ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 517.929.7, 517.929.8, 517.984

СХОДИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА СТЕКЛОВА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАМЭ

Д. Б. Давлетов, О. Б. Давлетов, Р. Р. Давлетова, А. А. Ершов

Исследуется краевая задача типа Стеклова для оператора Ламэ в полуполосе, содержащей малое отверстие. На боковых границах полуполосы и на границе малого отверстия заданы однородные граничные условия Дирихле, а на основании полуполосы задано спектральное условие Стеклова. Доказана теорема о сходимости собственных элементов такой краевой задачи к решению предельной задачи (в полуполосе без отверстия) при стремлении к нулю малого параметра $\varepsilon > 0$, характеризующего диаметр отверстия. Для доказательства теоремы было введено пространство бесконечно дифференцируемых вектор-функций, обладающих конечным интегралом Дирихле по полуполосе, и доказан ряд вспомогательных утверждений. Интеграл Дирихле для вектор-функции определен как сумма интегралов Дирихле компонент. Во вспомогательных утверждениях, в частности, доказано, что из слабой сходимости в метрике введенного пространства последовательности вектор-функций, определенных на полуполосе, следует сходимость их сужений на основание полуполосы в метрике пространства L_2. Кроме того, доказано, что для решений краевых задач типа Стеклова для оператора Ламэ в полуполосе с малым отверстием из слабой сходимости сужений на основание полуполосы вытекает сильная сходимость в той же области. Для каждого значения параметра ε определен оператор сужения решений рассматриваемых краевых задач на основание полуполосы. Также доказана сходимость последовательности операторов, обратных к операторам сужения при $\varepsilon \to 0$. Физическая интерпретация решения исследуемой в статье сингулярно возмущенной краевой задачи состоит в том, что это решение представляет собой вектор деформации упругой однородной изотропной среды, заполняющей двумерную область с малым отверстием. Уравнение Ламэ — это уравнение равновесия, при выполнении которого возможно сохранение неподвижного состояния упругой среды в форме пластины. Граничные условия Дирихле на боковых границах полуполосы и на границе малого отверстия соответствуют жесткому закреплению упругой пластины. Заданное на основании полосы спектральное условие Стеклова представляет собой сложное упругое закрепление. Собственные значения и собственные вектор-функции краевой задачи характеризуют возможные собственные колебания упругой пластины.

Ключевые слова: краевая задача, спектральное условие Стеклова, оператор Ламэ, собственные элементы, малый параметр.

D. B. Davletov, O. B. Davletov, R. R. Davletova, A. A. Ershov. Convergence of eigenelements in a Steklov type boundary value problem for the Lamé operator.

A Steklov type boundary value problem is studied for the Lamé operator in a half-strip with a small hole. On the lateral boundaries of the half-strip and on the boundary of the small hole, homogeneous Dirichlet boundary conditions are specified, and the Steklov spectral condition is specified on the base of the half-strip. A theorem is proved on the convergence of the eigenelements of this problem to the solution of the limit problem (in the half-strip without a hole) as a small parameter $\varepsilon > 0$ characterizing the diameter of the hole tends to zero. To prove the theorem, we introduce the space of infinitely differentiable vector functions with a finite Dirichlet integral over the half-strip and prove a number of auxiliary statements. The Dirichlet integral for a vector function is defined as the sum of the Dirichlet integrals of the components. Among the auxiliary statements, in particular, it is proved that the weak convergence in the metric of the introduced space of a sequence of functions defined on the half-strip implies the convergence of their restrictions to the base of the half-strip in the metric of the space L_2. In addition, it is proved that, for the solutions of Steklov type boundary value problems for the Lamé operator in a half-strip with a small hole, the weak convergence of the restrictions to the base of the half-strip implies strong convergence in the same domain. For each value of the parameter ε, an operator is defined for the restriction of the solutions of the considered boundary value problems to the base of the half-strip. The convergence of the sequence of inverses of the restriction operators is also proved as $\varepsilon \to 0$. A physical interpretation of the solution of the singularly perturbed boundary value problem considered in the paper is that this solution simulates the deformation vector of an elastic homogeneous isotropic medium filling a two-dimensional region with a small hole. The Lamé equation is an equilibrium equation under which a stationary state of an elastic medium in the form of a plate can be maintained. The Dirichlet boundary conditions at the lateral boundaries of the half-strip and at the boundary of the small hole can be interpreted as a rigid fixation of the elastic plate. The spectral Steklov condition specified at the base of the strip is a complex elastic fixation. The eigenvalues and the corresponding eigenvector functions of the boundary value problem characterize the possible natural vibrations of the elastic plate.

Keywords: boundary value problem, Steklov spectral condition, Lamé operator, eigenelements, small parameter.

MSC: 35J25, 35P20

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-37-47

Введение

Одним из классов краевых задач, которые успешно решаются с применением асимптотических методов, являются сингулярно возмущенные краевые задачи. К таким задачам относятся, например, краевые задачи в областях с малыми отверстиями, задачи со сменой типа граничного условия на малом участке границы, краевые задачи в перфорированных областях и мн. др. (см., например, работы [1–7]).

Исследуемая в данной статье краевая задача относится к классу сингулярно возмущенных краевых задач на собственные значения для оператора Ламэ в области с малым отверстием.

Изучением краевых задач для эллиптических операторов в областях с малыми отверстиями занимались многие математики [8–12]. Краевым задачам для эллиптических операторов теории упругости в ограниченных областях с малыми отверстиями посвящены работы [13; 14] (см. также [15] и список литературы в ней). В статье [14] построены полные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных краевых задач для эллиптического оператора линейной теории упругости в случае краевых условий Неймана на границе области с малой полостью. В [16] даны полные асимптотические разложения собственных значений задачи Стеклова для оператора Лапласа в области с малым отверстием. Возникновение собственных значений из края существенного спектра для цилиндров с малыми отверстиями и граничными условиями Дирихле на границах этих малых отверстий исследовалось в работах [17; 18].

В настоящей работе рассматривается векторная сингулярно возмущенная краевая задача типа Стеклова для оператора Ламэ в полуполосе, содержащей малое отверстие. На боковых границах и на границе малого отверстия заданы условия Дирихле, а на основании полуполосы — спектральное условие Стеклова. Для данной задачи доказана теорема о сходимости собственных элементов при стремлении к нулю малого параметра ε, определяющего диаметр отверстия.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $\Omega = (-b, b)$, $\Pi = \Omega \times (a, +\infty)$, $-\infty < a < 0$, $0 < b < +\infty$, $\Omega_a = \Omega \times \{a\}$, начало координат лежит в $\Pi \cap \omega$, где $\omega \subset \mathbb{R}^2$ — связная ограниченная область с гладкой границей $\partial\omega$, $\omega_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} : \varepsilon^{-1}\boldsymbol{x} \in \omega\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\Pi_\varepsilon = \Pi \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$. Через $\triangle^*$ обозначим оператор Ламэ:

$$\Delta^* := \triangle + \alpha\, \nabla\, \mathrm{div},$$

где $\alpha = (\lambda + \mu)/\mu$, λ, $\mu > 0$ — постоянные Ламэ (см., например, [19, формулы (5.9)]). Рассматривается следующая сингулярно возмущенная краевая задача Стеклова:

$$\begin{cases} \Delta^* \boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \Pi_\varepsilon, \\ \boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}} = \lambda_\varepsilon \boldsymbol{\psi}_\varepsilon, & \boldsymbol{x} \in \Omega_a, \\ \boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \partial\omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль. Для (1.1) назовем предельной следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta^* \boldsymbol{\psi}_0 = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \Pi, \\ \boldsymbol{\psi}_0 = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}_0}{\partial \boldsymbol{n}} = \lambda_0 \boldsymbol{\psi}_0, & \boldsymbol{x} \in \Omega_a. \end{cases} \tag{1.2}$$

В силу [20, гл. III, §1, п. 1.1, теорема 1.2] собственные значения предельной краевой задачи (1.2) имеют следующую общую структуру:

$$0 < \lambda_{0,1} \leqslant \lambda_{0,2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{0,k} \leqslant \ldots, \tag{1.3}$$

где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть отрезок* $[\lambda_-, \lambda_+]$ *не содержит собственных значений предельной краевой задачи* (1.2). *Тогда при достаточно малых* ε *этот отрезок не содержит и собственных значений сингулярно возмущенной краевой задачи* (1.1).

Пусть кратность собственного значения λ_0 *предельной краевой задачи* (1.2) *равна* d. *Тогда существует ровно* d *собственных значений* $\lambda_\varepsilon^{(l)}$, $l = \overline{1,d}$ *(с учетом кратности) краевой задачи* (1.1), *сходящихся к* λ_0 *при* $\varepsilon \to 0$.

Пусть $R_\varepsilon \colon L_2(\Omega_a) \mapsto L_2(\Omega_a)$ — *линейный оператор, ставящий в соответствие вектор-функции* $\boldsymbol{f}_\varepsilon \in L_2(\Omega_a)$ *сужение решения* $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ *краевой задачи*

$$\begin{cases} \Delta^* \boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \Pi_\varepsilon, \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}} + \boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{f}_\varepsilon, & \boldsymbol{x} \in \Omega_a, \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \partial\omega_\varepsilon \end{cases} \tag{1.4}$$

на Ω_a, *а* $R_0 \colon L_2(\Omega_a) \mapsto L_2(\Omega_a)$ — *линейный оператор, ставящий в соответствие вектор-функции* $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega_a)$ *сужение решения* $\boldsymbol{u}_0$ *краевой задачи*

$$\begin{cases} \Delta^* \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \Pi, \\ \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x} \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{n}} + \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{f}, & \boldsymbol{x} \in \Omega_a \end{cases} \tag{1.5}$$

на Ω_a:

$$R_0 \boldsymbol{f} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}_k)_{L_2(\Omega)}}{\mu_k + 1} \boldsymbol{\varphi}_k(x_1), \tag{1.6}$$

где $\mu_k = \lambda_{0,k}^2$ *из* (1.3), *а вектор-функции* $\boldsymbol{\varphi}_k(x_1)$ *образуют ортонормированную систему в* $L_2(\Omega_a)$. *Тогда для соответствующих собственных проекторов* $\mathcal{R}_\varepsilon := R_\varepsilon^{-1}$ *и* $\mathcal{R}_0 := R_0^{-1}$ *в* $L_2(\Omega_a)$ *имеет место сходимость* $\mathcal{R}_\varepsilon \to \mathcal{R}_0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

2. Вспомогательные утверждения

Определим пространство $H^1(\Pi)$ как пополнение по норме

$$\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Pi)} = \left(\int\limits_{\Pi} |\nabla \boldsymbol{w}|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} |\boldsymbol{w}|^2 \, dx_1 \right)^{1/2}$$

вектор-функций из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обладающих конечным интегралом Дирихле $\int\limits_{\Pi} |\nabla \boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} < \infty$, где

$$\int\limits_{\Pi} |\nabla \boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} := \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Pi} |\nabla w_i|^2 d\boldsymbol{x}.$$

Подмножество вектор-функций из $H^1(\Pi)$, обращающихся в нуль на $\partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a$, обозначим через $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Пространство $H^1(\Pi_\varepsilon)$ определим как пополнение по норме

$$\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Pi_\varepsilon)} = \left(\int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{w}|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} |\boldsymbol{w}|^2 \, dx_1 \right)^{1/2} \tag{2.1}$$

функций из $C^\infty(\overline{\Pi}_\varepsilon)$, обладающих конечным интегралом Дирихле $\int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} < \infty$. Здесь

$$\int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} := \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla w_i|^2 d\boldsymbol{x}.$$

Подмножество вектор-функций из $H^1(\Pi_\varepsilon)$, обращающихся в нуль на $\partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a$, обозначим через $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$.

Очевидно, что если вектор-функцию, принадлежащую $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$, продолжить нулем в $\overline{\omega}_\varepsilon$, то она будет принадлежать $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Поэтому всюду далее для этих продолжений будем сохранять их первоначальные обозначения.

Обозначим

$$\nabla \boldsymbol{U} \nabla \boldsymbol{V} := \sum_{i=1}^{2} \nabla U_i \nabla V_i.$$

Краевые задачи (1.4) и (1.5) будем понимать в обобщенном смысле. Пусть $\boldsymbol{f}_\varepsilon, \boldsymbol{f} \in L_2(\Omega_a)$. Тогда $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ называется обобщенным решением краевой задачи (1.4), если для любого $\boldsymbol{v} \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\Pi_\varepsilon} (\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon \nabla \boldsymbol{v} + \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} \boldsymbol{u}_\varepsilon \boldsymbol{v} dx_1 = \int\limits_{\Omega_a} \boldsymbol{f}_\varepsilon \boldsymbol{v} dx_1. \tag{2.2}$$

Аналогично элемент $\boldsymbol{u}_0 \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ называется обобщенным решением краевой задачи (1.5), если для любого $\boldsymbol{v} \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{\Pi} (\nabla \boldsymbol{u}_0 \nabla \boldsymbol{v} + \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} \boldsymbol{u}_0 \boldsymbol{v} dx_1 = \int\limits_{\Omega_a} \boldsymbol{f} \boldsymbol{v} dx_1. \tag{2.3}$$

Собственные вектор-функции $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ и $\boldsymbol{\psi}_0$ краевых задач (1.1), (1.2) рассматриваются в классах $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ и $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ соответственно.

Подставляя $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_\varepsilon$ в (2.2) и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_0$ в (2.3), получаем априорные оценки

$$\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \leqslant \|\boldsymbol{f}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \|\boldsymbol{u}_0\|_{H^1(\Pi)} \leqslant \|\boldsymbol{f}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.4}$$

из которых вытекает единственность решений краевых задач (1.4) и (1.5).

Следуя методу разделения переменных, решение краевой задачи (1.5) можно представить в виде

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}_k)_{L_2(\Omega)}}{\mu_k + 1} \boldsymbol{\varphi}_k(x_1) \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_k}(x_2 - a)}, \tag{2.5}$$

где вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}_k(x_1)$ образуют ортонормированную систему в $L_2(\Omega)$. Правая часть равенства (2.5) представляет собой ряд Фурье (см., например, [21, гл. 2, § 2, п. 6, лемма 2]), сходящийся к $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ в $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$.

Осталось показать разрешимость краевой задачи (1.4). Для этого предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть*

$$(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v})_1 := \int\limits_{\Pi_\varepsilon} (\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon \nabla \boldsymbol{v} + \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} \boldsymbol{u}_\varepsilon \boldsymbol{v} dx_1. \tag{2.6}$$

Тогда соотношение (2.6) *можно принять за скалярное произведение в* $H^1(\Pi_\varepsilon)$, *индуцирующее новую норму*

$$\|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_1 = \left(\int\limits_{\Pi_\varepsilon} \left(|\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 + \alpha \ |\mathrm{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \right) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, dx_1 \right)^{1/2}$$

в $H^1(\Pi_\varepsilon)$, *которая будет эквивалентна старой норме* (2.1).

Доказательство. Для установления справедливости леммы 1 (см., например, [21, гл. 4, § 2, п. 4]) достаточно показать существование констант $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ таких, что неравенства

$$\begin{aligned} &C_1^2 \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{H^1(\Pi_\varepsilon)} \le \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_1^2, \\ &\|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_1^2 \le C_2^2 \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{H^1(\Pi_\varepsilon)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

имеют место для всех $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \in H^1(\Pi_\varepsilon)$. Предварительно приведем очевидное неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i \right)^2 \le 2 \sum_{i=1}^{2} a_i^2. \tag{2.8}$$

С учетом (2.8) последовательно получаем

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_1^2 &= \int\limits_{\Pi_\varepsilon} \left(|\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 + \alpha \, |\mathrm{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \right) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, dx_1 \\ &= \int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, d\boldsymbol{x} + \alpha \int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\mathrm{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, dx_1 \\ &\leqslant \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{H^1(\Pi_\varepsilon)} + 2\alpha \int\limits_{\Pi_\varepsilon} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial u_{i_\varepsilon}}{\partial x_i} \right)^2 d\boldsymbol{x} \\ &\leqslant \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{H^1(\Pi_\varepsilon)} + 2\alpha \int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, d\boldsymbol{x} \\ &\leqslant \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{H^1(\Pi_\varepsilon)} + 2\alpha \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{H^1(\Pi_\varepsilon)} = (1 + 2\alpha) \, \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{H^1(\Pi_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется второе из неравенств в (2.7) при $C_2^2 = 1 + 2\alpha > 0$. Покажем теперь, что выполняется первое из неравенств в (2.7). В самом деле,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_1^2 &= \int\limits_{\Pi_\varepsilon} \left(|\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 + \alpha \, |\mathrm{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \right) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, dx_1 \\ &= \int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, d\boldsymbol{x} + \alpha \int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\mathrm{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, dx_1 \\ &\geqslant \int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 \, dx_1 = \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{H^1(\Pi_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется первое из неравенств в (2.7) при $C_1^2 = 1$. □

С учетом (2.6) равенство (2.2) перепишется в виде

$$(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v})_1 = \int\limits_{\Omega_a} \boldsymbol{f}_\varepsilon \boldsymbol{v} dx_1. \tag{2.9}$$

При любом фиксированном $\boldsymbol{f}_\varepsilon \in L_2(\Omega)$ правая часть в (2.9) является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Pi_\varepsilon;\partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Тогда в силу теоремы Рисса (см., например, [21, гл. 2, § 3, п. 2, теорема 1]) существует единственный элемент $\boldsymbol{F}_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon;\partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ такой, что $\int\limits_{\Omega_a} \boldsymbol{f}_\varepsilon \boldsymbol{v} dx_1 = (\boldsymbol{F}_\varepsilon, \boldsymbol{v})_1$ для любого $\boldsymbol{v} \in H^1(\Pi_\varepsilon;\partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Отсюда и из (2.9) следует, что $\boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{F}_\varepsilon$. Итак, краевая задача (1.4) однозначно разрешима.

Напомним, что $R_\varepsilon\colon L_2(\Omega_a) \mapsto L_2(\Omega_a)$ — линейный оператор, ставящий в соответствие вектор-функции $\boldsymbol{f}_\varepsilon$ сужение решения $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ краевой задачи (1.4) на Ω_a, а $R_0\colon L_2(\Omega_a) \mapsto L_2(\Omega_a)$ — линейный оператор, ставящий в соответствие вектор-функции $\boldsymbol{f}$ сужение решения $\boldsymbol{u}_0$ краевой задачи (1.5) на Ω_a (см. (2.5)), т. е. справедливо (1.6).

Поскольку $\boldsymbol{f}_k \rightharpoonup \boldsymbol{f}$ в $L_2(\Omega_a)$ при $k \to \infty$ и оператор R_0 компактен в силу компактности вложения $H^1(\Pi)$ в $L_2(\Omega_a)$, то имеет место сходимость

$$R_0\boldsymbol{f}_k \to R_0\boldsymbol{f} \quad \text{в} \quad L_2(\Omega_a) \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Лемма 2. *Пусть $\boldsymbol{v}$ — произвольная вектор-функция из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обращающаяся в нулевой вектор на $\partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a$, обладающая конечным интегралом Дирихле. Тогда существуют вектор-функции $\boldsymbol{v}_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon;\partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ такие, что $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности будем считать, что область ω_ε лежит в круге $B_\varepsilon \subset \Pi$ радиуса ε с центром в начале координат. Определим срезающую функцию $\chi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \in H^1(\Pi)$ следующим образом:

$$\chi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{x}| \leqslant \exp\left(-(1+\sqrt{-\ln\varepsilon})^2\right), \\ \sqrt{-\ln|\boldsymbol{x}|} - \sqrt{-\ln\varepsilon}, & \exp\left(-(1+\sqrt{-\ln\varepsilon})^2\right) \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |\boldsymbol{x}| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что при $\varepsilon \to 0$ имеют место сходимости

$$\|\chi_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_a)} \to 0, \quad \|\chi_\varepsilon\|_{L_2(\Pi)} \to 0 \quad \text{и } \|\nabla\chi_\varepsilon\|_{L_2(\Pi)} \to 0. \tag{2.10}$$

Действительно, в полярных координатах r, φ (удовлетворяющих соотношениям $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$) срезающую функцию можно записать в виде

$$\chi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \varkappa_\varepsilon(|\boldsymbol{x}|) = \varkappa_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1, & r \leqslant \exp\left(-(1+\sqrt{-\ln\varepsilon})^2\right), \\ \sqrt{-\ln r} - \sqrt{-\ln\varepsilon}, & \exp\left(-(1+\sqrt{-\ln\varepsilon})^2\right) \leqslant r \leqslant \varepsilon, \\ 0, & r \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Соответственно

$$\|\nabla\chi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Pi)} = \iint\limits_{\Pi} \left|\nabla\varkappa_\varepsilon(|\boldsymbol{x}|)\right|^2 dx_1dx_2 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\frac{\partial\varkappa_\varepsilon(|\boldsymbol{x}|)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varkappa_\varepsilon(|\boldsymbol{x}|)}{\partial x_2}\right)^2 \right) dx_1dx_2$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\varkappa'_\varepsilon(r)\cdot\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)^2 + \left(\varkappa'_\varepsilon(r)\cdot\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)^2 \right) dx_1dx_2 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\varkappa'_\varepsilon(r)\right)^2 dx_1dx_2$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} r\left(\varkappa'_\varepsilon(r)\right)^2 dr = 2\pi \int\limits_{e^{-(1+\sqrt{-\ln\varepsilon})^2}}^{\varepsilon} r\left(\varkappa'_\varepsilon(r)\right)^2 dr = 2\pi \int\limits_{e^{-(1+\sqrt{-\ln\varepsilon})^2}}^{\varepsilon} r\left(\frac{1}{2r\sqrt{-\ln r}}\right)^2 dr$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int\limits_{e^{-(1+\sqrt{-\ln\varepsilon})^2}}^{\varepsilon} \frac{dr}{r\ln r} = -\frac{\pi}{2} \int\limits_{e^{-(1+\sqrt{-\ln\varepsilon})^2}}^{\varepsilon} \frac{d\ln r}{\ln r} = \frac{\pi}{2}\ln|\ln r|\Big|_{r=\varepsilon}^{e^{-(1+\ln\sqrt{-\varepsilon})^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\ln(1+\sqrt{-\ln\varepsilon})^2 - \ln(-\ln\varepsilon)\right) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1+2\sqrt{-\ln\varepsilon}-\ln\varepsilon}{-\ln\varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon\to 0.$$

Очевидно, что первая и вторая сходимости из (2.10) также выполняются.

Пусть $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условиям доказываемой леммы. Тогда вектор-функции $\boldsymbol{v}_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := (1-\chi_\varepsilon(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ принадлежат пространству $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$.

В силу определения вектор-функции $\boldsymbol{v}_\varepsilon$, неравенства Коши — Буняковского и сходимостей (2.10) получаем, что при $\varepsilon\to 0$ имеет место следующая сходимость:

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_\varepsilon\|^2_{H^1(\Pi)} = \|\chi_\varepsilon\boldsymbol{v}\|^2_{H^1(\Pi)} = \|\nabla(\chi_\varepsilon\boldsymbol{v})\|^2_{L_2(\Pi)} + \|\chi_\varepsilon\boldsymbol{v}\|^2_{L_2(\Omega_a)}$$

$$\leqslant C_1\|\chi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Pi)} + C_2\|\nabla\chi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Pi)} + C_3\|\chi_\varepsilon\|_{L_2(\Pi)}\|\nabla\chi_\varepsilon\|_{L_2(\Pi)} + C_4\|\chi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega_a)} \to 0.$$

Таким образом, $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \to 0$ при $\varepsilon\to 0$. □

Заметим, что аналог леммы 2 для скалярного случая был ранее обоснован в работе [15]. Доказательство леммы 2 для векторного случая не сводится к доказательству скалярного случая и отличается прежде всего более аккуратным выбором срезающей функции. Одной из причин проблемы выбора является сложность различения пространств $C(\Pi)$ и $H_1(\Pi)$ для $\Pi\subset\mathbb{R}^2$. Среди немногих примеров функции, принадлежащей $H_1(\Pi)$, но не принадлежащей $C(\Pi)$, является функция $f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\ln(-|\boldsymbol{x}|)}$, на основе которой и была построена срезающая функция. В то же время если бы область Π являлась частью евклидова пространства размерности три и выше, то указанной проблемы не возникало бы и можно было бы ограничиться заданием крайних значений срезающей функции.

Пусть

$$\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Pi(R))} = \left(\int\limits_{\Pi(R)} |\nabla\boldsymbol{w}|^2\,dx + \int\limits_{\Omega_a} \boldsymbol{w}^2 dx_1\right)^{1/2},$$

где $\Pi(R) = \Omega\times(a,R)$, $R>0$. Так как (см., например, [21, гл. III, § 5, теорема 5]),

$$\|\boldsymbol{w}\|_{W_2^1(\Pi(R))} \leqslant C(R)\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Pi(R))}, \qquad \|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Pi(R))} \leqslant \|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Pi)},$$

то

$$\|\boldsymbol{w}\|_{W_2^1(\Pi(R))} \leqslant C(R)\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Pi)}, \tag{2.11}$$

где $C(R)$ — константа, зависящая от выбора R.

Лемма 3. *Пусть в* (1.4) *и* (1.5) *вектор-функции* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}_\varepsilon \in L_2(\Omega_a)$. *Тогда если*

$$\boldsymbol{f}_\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{f} \quad \textit{в} \quad L_2(\Omega_a) \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to 0,$$

то для сужения $R_\varepsilon\boldsymbol{f}_\varepsilon$ *решения* $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ *краевой задачи* (1.4) *и сужения* $R_0\boldsymbol{f}$ *решения* $\boldsymbol{u}_0$ *краевой задачи* (1.5) *на* Ω_a *имеет место сходимость*

$$R_\varepsilon\boldsymbol{f}_\varepsilon \to R_0\boldsymbol{f} \quad \textit{в} \quad L_2(\Omega_a) \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to 0. \tag{2.12}$$

Доказательство. В силу слабой компактности ограниченного множества в гильбертовом пространстве (см., например, [21, гл. 2, §3]), оценок (2.4) и (2.11) и компактности вложения $W_2^1(\Pi(R))$ в $L_2(\Omega_a)$ из любой последовательности $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ можно выделить подпоследовательность (которую, не ограничивая общности, будем считать совпадающей с последовательностью $\{\varepsilon_k\}$) такую, что на ней

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{u}_* \quad \text{в} \quad H^1(\Pi) \quad \text{при} \quad \varepsilon=\varepsilon_k\to 0,\\ &\boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{u}_* \quad \text{в} \quad L_2(\Omega_a) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

причем $\boldsymbol{u}_* \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$, если $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Если $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{u}_0$, то из произвола в выборе исходной последовательности $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ будет следовать сходимость (2.12).

Покажем, что $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{u}_0$. Пусть $\boldsymbol{v}$ – произвольная вектор-функция из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обращающаяся в нулевой вектор на $\partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a$, имеющая конечный интеграл Дирихле, а вектор-функции $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ удовлетворяют утверждению леммы 2. Положим в (2.2), что $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\varepsilon$. Тогда, переходя в полученном равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу (2.13), леммы 2 и определения пространства $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ заключаем, что функция $\boldsymbol{u}_*$ является обобщенным решением краевой задачи (1.5). Из единственности решения краевой задачи (1.5) (см. (2.4)) выводим, что $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{u}_0$. □

Доказательство следующей леммы полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения в скалярном случае (см. [15, лемма 3]).

Лемма 4. *При $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость $R_\varepsilon \to R_0$ по операторной норме*

$$\|A\| = \sup_{\|\boldsymbol{g}\|_{L_2(\Omega_a)}=1} \|A\boldsymbol{g}\|_{L_2(\Omega_a)}, \quad \text{где} \quad A : L_2(\Omega_a) \mapsto L_2(\Omega_a).$$

Напомним, что краевые задачи (1.5) и (1.4) однозначно разрешимы. Поэтому существуют обратные операторы $\mathcal{R}_0 = R_0^{-1}$ и $\mathcal{R}_\varepsilon = R_\varepsilon^{-1}$, определенные в $L_2(\Omega)$.

Справедливость следующего утверждения вытекает из [22, гл. 4, § 2, п. 6, теорема 2.23] и леммы 4.

Лемма 5. *При $\varepsilon \to 0$ оператор $\mathcal{R}_\varepsilon$ сходится к оператору $\mathcal{R}_0$ в обобщенном смысле.*

3. Доказательство теоремы 1

Докажем теперь теорему 1. Из определения операторов $\mathcal{R}_\varepsilon$ и $\mathcal{R}_0$ следует, что собственные значения Λ_ε и Λ_0 этих операторов и собственные значения λ_ε и λ_0 краевых задач (1.1) и (1.2) связаны равенствами $\lambda_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon - 1$ и $\lambda_0 = \Lambda_0 - 1$, а соответствующие нормированные в $L_2(\Omega_a)$ собственные вектор-функции совпадают. Отсюда в силу [22, гл. 4, теорема 3.16] и леммы 5 вытекает справедливость доказываемой теоремы.

Заключение

Теорема 1, представленная в данной статье, — промежуточный результат, который будет необходим при построении асимптотических разложений собственных значений сингулярно возмущенной краевой задачи (1.1) методом согласования асимптотических разложений. Полученный ранее в скалярном случае результат (см. [23]) может быть обобщен на векторный случай. В отличие от скалярного случая векторный случай будет иметь ряд сложностей, например при решении краевых задач с особенностями в нуле. Метод, изложенный в [23] при доказательстве теоремы 2.1 для скалярной задачи, в векторном случае требует обобщения, так как в явном виде не применим.

Информация о вкладе авторов. Д. Б. Давлетову, О. Б. Давлетову, Р. Р. Давлетовой принадлежит доказательство основного результата работы в виде теоремы 1, А.А. Ершову — доказательство леммы 2 для векторного случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутузов В.Ф.** Об асимптотике решения сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 6. С. 1030–1041.
2. **Hempel R., Seco L., Simon B.** The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains // J. Funct. Anal. 1991. Vol. 102. P. 448–483.

3. **Гадыльшин Р.Р.** Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 4. С. 42–55.
4. **Гадыльшин Р.Р.** О собственных частотах тел с тонкими отростками. I. Сходимость и оценки // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 6. С. 10–21.
5. **Чечкин Г.А.** Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 6. С. 99–150.
6. **Борисов Д.И.** О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 7. С. 37–68.
7. **Бикметов А.Р., Гадыльшин Р.Р.** О спектре оператора Шредингера с растущим потенциалом, локализованным на сжимающемся множестве // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 5. С. 787–790.
8. **Самарский А.А.** О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63, № 6. С. 631–634.
9. **Днестровский Ю.Н.** Об изменении собственных значений при изменении границы областей // Вестн. МГУ. Сер. 1: Математика, механика. 1964. № 9. С. 61–74.
10. **Ильин А.М.** Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с тонкой щелью. 2. Область с малым отверстием // Мат. сб. 1977. Т. 103, № 2. С. 265–284.
11. **Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.** Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. 1984. Т. 48, № 2. С. 347–371.
12. **Lanza de Cristoforis M.** Asymptotic behavior of the solutions of the Dirichlet problem for the Laplace operator in a domain with a small hole. A functional analytic approach // Analysis (Germany). 2008. Vol. 28, iss. 1. P. 63–93. doi: 10.1524/anly.20080903 .
13. **Давлетов Д.Б.** Асимптотика собственного значения двумерной краевой задачи Дирихле для оператора Ламе в области с малым отверстием // Мат заметки. 2013. Т. 93, № 4. С. 537–548. doi: 10.4213/mzm9023 .
14. **Камоцкий И.В., Назаров С.А.** Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов // Тр. С.-Петерб. мат. об-ва. 1998. Т. 6. С. 151–212.
15. **Давлетов Д.Б., Давлетов О.Б.** Сходимость собственных элементов задачи типа Стеклова в полуполосе с малым отверстием // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 141. С. 42–47.
16. **Назаров С.А.** Асимптотические разложения собственных чисел задачи Стеклова в сингулярно возмущенных областях // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 2. С. 119–184.
17. **Назаров С.А.** Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1086–1101.
18. **Борисов Д.И.** О PT-симметричном волноводе с парой малых отверстий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 22–37.
19. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика (в 10 т). Т. 7: Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 264 с. ISBN 5-9221-0122-6 .
20. **Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.** Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 311 с.
21. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
22. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
23. **Давлетов Д.Б., Давлетов О.Б., Садыкова Р.Р.** Об асимптотике собственного значения сингулярно возмущенной краевой задачи типа Стеклова для лапласиана // Вестн. Омского ун-та. 2018. Т. 23, № 3. С. 20–27.

Поступила 19.10.2020
После доработки 11.02.2021
Принята к публикации 15.02.2021

Давлетов Дмитрий Борисович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уфимский государственный авиационный технический университет
г. Уфа
e-mail: davletovdb@mail.ru

Давлетов Олег Борисович
старший преподаватель
Уфимский государственный нефтяной технический университет
г. Уфа
e-mail: davolegus@mail.ru

Давлетова Рузалина Разгатовна
преподаватель
Уфимский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
г. Уфа
e-mail: ruzal89@mail.ru

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ale10919@yandex.ru

REFERENCES

1. Butuzov V.F. The asymptotic behavior of the solutions of singularly perturbed equations of elliptic type in a rectangular domain. *Differ. Uravn.*, 1975, vol. 11, no. 6, pp. 1030–1041 (in Russian).
2. Hempel R., Seco L., Simon B. The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains. *J. Funct. Anal.*, 1991, vol. 102, no. 2, pp. 448–483. doi: 10.1016/0022-1236(91)90130-W .
3. Gadyl'shin R.R. Ramification of a multiple eigenvalue of the Dirichlet problem for the Laplacian under singular perturbation of the boundary condition. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, no. 4, pp. 1020–1029. doi: 10.1007/BF01210435 .
4. Gadyl'shin R.R. Characteristic frequencies of bodies with thin spikes. I. Convergence and estimates. *Math. Notes*, 1993, vol. 54, no. 6, pp. 1192–1199. doi: 10.1007/BF01209080 .
5. Chechkin G.A. Averaging of boundary value problems with a singular perturbation of the boundary conditions. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1994, vol. 79, no. 1, pp. 191–222. doi: 10.1070/SM1994v079n01ABEH003608 .
6. Borisov D.I. Boundary-value problem in a cylinder with frequently changing type of boundary conditions. *Sb. Math.*, 2002, vol. 193, no. 7, pp. 977–1008. doi: 10.1070/SM2002v193n07ABEH000666 .
7. Bikmetov A.R., Gadyl'shin R.R. On the spectrum of the Schrödinger operator with large potential concentrated on a small set. *Math. Notes*, 2006, vol. 79, no. 5, pp. 729–733. doi: 10.1007/s11006-006-0084-9 .
8. Samarckiy A.A. On the influence of fixing on eigenfrequencies of bounded volumes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1948, vol. 63, no. 6, pp. 631–634 (in Russian).
9. Dnestrovsky Yu.N. On the change of eigenvalues under the change of the domain boundary. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 1964, no. 9, pp. 61–74 (in Russian).
10. Il'in A.M. A boundary value problem for the second order elliptic equation in a domain with a narrow slit. 2. Domain with a small cavity. *Math. USSR-Sb.*, 1977, vol. 32, no. 2, pp. 227–244. doi: 10.1070/SM1977v032n02ABEH002380 .
11. Maz'ya V.G., Nazarov S.A., Plamenevskii B.A. Asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes. *Math. USSR-Izv.*, 1985, vol. 24, no. 2, pp. 321–345. doi: 10.1070/IM1985v024n02ABEH001237 .
12. Lanza de Cristoforis M. Asymptotic behavior of the solutions of the Dirichlet problem for the Laplace operator in a domain with a small hole. A functional analytic approach. *Analysis* (*Germany*), 2008, vol. 28, no. 1, pp. 63–93. doi: 10.1524/anly.20080903 .
13. Davletov D.B. Asymptotics of eigenvalues of the two-dimensional Dirichlet boundary-value problem for the Lamé operator in a domain with a small hole. *Math. Notes*, 2013, vol. 93, no. 4, pp. 545–555. doi: 10.1134/S000143461303022X .
14. Kamotskii I.V., Nazarov S.A. Spectral problems in singularly perturbed domains and selfadjoint extensions of differential operators. *American Mathematical Society Translations: Ser.* 2, 2000, vol. 199, pp. 127–182. doi: 10.1090/trans2/199/04 .

15. Davletov D.B., Davletov O.B. Convergence of eigenelements of a Steklov-type problem in a half-band with a small hole. *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 241, no. 5, pp. 549–555. doi: 10.1007/s10958-019-04444-1 .
16. Nazarov S.A. Asymptotic expansions of eigenvalues of the Steklov problem in singularly perturbed domains. *St. Petersburg Math. J.*, 2015, vol. 26, no. 2, pp. 273–318. doi: 10.1090/S1061-0022-2015-01339-3 .
17. Nazarov S.A. Variational and asymptotic methods for finding eigenvalues below the continuous spectrum threshold. *Siberian Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 5, pp. 866–878. doi: 10.1007/s11202-010-0087-3 .
18. Borisov D.I. On a $\mathcal{PT}$-symmetric waveguide with a pair of small holes. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2013, vol. 281, suppl. 1, pp. 5–21. doi: 10.1134/S0081543813050027 .
19. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of theoretical physics. Vol. 7. Theory of elasticity.* Oxford: Butterworth-Heinemann, 1986, 196 p. ISBN: 075062633X . Original Russian text published in Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. Tom 7. Teoriya uprugosti.* Moscow: Fizmatlit Publ., 2003, 264 p. ISBN: 5-9221-0122-6 .
20. Oleinik O.A., Iosif'yan G.A., Shamaev A.S. *Matematicheskie zadachi teorii sil'no neodnorodnykh uprugikh sred* [Mathematical problems in the theory of strongly inhomogeneous elastic media]. Moscow: Moscow State University Publ., 1990, 311 p. ISBN: 5-211-00947-9 .
21. Mikhailov V.P. *Partial differential equations.* Moscow: Mir Publ., 1978, 396 p. ISBN: 0828507341 . Original Russian text published in Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh.* Moscow: Nauka Publ., 1976, 391 p.
22. Kato T. *Perturbation theory for linear operators.* Berlin: Springer-Verlag, 1995, 619 p. doi: 10.1007/978-3-642-66282-9 . Translated to Russian under the title *Teoriya vozmushchenii lineinykh operatorov.* Moscow: Mir Publ., 1972, 740 p.
23. Davletov D.B., Davletov O.B., Sadykova R.R. On the asymptotics of the eigenvalues of a singularly perturbed boundary value problem of Steklov type for Laplacians. *Herald of Omsk University*, 2018, vol. 23, no. 3, pp. 20–27 (in Russian).

Received October 19, 2020
Revised February 11, 2021
Accepted February 15, 2021

Dmitrii Borisovich Davletov, Cand. Phys.-Math. Sci., Ufa State Aviation Technical University, Ufa, 450008 Russia, e-mail: davletovdb@mail.ru .

Oleg Borisovich Davletov, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, 450064 Russia, e-mail: davolegus@mail.ru .

Ruzalina Razgatovna Davletova, Ufa Branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, Ufa, 450015 Russia, e-mail: ruzal89@mail.ru .

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ale10919@yandex.ru .

Cite this article as: D. B. Davletov, O. B. Davletov, R. R. Davletova, A. A. Ershov. Convergence of eigenelements in a Steklov type boundary value problem for the Lamé operator. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 37–47 .