\,\frac{\langle x^0,Jy^0\rangle}{\|x^0\|}+\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0)\frac{\langle x^0,y^0\rangle}{\|x^0\|},\\
4\varepsilon\Big(\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}-\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}{2}\Big)=4\varepsilon\sin\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}\,\frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}{2}+\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}Q_n(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon),
\end{gathered}$$

где $P_n(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)$, $Q_n(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)$ можно представить в форме

$$\sum_{k=0}^{n}f_{n,k}(\varepsilon)\varepsilon^k\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^{n-k},\quad f_{n,k}(\varepsilon)=O(1),\quad \varepsilon\to 0.\tag{3.15}$$

Поскольку при $\varepsilon\in E_\alpha$ (3.10) справедлива оценка $\sin((\delta_\varepsilon+\vartheta_0)/2)\geqslant\alpha>0$, то уравнение (3.13) примет вид

$$0=\varepsilon R_0(\varepsilon)-\widetilde{\vartheta}_\varepsilon+\sum_{n=2}^{\infty}R_n(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)\overset{as}{=}:H(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon),\tag{3.16}$$

где

$$R_0(\varepsilon)=\sin\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}\frac{\langle x^0,Jy^0\rangle}{\|x^0\|}+\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}\frac{\langle x^0,y^0\rangle}{\|x^0\|},$$

а $R_n(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)$ (при $n\geqslant 2$) имеют структуру (3.15).

Для получения асимптотики решения такого уравнения воспользуемся следующим асимптотическим аналогом теоремы о функции, заданной неявно.

Теорема 3. *Пусть функция $H(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ разлагается в степенной асимптотический ряд (3.16) при $\varepsilon\to+0$, непрерывна по $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon$ при каждом $\varepsilon\in E_\alpha$ (3.10).*

Тогда существует такое $\varepsilon_1>0$, что при всех $\varepsilon\in E_\alpha\cap(0,\varepsilon_1)$ уравнение $0=H(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)$ имеет решение $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon=o(1)$ при $\varepsilon\to+0$ и оно разлагается в степенной асимптотический ряд

$$\widetilde{\vartheta}_\varepsilon\overset{as}{=}\varepsilon R_0(\varepsilon)+\sum_{n=2}^{\infty}\varepsilon^n f_n(\varepsilon),\ \textit{где}\ f_n(\varepsilon)=O(1)\ \textit{при}\ \varepsilon\in E_\alpha.\tag{3.17}$$

При этом все такие решения уравнения $0=H(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)$ асимптотически равны, т. е. если $H(\varepsilon,\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)=0=H(\varepsilon,\overline{\vartheta}_\varepsilon)$, $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon=o(1)$ и $\overline{\vartheta}_\varepsilon=o(1)$ при $\varepsilon\to+0$, то $(\widetilde{\vartheta}_\varepsilon-\overline{\vartheta}_\varepsilon)\overset{as}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\cdot 0$ при $\varepsilon\to+0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 из [10]. □

Замечание 2. В силу утверждения 2 имеем

$$T_\varepsilon-T_0=O(\varepsilon),\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),$$

без дополнительных условий на ε.

Теперь из (2.7) по разложению $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon$ получается разложение вектора l_ε по степеням ε в смысле Эрдейи [14, Definition 2.4].

Утверждение 3. *Справедливо неравенство* $\mu((0,\varepsilon_0)\setminus E_\alpha)\leqslant K\alpha^2$, *где множества* E_α *определены в* (3.10), $\mu(M)$ — *мера Лебега множества* M, K — *некоторая постоянная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности будем считать, что $\varepsilon_0=T_0/(2\pi)$. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n=T_0/(2\pi n)$. Из формулы (3.2) следует, что $\delta_{\varepsilon_n}=0$. Отметим, что неравенство $(\delta_\varepsilon(2\pi-\delta_\varepsilon))/\pi^2\geqslant\alpha^2$ выполняется при

$$\delta_2(\alpha):=\pi-\pi\sqrt{1-\alpha^2}\leqslant\delta_\varepsilon\leqslant\pi+\pi\sqrt{1-\alpha^2}=:\delta_1(\alpha).$$

При любом натуральном k на промежутке $\varepsilon\in(\varepsilon_{k+1},\varepsilon_k]$ имеем $T_0=2\pi\varepsilon k+\varepsilon\delta_\varepsilon$, следовательно,

$$\delta_\varepsilon=\frac{T_0}{\varepsilon}-2\pi k.$$

Обозначим

$$\varepsilon_{i,k}:=\frac{T_0}{\delta_i+2\pi k},\quad i=1,2.$$

Тогда

$$\mu((0,\varepsilon_0)\setminus E_\alpha)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k-\varepsilon_{2,k}+\varepsilon_{1,k}-\varepsilon_{k+1})$$
$$=\frac{T_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1-\sqrt{1-\alpha^2}}+\frac{1}{2k+1+\sqrt{1-\alpha^2}}-\frac{1}{2(k+1)}\right)\leqslant\frac{T_0\alpha^2}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{T_0\pi}{12}\,\alpha^2.$$

□

4. Примеры

1. Рассмотрим задачу (1.1) с $m=2$ и

$$x^0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad y^0=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad Jy^0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Отметим, что для таким образом выбранных векторов справедливы соотношения

$$x^0\perp Jy^0,\quad \|x^0\|=1,\quad \langle x^0,y^0\rangle=-1,\quad \|y^0\|^2=\|Jy^0\|^2=2.$$

Пусть на некотором множестве $\widetilde{E}\subset(0,\varepsilon_0)$ таком, что 0 является его предельной точкой, справедливо соотношение (3.11) и, как следствие, равенство (3.12). В частности, $\widetilde{E}\subset(0,\varepsilon_0)$ может быть равно E_α.

Преобразуем первое слагаемое в правой части уравнения (3.13)

$$\|x^0+\varepsilon^2(1-\cos(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon))Jy^0+\varepsilon^2\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)\,y^0\|$$
$$=\Big(1-2\varepsilon^2\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)+2\varepsilon^4(1-\cos(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon))^2+2\varepsilon^4\sin^2(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)\Big)^{1/2}$$
$$=1-\varepsilon^2\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)+O(\varepsilon^4),\quad \varepsilon\to+0,$$

и запишем (3.13) в виде

$$0=O(\varepsilon^4)-\varepsilon^2\sin(\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon)-4\varepsilon\Big(\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}-\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0+\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}{2}\Big).\qquad(4.1)$$

Согласно утверждению 2 при $\varepsilon \to +0$ справедливы соотношения

$$\sin(\delta_\varepsilon + \vartheta_0 + \widetilde{\vartheta}_\varepsilon) = \sin(\delta_\varepsilon + \vartheta_0) + \widetilde{\vartheta}_\varepsilon \cos(\delta_\varepsilon + \vartheta_0) + O(\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^2),$$
$$\cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2} - \cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0 + \widetilde{\vartheta}_\varepsilon}{2} = \frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon}{2}\sin\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2} + \frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^2}{8}\cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2} + O(\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^3). \tag{4.2}$$

Тогда, в силу формул (4.2) соотношение (4.1) после деления обеих частей на ε примет вид

$$0 = O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^2 + \widetilde{\vartheta}_\varepsilon^3) - 2\varepsilon\sin\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}\cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}$$
$$-\varepsilon\widetilde{\vartheta}_\varepsilon\Big(1 - 2\sin^2\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}\Big) - 2\widetilde{\vartheta}_\varepsilon\sin\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2} - \frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^2}{2}\cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}. \tag{4.3}$$

Алгоритм построения $\vartheta_1(\varepsilon)$ и $\vartheta_2(\varepsilon)$, соответствующий теореме 3 и заключающийся в выписывании уравнений сначала для слагаемых порядка $O(\varepsilon)$, затем — для $O(\varepsilon^2)$, в данном примере дает следующие формулы:

$$0 = -2\varepsilon\sin\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}\cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2} - 2\vartheta_1\sin\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}.$$

Отсюда

$$\vartheta_1 = -\varepsilon\cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2} =: \varepsilon f_1(\varepsilon), \quad f_1(\varepsilon) = -\cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2} = O(1).$$

Для определения $\vartheta_2(\varepsilon)$ получим уравнение

$$0 = \varepsilon^2\cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}\Big(1 - 2\sin^2\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}\Big) - 2\vartheta_2\sin\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^3\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}.$$

Значит,

$$\vartheta_2 = \varepsilon^2\frac{\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}\Big(1 - 3\sin^2\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}\Big)}{4\sin\dfrac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}} =: \varepsilon^2 f_2(\varepsilon). \tag{4.4}$$

Таким образом, равномерно при $\varepsilon \in E_\alpha$

$$T_\varepsilon = T_0 + \varepsilon\vartheta_0 - \varepsilon^2\cos\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2} + \varepsilon^3\frac{\cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0}{2}\Big(1 - 3\sin^2\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}\Big)}{4\sin\dfrac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0}{2}} + O(\varepsilon^4).$$

2. Если же

$$\sin\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0(\varepsilon)}{2} \longrightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \in \widetilde{E},\ \varepsilon \to +0,$$

то $f_2(\varepsilon)$, определенная в (4.4), не является ограниченной, поскольку $f_2(\varepsilon) \longrightarrow \infty$ при $\varepsilon \in \widetilde{E}$, $\varepsilon \to +0$.

Таким образом, на всем промежутке $(0, \varepsilon_0)$ при $\varepsilon \to +0$ описанный в теореме 3 алгоритм построения разложения неприменим (даже если знаменатель в формуле (4.4) на $\widetilde{E}$ отличен от нуля).

Рассмотрим в качестве $\widetilde{E}$ множество тех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, для которых наряду с (3.11) выполняется следующее равенство:

$$\sin\frac{\delta_\varepsilon + \vartheta_0(\varepsilon)}{2} = \frac{\sqrt{\delta_\varepsilon(2\pi - \delta_\varepsilon)}}{\pi} = \sqrt{\varepsilon}. \tag{4.5}$$

Отметим, что при указанном выборе $\widetilde{E}$ имеем

$$\delta_\varepsilon+\vartheta_0(\varepsilon)=2\sqrt{\varepsilon}+O(\varepsilon)\to+0,\quad \cos\frac{\delta_\varepsilon+\vartheta_0(\varepsilon)}{2}=\sqrt{1-\varepsilon}\to\ 1,\quad \varepsilon\in\widetilde{E},\quad \varepsilon\to+0.$$

Поэтому в предположении $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon=O(\varepsilon)$ при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ выполняется включение (3.11). В силу (3.11) на $\widetilde{E}$ справедливо соотношение (4.3), которое с учетом предположения (4.5) приобретает вид

$$O(\varepsilon^3)=-2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon}-\varepsilon(1-2\varepsilon)\widetilde{\vartheta}_\varepsilon-2\sqrt{\varepsilon}\widetilde{\vartheta}_\varepsilon-\frac{\widetilde{\vartheta}_\varepsilon^2}{2}\sqrt{1-\varepsilon}.$$

Отсюда, выбирая подходящий корень квадратного уравнения, получим

$$\widetilde{\vartheta}_\varepsilon=-\varepsilon+\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{4}+\frac{\varepsilon^2}{2}+O(\varepsilon^{2.5}),\quad \varepsilon\in\widetilde{E},\quad \varepsilon\to+0,$$

$$T_\varepsilon=T_0+\varepsilon\vartheta_0-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}}{4}+\frac{\varepsilon^3}{2}+O(\varepsilon^{3.5}).$$

Отметим, что асимптотическое разложение $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon$ на $\widetilde{E}$ получается из асимптотического равенства, аналогичного (3.16): $0=\varepsilon R_0(\varepsilon)-\widetilde{\vartheta}_\varepsilon+\varepsilon\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}R_n$. Поэтому $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon$ раскладывается на $\widetilde{E}$ в асимптотический ряд по $\{\varepsilon^{n/2}\}$.

3. В случае

$$y^0=0$$

уравнение (2.3) преобразуется к виду

$$0=\|l_\varepsilon\|x^0+2\int\limits_0^{T_\varepsilon}\Big|\sin\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big|d\tau\cdot l_\varepsilon. \tag{4.6}$$

Из соотношения (4.6) следует, что при каждом $\varepsilon>0$ вектор l_ε коллинеарен вектору x^0; кроме того, при дополнительном условии нормировки $\|l_\varepsilon\|=1$ справедливо $l_\varepsilon\equiv-\dfrac{x^0}{\|x^0\|}=l_0$. Оптимальное время вычисляется по формуле

$$T_\varepsilon=T_0+\vartheta_0=T_0+2\varepsilon\Big(\arccos\Big(1-\frac{\delta_\varepsilon}{\pi}\Big)-\delta_\varepsilon\Big),$$

где T_0, l_0, δ_ε, ϑ_0 определяются из соотношений (2.11), (1.7), (3.3), (3.8) соответственно, а оптимальное управление можно найти по формуле (2.4).

5. Заключение

Отметим две отличительные особенности решения задачи (1.1), (1.6) по сравнению с задачей быстродействия для такой же управляемой системы (в случае $m=1$), но с началом координат в качестве целевого множества, исследованной авторами ранее. Во-первых, в задаче с неограниченным целевым множеством предельное время T_0 строго меньше оптимального времени $T_в$ в вырожденной задаче. Во-вторых, оптимальное время T_ε не раскладывается в степенной ряд в смысле Пуанкаре. Получено асимптотическое разложение в смысле Эрдейи [14, Definition 2.4] по степенной асимптотической последовательности при $\varepsilon\in E_\alpha$, $\varepsilon\to+0$. При этом показано, что в общем случае вид асимптотического разложения решения задачи (1.1) существенно зависит от множества, по которому ε стремится к нулю.

Авторы благодарят Рецензента за ценные замечания, позволившие улучшить изложение результатов данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** // Математическая теория оптимальных процессов. М. : Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
3. **Zhang Y., Naidu D.S., Chenxiao Cai and Yun Zou** Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002-2012 // Inter. journal of informaton and systems sciences. 2014. vol. 9, no. 1. pp. 1–36.
4. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. vol. 20, no. 1. pp. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852 .
5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. **Donchev A.L., Veliev V.M.** Singular Perturbation in Mayer's Problem for Linear Systems // SIAM J. Control Optim. 1983. vol. 21, no. 4. pp. 566–581.
7. **Курина Г.А., Нгуен Т.Х.** Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 4. С. 628–652.
8. **Kurina G.A., Hoai N.T.** Projector Approach for Constructing the Zero Order Asymptotic Solution for the Singularly Perturbed Linear-Quadratic Control Problem in a Critical Case // AIP Conference Proceedings. 2018. vol. 1997. pp. 020073. doi: 10.1063/1.5049067 .
9. **Калашникова М.А., Курина Г.А.** Прямая схема асимптотического решения линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 1. С. 83–102.
10. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи быстродействия перевода объекта на множество // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 132–146. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-132-146 .
11. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О зависимости задачи быстродействия для линейной системы от двух малых параметров // Вест. ЧелГУ. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып. 14.)
12. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
13. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
14. **Erdelyi A., Wyman M.** The asymptotic evaluation of certain integrals // Arch. Ration. Mech. Anal. 1963. Vol. 14. P. 217–260.

Поступила 11.01.2021
После доработки 23.01.2021
Принята к публикации 1.02.2021

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна, канд. физ.-мат. наук,
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: koo@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt. N Y; London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc.,

1962, 360 p. ISBN: 0470693819 . Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.

2. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. doi: 10.1134/S0005117906010012 .
3. Zhang Y., Naidu D.S., Chenxiao Cai and Yun Zou. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002-2012. *Inter. journal of informaton and systems sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.
4. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852 .
5. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analisis of optimal control systems.* Berlin; Heidelber;, N Y; Tokio: Springer-Verlag, 1983, 161 p. doi: 10.1007/BFb0043612 . Translated to Russian under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti.* Moscow: Mir Publ., 1987, 156 p.
6. Donchev A.L., Veliev V.M. Singular Perturbation in Mayer's Problem for Linear Systems. *SIAM J. Control Optim.*, 1983, vol. 21, no. 4, pp. 566–581. doi: 10.1137/0321034 .
7. Kurina G.A., Nguyen T.H. Asymptotic solution of singularly perturbed linear-quadratic optimal control problems with discontinuous coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 524–547. doi: 10.1134/S0965542512040100 .
8. Kurina G.A., Hoai N.T. Projector Approach for Constructing the Zero Order Asymptotic Solution for the Singularly Perturbed Linear-Quadratic Control Problem in a Critical Case. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1997, art.-no. 020073. doi: 10.1063/1.5049067 .
9. Kalashnikova M.A., Kurina G.A. Direct scheme for the asymptotic solution of linear-quadratic problems with cheap controls of different costs. *Differ. Eq.*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 84–104. doi: 10.1134/S0012266119010099 .
10. A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to a singularly perturbed time-optimal control problem of transferring an object to a set, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 132–146 (in Russian) . doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-132-146 .
11. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. On the dependence of the time-optimal control problem for a linear system of two small parameters. *Vest. Chelyabinskogo Univer., Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2011, vol. 14, no. 27, pp. 46–60 (in Russian).
12. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
13. Blagodatskikh V.I. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie* (Introduction to Optimal Control). Moscow: Vysshaya shkola Publ., 2001, 239 p. ISBN: 5-06-003983-8 .
14. Erdelyi A., Wyman M. The Asymptotic Evaluation of Certain Integral. *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1963, vol. 14, pp. 217–260. doi: 10.1007/BF00250704 .

Received January 11, 2021
Revised January 23, 2021
Accepted February 1, 2021

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of the optimal time of transferring a linear control system with zero real parts of the eigenvalues of the matrix at the fast variables to an unbounded target set, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 48–61 .