ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 519.8

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕСУРСНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ТЕСТИРОВАНИЕМ НА ПРИМЕРАХ БИБЛИОТЕКИ PSPLIB[1]

Э. Х. Гимади, Е. Н. Гончаров, А. А. Штепа

В статье рассматривается труднорешаемая задача ресурсно-календарного планирования (ЗРКП). Предполагается, что функции интенсивности выделения и потребления ресурсов постоянны в заданных временны́х интервалах, а директивные сроки отсутствуют. Построена процедура вычисления нижней оценки длины расписания ЗРКП на основе релаксации задачи (посредством замены нескладируемых ресурсов на складируемые). Временна́я сложность этой процедуры зависит от числа работ n как функция $\mathcal{O}(n\log n)$. Из анализа численных расчетов (проведенных на примерах задач из электронной библиотеки PSPLIB) следует высокая конкурентоспособность предлагаемой процедуры, дающей в некоторых сериях задач результаты, близкие к лучшим значениям нижних оценок, опубликованных в библиотеке PSPLIB, при чрезвычайно малом процессорном времени (миллисекунды).

Ключевые слова: управление проектами, задача планирования проектов с ограниченными ресурсами, нескладируемые ресурсы, складируемые ресурсы, полиномиальный алгоритм, PSPLIB, нижняя оценка.

E. Kh. Gimadi, E. N. Goncharov, A. A. Shtepa. A fast algorithm for finding a lower bound of the solution of the Resource-Constrained Project Scheduling Problem tested on PSPLIB instances.

We consider the intractable Resource-Constrained Project Scheduling Problem (RCPSP). It is assumed that the intensity functions of resource allocation and consumption are constant on specified time intervals and there are no deadlines. The procedure for calculating the lower bound for the RCPSP is constructed on the basis of the relaxation of the problem by replacing renewable resources with cumulative ones. The time complexity of this procedure depends on the number of activities n as a function of $\mathcal{O}(n\log n)$. From the analysis of numerical experiments (which are carried out on examples of problems from the electronic library PSPLIB), it follows that the proposed procedure is highly competitive, and in some series of instances gives results close to the best lower bounds published in the PSPLIB with dramatically small CPU time (milliseconds).

Keywords: project management, Resource-Constrained Project Scheduling Problem, renewable resources, cumulative resources, PSPLIB, lower bound.

MSC: 90C10, 90B35

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-22-36

Введение

Мы рассматриваем задачу ресурсно-календарного планирования проекта с ограниченными ресурсами по критерию минимизации длины расписания выполнения всех работ проекта. Далее, обозначаем эту задачу ЗРКП (по англ. RCPSP — аббревиатура от английского: Resource-Constrained Project Scheduling Problem).

Будучи одной из типовых задач принятия решений, ЗРКП может быть сформулирована как задача комбинаторной оптимизации. В ней учитываются технологические ограничения, характеристики работ, ресурсные ограничения. Прерывание работ не допускается. Частичный порядок на множестве работ определяется ориентированным ациклическим графом. Для каждой работы известна ее продолжительность, набор потребляемых ресурсов и их количество.

В зарубежной литературе (см. обзорно-классификационные статьи [4–7]) ограниченные ресурсы традиционно делятся на возобновимые (renewable) и невозобновимые (nonrenewable).

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований СО РАН I.5.1 (проект 0314-2019-0014) и РФФИ (проект 20-31-90091).

В случае *возобновимого* ресурса для каждой работы задается требуемое количество ресурса в каждый из моментов ее выполнения. Имеющееся в наличии в какой-либо момент времени количество ресурса не должно быть меньше суммарного количества ресурса, требуемого всеми работами, выполняемыми в этот момент времени. Типичными представителями этого типа ресурсов являются производственные мощности, оборудование, человеческие ресурсы.

Ограничения на *невозобновимые* ресурсы накладываются на весь проект в целом, позволяя, например, моделировать бюджет проекта.

В российских работах [16–22] изначально использовалась иная классификация: ресурсы делились на нескладируемые и складируемые (в [20] — сохраняемые). В обоих случаях происходит учет баланса между выделяемым и потребляемым количеством ресурса. Но, если понятие *нескладируемого* ресурса в точности совпадает с описанным выше понятием возобновимого ресурса, то в случае *складируемого* ресурса используется другой механизм подсчета потребляемых и выделяемых объемов ресурса. Для допустимости расписания относительно складируемого ресурса достаточно, чтобы для каждого момента времени $t \geq 0$ суммарный по всем работам объем ресурса, потребляемого к моменту t, не превосходил объема ресурса, выделяемого к моменту t. Складируемые ресурсы невозможно учесть с помощью комбинации возобновимых и невозобновимых ресурсов. При этом невозобновимый ресурс может рассматриваться как складируемый, весь объем которого доступен с начала выполнения проекта.

В случае складируемых ресурсов любое количество ресурса, выделенного в единицу времени $t \in \mathbf{Z}^+$ и неиспользованного в этот период, могут быть потреблены в любой последующий период $t' > t$, в отличие от нескладируемого (возобновимого) ресурса, для которого часть ресурса, неиспользованного в период t, пропадает впустую. Примерами складируемых ресурсов являются строительные материалы с длительным сроком хранения, частично деньги.

В работе [20] для ЗРКП с ограничениями на складируемые ресурсы был описан алгоритм без обоснования оптимальности получаемого решения и анализа временно́й сложности. В [22] исследованы основные свойства расписаний со складируемыми ресурсами и на их основе построен алгоритм, из описания которого можно сделать вывод о его псевдополиномиальной временно́й сложности. В работах [16; 17] для решения ЗРКП с длительностями работ из $\mathbf{R}^+$, директивными сроками и ограничениями на складируемые ресурсы предложен асимптотически точный алгоритм, время работы которого зависит от числа дуг u в графе отношения предшествования на множестве работ, как функция порядка $u \log u$, причем как относительная, так и абсолютная погрешности стремятся к нулю с ростом размерности задачи.

В работе [19] представлена задача с ограниченными ресурсами, когда все работы имеют целочисленные длительности, а все функции, определяющие ресурсные ограничения (по интенсивности потребления и выделения ресурсов) являются кусочно-постоянными, причем все длины интервалов постоянства этих функций являются целочисленными. В частном случае, когда в модели отсутствуют ресурсные ограничения нескладируемого типа, построен полиномиальный алгоритм решения этой задачи. (Такую задачу обозначаем ЗРКП$^\sigma$). Подход к решению ЗРКП$^\sigma$ основан на использовании свойств так называемых T–поздних расписаний, среди которых содержится также и оптимальное расписание этой задачи.

Алгоритмическое решение ЗРКП$^\sigma$ было инициировано необходимостью разработки программно-математического обеспечения для планирования крупномасштабных проектов, связанных со строительством Байкало-Амурской железнодорожной магистрали (сокр. БАМ) [16; 17], освоением территориально-промышленных комплексов Сибири и Дальнего Востока, а также с реализацией Западно- и Восточно-Сибирского нефтегазовых комплексов.[2]

[2]Гимади Э.Х., Пузынина Н.М., Севастьянов С.В. О некоторых экстремальных задачах реализации крупных проектов типа БАМ // Экономика и мат. методы. 1979. Вып. 5. С. 1017–1020.

Гимади Э.Х., Гончаров Е.Н., Залюбовский В.В. Алгоритм решения задачи сетевого планирования в условиях ограниченных ресурсов // В моногр.: Перспективное планирование Западно-Сибирского нефтегазового комплекса / отв. ред. Б. П. Орлов; ИЭОПП. Новосибирск: Наука, 1987. С. 172–180.

Гимади Э.Х., Гончаров Е.Н., Залюбовский В.В., Пляскина Н.И., Харитонова В.Н. О программно-математическом обеспечении для задачи ресурсно-календарного планирования Восточно-Сибирского нефтегазового комплекса // Вест. НГУ. Серия: математика, механика, информатика, 2010. Т.10, № 4, С. 51–62.

Складируемые ресурсы интересны не только тем, что они более адекватно учитывают специфику некоторых ресурсов, обладающих свойством складируемости, но и тем, что понятие складируемых ресурсов позволяет расширить возможности для приближенного решения “традиционных” ЗРКП, поскольку складируемые ресурсы являются ослаблением возобновимых. Вычислению нижних оценок для ЗРКП посвящено достаточно большое количество публикаций. Последние обстоятельные обзоры можно найти в [8] и [11]. В работе [5] для вычисления нижней оценки предложен псевдополиномиальный алгоритм с трудоемкостью $\mathcal{O}\big(n^2K(n+u+K)T\log_2 T\big)$, где n — число работ, u — число дуг в графе отношения предшествования на множестве работ, K — число типов ресурсов, T — горизонт планирования. Большинство таких алгоритмов относят к так называемым “деструктивным” методам, когда, задавшись определенным сроком завершения проекта, ищется допустимое решение задачи. Если приемлемое решение не существует, срок увеличивается (обычно на единицу времени), и процедура расчета возобновляется до тех пор, пока алгоритму удается найти допустимое решение с текущим заданным сроком либо до окончания отведенного расчетного времени.

Отметим также ряд зарубежных работ, где наряду с нескладируемыми ресурсами так или иначе упоминается использование ресурсов складируемых или с определенной степенью складируемости [1; 3; 12; 13].

В данной статье мы рассматриваем класс задач, сформулированных в рамках электронной библиотеки PSPLIB [6;9;10]. Для решения задачи с ограниченными складируемыми ресурсами, обозначаемой нами как ЗРКП$^\sigma$, представлен новый быстрый точный алгоритм с временно́й сложностью, зависящей от числа работ n как функция $\mathcal{O}(n\log_2 n)$. Тем самым нами предлагается быстро вычислимая нижняя оценка для задачи с участием ограниченных нескладируемых ресурсов, далее, ЗРКП$^\rho$. Численные эксперименты проведены на примерах ЗРКП из электронной библиотеки PSPLIB. Результаты вычисления нижних оценок этих задач показывают высокую эффективность предложенного алгоритма. На ряде серий входных данных полученные нижние оценки очень близки к наилучшим (приведенным в библиотеке), особенно на задачах с бо́льшим числом работ.

1. Постановка ЗРКП

ЗРКП можно сформулировать как задачу комбинаторной оптимизации. Проект рассматривается как ориентированный ациклический граф отношения предшествования $G=(N,U)$. Обозначим через $N=\{1,\dots,n\}\cup\{0,n+1\}$ набор работ в проекте, где работы 0 и $n+1$ — фиктивные. Последние работы определяют начало и конец проекта соответственно. Отношение предшествования на множестве N определяется набором пар $U=\{(i,j)\mid i \text{ предшествует } j\}$. Если $(i,j)\in U$, то работа j не может начаться до завершения работы i. Множество U содержит все пары $(0,j)$ и $(j,n+1)$, $j=1,\dots,n$.

Для каждого нескладируемого ресурса $k\in\mathcal{K}^\rho$ в момент t доступны $q_k^\rho(t)$ единиц этого ресурса. Для каждого складируемого ресурса $k\in\mathcal{K}^\sigma$ в момент t поступают и могут быть использованы в любое время $t_1\ge t$ $q_k^\sigma(t)$ единиц ресурса типа k. Работа j имеет детерминированную продолжительность $p_j\in\mathbf{Z}^+$ и требует $r_{jk}(t)\ge 0$ единиц ресурса типа $k\in\mathcal{K}^\rho\cup\mathcal{K}^\sigma$ в моменты $t=1,\dots,p_j$, начиная от момента начала ее выполнения.

Мы предполагаем, что $r_{jk}(t)\le q_k^\rho(t)$, $j\in N$, $k\in\mathcal{K}^\rho$, $t\in\mathbf{Z}^+$ (иначе задача не имеет допустимого решения). Фиктивные работы 0 и $n+1$ имеют нулевую продолжительность и нулевое потребление ресурсов. Здесь и далее $\mathbf{Z}^+=\{1,2,3,\dots\}$.

Введем переменные задачи.

Поскольку каждая работа выполняется без прерывания, время завершения работы j равно $c_j=s_j+p_j$. Определим расписание как $(n+2)$–вектор $(s_0,\dots,s_{n+1})$. Срок реализации проекта $C_{\max}(S)$ соответствует моменту, когда завершена последняя работа с номером $n+1$, т. е. $C_{\max}(S)=c_{n+1}$. Также введем обозначение $J(t)=\{j\in N\mid s_j<t\le c_j\}$, $t\in\mathbf{Z}^+$, для множества работ, которые выполняются в течение интервала $[t-1;t)$ в расписании S.

Задача состоит в отыскании расписания $S = \{s_j\}$, допустимого по ресурсам и ограничениям предшествования, с минимальным сроком завершения проекта.

Таким образом, сформулирована следующая з а д а ч а: требуется минимизировать время выполнения проекта

$$C_{\max}(S) = \max_{j \in N}(s_j + p_j) \tag{1.1}$$

при выполнении ограничений:

$$s_i + p_i \le s_j \quad \forall (i,j) \in U; \tag{1.2}$$

$$\sum_{j \in J(t)} r_{jk}(t - s_j) \le q_k^\rho(t), \quad k \in \mathcal{K}^\rho, \quad t \in \mathbf{Z}^+; \tag{1.3}$$

$$\sum_{t'=1}^{t} \sum_{j \in J(t')} r_{jk}(t' - s_j) \le \sum_{t'=1}^{t} q_k^\sigma(t'), \quad k \in \mathcal{K}^\sigma, \quad t \in \mathbf{Z}^+; \tag{1.4}$$

$$s_j \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, \quad j \in N. \tag{1.5}$$

Неравенства (1.2) определяют отношение предшествования работ. Неравенства (1.3) и (1.4) обеспечивают соблюдение ограничений на возобновимые и складируемые ресурсы соответственно, т. е. общее количество потребленных ресурсов за интервал $[t-1; t)$ не может превышать количества соответствующих доступных ресурсов в течение этого интервала. Последний набор неравенств (1.5) определяет ограничения на переменные задачи.

Задачу (1.1)–(1.5) будем обозначать как ЗРКП. Как известно, она NP-трудна [2], если $\mathcal{K}^\rho \ne \varnothing$. Далее мы остановимся на двух частных случаях задачи (1.1)–(1.5), для исходных данных которых верно следующее

С в о й с т в о 1. Функции интенсивности выделения и потребления ресурсов постоянны в заданных временны́х интервалах, а директивные сроки для выполнения работ отсутствуют.

Нетрудно заметить, что для постановки задачи в рамках библиотеке PSPLIB свойство 1 выполняется.

2. Задача с нескладируемыми ресурсами (ЗРКП$^\rho$)

Рассмотрим специальный случай задачи (1.1)–(1.5), где выполняется свойство 1 и $\mathcal{K}^\sigma = \varnothing$. При этом для всяких $k \in \mathcal{K}^\rho$ и $t \in \mathbf{Z}^+$ выполнено $q_k(t) = q_k$ и $r_{jk}(t) = r_{jk}$, $j \in N$.

Эту задачу мы обозначим как ЗРКП$^\rho$. Мы имеем граф $G = (N, U)$ отношения предшествования на множестве работ, K различных возобновимых ресурсов, т. е. $K = |\mathcal{K}^\rho|$. Также $J(t) = \{j \in N \mid s_j < t \le c_j\}$ — это множество работ, которые выполняются в интервале времени $[t-1; t)$. Для каждой работы известна ее длительность p_j.

ЗРКП$^\rho$ состоит в том, что необходимо найти допустимое расписание $S = \{s_j\}$, которое минимизирует время выполнения всего проекта $C^\rho_{\max}(S)$, и может быть формализована как минимизация величины

$$C^\rho_{\max}(S) = \max_{j \in N}(s_j + p_j)$$

при следующих ограничениях:

$$s_i + p_i \le s_j \quad \forall (i,j) \in U; \tag{2.1}$$

$$\sum_{j \in J(t)} r_{jk} \le q_k, \quad k = 1, \ldots, K, \quad t \in \mathbf{Z}^+; \tag{2.2}$$

$$s_j \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, \quad j \in N. \tag{2.3}$$

Неравенства (2.1) задают отношение предшествования на множестве работ N. Условия (2.2) гарантируют выполнение ограничений на ресурсы. И последний тип ограничений (2.3) задает переменные задачи.

3. Задача со складируемыми ресурсами (ЗРКП$^\sigma$)

Теперь рассмотрим другой частный случай задания исходных данных задачи (1.1)–(1.5), когда выполнено свойство 1, и $\mathcal{K}^\rho = \varnothing$, При этом для всяких $k \in \mathcal{K}^\sigma$ и $t \in \mathbf{Z}^+$ выполнено $q_k(t) = q_k$ и $r_{jk}(t) = r_{jk}$, $j \in N$.

Аналогично предыдущей задаче имеем граф $G = (N, U)$ отношения предшествования на множестве работ, число $K = |\mathcal{K}^\sigma|$ различных типов складируемого ресурса, множество работ $J(t) = \{j \in N \mid s_j < t \le c_j\}$, которые выполняются в единичном интервале $[t-1; t)$. Для произвольной работы j известна ее длительность p_j.

Требуется найти допустимое расписание работ $S = \{s_j\}$, минимизирующее время $C^\sigma_{\max}(S)$ выполнения всего проекта

$$C^\sigma_{\max}(S) = \max_{j\in N}(s_j + p_j) \tag{3.1}$$

при следующих ограничениях:

$$s_i + p_i \le s_j \quad \forall (i,j) \in U; \tag{3.2}$$

$$\sum_{t'=1}^{t} \sum_{j\in J(t')} r_{jk} \le q_k \cdot t, \quad k = 1, \dots, K, \quad t \in \mathbf{Z}^+; \tag{3.3}$$

$$s_j \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, \quad j \in N. \tag{3.4}$$

Набор неравенств (3.2) описывает отношение предшествования работ. Условия (3.3) определяют ограничения на складируемые ресурсы. Неравенства (3.4) предназначены для ограничений на переменные задачи.

Утверждение 1. *Пусть параметры исходных данных в задачах* ЗРКП$^\rho$ *и* ЗРКП$^\sigma$ *совпадают. Тогда решение* ЗРКП$^\sigma$ *является допустимым решением* ЗРКП$^\rho$.

Доказательство. Видим, что в обеих задачах все параметры, целевые функции и ограничения идентичны, кроме ограничений (2.2) и (3.3). Ясно, что неравенства (3.3) являются следствием условий (2.2). Итак, у нас есть более широкий допустимый набор решений для (3.3) по сравнению с (2.2) и минимум целевой функции $C^\sigma_{\max}(S)$, ЗРКП$^\sigma$ дает оценку снизу для задачи ЗРКП$^\rho$. □

4. Быстрый точный алгоритм для ЗРКП$^\sigma$

Далее, говоря о ресурсах, мы подразумеваем, что решается задача со складируемыми ресурсами с целью получения нижней оценки для задачи с возобновимыми ресурсами.

В работе [19] ЗРКП$^\sigma$ рассматривалась в более общей постановке по сравнению с задачей (3.1)–(3.4), что предполагает возможность учета директивных сроков завершения работ, а также более детального описания исходных данных о характеристиках функций интенсивности выделения и потребления ресурсов. Точный алгоритм, построенный для этого случая, имеет следующую полиномиальную временну́ю сложность:

$$\mathcal{O}\big(\widehat{D}(u + \widetilde{I} + I\log_2(fK)) + N_{\mathrm{dir}}\log_2 N_d\big), \tag{4.1}$$

где

$\widehat{D}$ — длина бинарной записи максимального директивного срока;

u — число дуг в графе G отношения предшествования на множестве работ N;

$\widetilde{I}$ — общее (по всем ресурсам $k \in \mathcal{K}^\sigma$) число интервалов постоянства функций $q^\sigma_k(t)$ выделения ресурсов;

I — общее (по всем ресурсам и всем работам) число интервалов постоянства функций $r_{jk}(t)$ потребления ресурсов;

f — ширина графа отношения предшествования;
K — число типов ограниченных ресурсов;
N_{dir} — число работ с одинаковым директивным сроком;
N_d — число различных директивных сроков.

В настоящей статье мы рассматриваем случай ЗРКП$^\sigma$, для которой выполнено свойство 1. В таком случае, согласно выражению (4.1) временна́я сложность решения ЗРКП$^\sigma$ (с учетом неравенства $f \le n$) оценивается величиной

$$\mathcal{O}\big(u + nK \log_2 (nK)\big), \tag{4.2}$$

независящей от параметров задачи, имеющих временно́й характер.

Учет специфики указанного задания исходных данных позволяет реализовать следующий алгоритм $\mathcal{A}$ решения ЗРКП$^\sigma$ с улучшенной временно́й сложностью по сравнению с оценкой (4.2).

Алгоритм $\mathcal{A}$

1. Вычислить критическое время завершения проекта T_{cr} и T_{cr}–позднее расписание работ проекта.

2. Список работ упорядочить по моментам их начала: $0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_{n+1} = T_{cr}$.

3. Найти множество различных моментов T_h начал или завершений работ в T_{cr}–позднем расписании, так что $0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_H = T_{cr}$, где H — количество таких моментов. Обозначим $\mathcal{H} = \{0, 1, \ldots, H\}$.

4. Найти список J^+ работ, упорядоченных по неубыванию их моментов начала в T_{cr}–позднем расписании, и сформировать соответствующий список A_h^+, $h \in \mathcal{H}$, начальных адресов (номеров) работ с одинаковым моментом начала T_h в T_{cr}–позднем расписании.

5. Найти список работ J^-, отсортированный по неубыванию моментов их завершения в T_{cr}–позднем расписании и сформировать соответствующий список A_h^-, $h \in \mathcal{H}$, начальных адресов (номеров) работ, время завершения которых в T_{cr}–позднем расписании равно T_h.

6. Найти динамику потребления каждого ресурса в каждом временно́м слое $(T_h, T_{h+1}]$, $h = 0, \ldots, H-1$. Для этого в цикле по типам ресурсов $k = 1, \ldots, K$ и по слоям $h = 0, \ldots, H-1$ выполнить ниже следующую процедуру $\mathcal{P}_k(h)$.

Описание процедуры $\mathcal{P}_k(h)$: Процедура вычисляет общую интенсивность $r_k(h)$ потребления ресурса типа k в слое h и общую сумму $R_k(h)$ ресурсов типа k, потребленных в слое h. Предполагается, что при $h > 0$ уже вычислена суммарная интенсивность $r_k(h-1)$ потребления ресурса типа k в предыдущем слое $(h-1)$, причем $r_k(0) = 0$.

(a) Вычислить общую интенсивность работ, начинающихся в момент T_h.

(b) Вычислить общую интенсивность работ, завершаемых в момент T_h.

(c) Вычислить общую интенсивность $r_k(h)$ потребления работ в слое h, суммируя величину $r_k(h-1)$ с результатом п. (a), и вычитая результат п. (b).

(d) Вычислить суммарное количество $R_k(h)$ ресурсов типа k, потребленных в слое h:

$$R_k(h) = r_k(h)\,(T_{h+1} - T_h).$$

7. Для каждого типа ресурса k вычислить интегральные функции $\widetilde{R}_k(h)$ и $\widetilde{Q}_k(h)$ объемов ресурсов (соответственно, потребленных и имеющихся в наличии к моменту T_h); причем $\widetilde{R}_k(0) = 0$; $\widetilde{R}_k(h) = R_k(h) + \widetilde{R}_k(h-1)$, $\widetilde{Q}_k(h) = q_k\, T_h$, $h = 1, \ldots, H$.

8. Вычислить для каждого типа ресурса k минимальную величину Δ_k сдвига расписания по временнóй оси, при котором это расписание допустимо по ресурсу типа k:

$$\Delta_k = \max_{h\in\mathcal{H}_k} \left\lceil \frac{\widetilde{R}_k(h)}{q_k} - T_h \right\rceil,$$

где множество $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}$ состоит из слоев h с неравенством

$$\widetilde{R}_k(h) > q_k T_h.$$

9. Вычислить максиминную величину сдвига T_{cr}–позднего расписания: $\Delta = \max\limits_{1\le k\le K} \Delta_k$.

10. Вычислить длину оптимального расписания в ЗРКП$^\sigma$, что дает нам нижнюю оценку для длины расписания в ЗРКП$^\rho$: $T^* = T_{kp} + \Delta$.

11. Для ЗРКП$^\sigma$ имеем оптимальное расписание: $s_j^* = t_j + \Delta,\ j \in N$.

Описание алгоритма $\mathcal{A}$ закончено.

Теорема 1. *Алгоритм $\mathcal{A}$ находит оптимальное решение* ЗРКП$^\sigma$ *и нижнюю оценку длины расписания в* ЗРКП$^\rho$ *за время*

$$\mathcal{O}\big(u + n\big(K + \log_2 n\big)\big), \tag{4.3}$$

где u — число дуг в графе G отношения предшествования на множестве работ, n — число работ, K — число типов ресурсов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим временнýю сложность алгоритма $\mathcal{A}$ по пп. 1–11.

Пункт 1 выполняются с трудоемкостью $\mathcal{O}(u)$ (например, с использованием поиска в глубину [21], начиная его с начала проекта при подсчете величины T_{cr}, и с конца проекта — при вычислении T_{cr}–позднего расписания).

Пункт 2 выполняется за время $\mathcal{O}(n \log_2 n)$.

Пункт 3 выполняется с линейной от n трудоемкостью.

Пункты 4 и 5 выполняются за время $\mathcal{O}(n \log_2 n)$.

Пункт 6 с использованием имеющихся данных об интенсивностях потребления ресурсов, а также списков $\{T_h\}$, $\{A_h^+\}$ и $\{A_h^-\}$, $h \in \mathcal{H}$, выполняется с трудоемкостью $\mathcal{O}(nK)$.

Пункты 7 и 8, с учетом $\mathcal{H} \le n$, выполняются за время $\mathcal{O}(nK)$.

Пункты 9–11 выполняется за время $\mathcal{O}(K)$, константное и $\mathcal{O}(n)$, соответственно. В итоге получаем анонсированную оценку временнóй сложности.

Убедимся теперь в корректности вычисления величины Δ сдвига T_{cr}–позднего расписания. Для вычисления величины Δ важны следующие соображения. Для каждого типа ресурса k вычисляется значение Δ_k величины минимального сдвига графика интегральной функции потребления вправо, при котором (сдвинутый) график целиком помещается под графиком интегральной функции $\widetilde{Q}_k(h)$ выделения ресурсов. Максимальное по всем k из чисел Δ_k, выбирается в качестве значения величины Δ.

Рассмотрим два случая вычисления величины Δ_k для некоторого T_{cr}–позднего расписания.

С л у ч а й 1: Если $\widetilde{R}_k(h) \le q_k T_h$ для всякого $h \in \mathcal{H}$, то полагаем $\Delta_k = 0$.

С л у ч а й 2: Если выделено множество $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}$ всех слоев h с обратным неравенством

$$\widetilde{R}_k(h) > q_k T_h.$$

Рассмотрим некоторый слой $h \in \mathcal{H}_k$. Очевидно, найдется минимальная целочисленная величина сдвига-добавки δ_h^k к моменту T_h, изменяющая знак последнего неравенства на противоположный:

$$\widetilde{R}_k(h) \le q_k(T_h + \delta_h^k),$$

что равносильно неравенству

$$\delta_h^k \geq \frac{\widetilde{R}_k(h)}{q_k} - T_h.$$

Непосредственно отсюда, с учетом целочисленности добавок δ_h^k, получаем минимальную величину сдвига расписания в слое h относительно ресурса типа k:

$$\delta_h^k = \left\lceil \frac{\widetilde{R}_h^k}{q_k} - T_h \right\rceil.$$

Наибольший по всем $h \in \mathcal{H}_k$ из этих величин сдвиг $\Delta_k = \max\limits_{h \in \mathcal{H}_k} \delta_h^k$ делает $(T_{cr} + \Delta_k)$–позднее расписание оптимальным относительно ресурса типа k.

Наконец, при сдвиге $\Delta = \max\limits_{k \in K} \Delta_k$ в качестве оптимального решения ЗРКП$^\sigma$ мы получаем $(T_{cr} + \Delta)$–позднее расписание за время, анонсированное в теореме. Вместе с тем получена также нижняя оценка длины расписания в ЗРКП$^\rho$, равная величине $T_{cr} + \Delta$.

Теорема 1 доказана.

Утверждение 2. *Алгоритм* $\mathcal{A}$ *решает* ЗРКП$^\sigma$ *с улучшенной оценкой* (4.3) *временно́й сложности по сравнению с оценкой* (4.2)*, получаемой из работы* [19].

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из замены произведения $K \log_2(nK)$ в выражении (4.2) на сумму $\big(K + \log_2 n\big)$ в оценке (4.3). $\square$

Таблица 1

APD полученных нижних оценок от лучших известных нижних оценок для множества примеров j60

Серия	APD оптим. решения от критич. пути, %	APD LB от BLB, %	время, ms	Серия	APD оптим. решения от критич. пути, %	APD LB от BLB, %	время, ms
45	71.57	7.77	3.3	18	0.81	0.77	3.6
13	70.62	4.38	4	6	0.70	0.68	5
29	65.00	6.99	3.5	23	0.40	0.38	3.1
41	57.32	16.93	3.3	10	0.16	0.15	6.4
25	48.62	14.50	3	43	0.14	0.13	3
9	40.35	11.10	4.3	39	0.12	0.12	3
37	33.21	18.91	3.1	4	0	0	5.2
21	33.12	20.25	3.1	7	0	0	4.1
5	27.85	15.54	4.89	8	0	0	4.7
33	10.65	9.29	3.1	11	0	0	3.9
1	9.98	8.59	3.4	12	0	0	3.2
17	9.87	8.57	3	15	0	0	2.9
46	5.45	4.85	3.3	16	0	0	3
30	3.36	3.11	3.2	20	0	0	3
42	3.03	2.82	3.4	24	0	0	3.8
2	2.41	2.26	3.2	27	0	0	3.2
34	2.30	2.18	3.2	28	0	0	3.3
26	2.11	2.01	3.3	31	0	0	3.1
3	1.98	1.89	3.6	32	0	0	3.3
22	1.87	1.69	3.1	36	0	0	3.5
38	1.75	1.66	3.1	40	0	0	3
35	1.32	1.28	3.1	44	0	0	3
19	1.30	1.25	3.1	47	0	0	3
14	1.09	1.02	2.9	48	0	0	3.5

5. Численные эксперименты

Качество предложенного в данной статье алгоритма было протестировано в серии численных экспериментов. С этой целью алгоритм $\mathcal{A}$ был реализован на языке программирования C++ в среде разработки Visual Studio. Для численных экспериментов использовался настольный персональный компьютер с тактовой частотой 2.3 GHz и объемом оперативной памяти 6 Gb под управлением операционной системы Windows 10.

В качестве тестовых примеров использовались примеры из электронной библиотеки PSPLIB, разработанной в работе [9]. Примеры для ЗРКП$^\rho$ в этой библиотеке разбиты на четыре части, j30, j60, j90 и j120, с числом работ в каждом конкретном примере 30, 60, 90, и 120 соответственно. В библиотеке PSPLIB общедоступны как сами эти примеры, так и их оптимальные решения (только для примеров из j30) или наилучшие из полученных эвристических решений (для j60, j90 и j120). Для примеров из j60, j90 и j120 приведены также наилучшие нижние оценки, полученные различными авторами на протяжении более двадцати лет.

Множества примеров j30, j60 и j90 состоят из 480 примеров каждое (48 серий примеров, 10 примеров в каждой серии). Множество j120 содержит 60 серий примеров со 120 фактическими работами, по 10 примеров в каждой серии, всего 600 примеров. Во всех примерах используются четыре типа ресурсов. Каждая серия примеров использует для своей генерации уникальную комбинацию из трех параметров: network complexity (NC) — сложность ориентированного графа отношения предшествования на множестве работ, resource factor (RF) — ресурсный фактор и resource strength (RS) — параметр, характеризующий величину выделяемых ресурсов. Внутри одной серии примеров эти параметры фиксированы. Параметр NC

Таблица 2

APD полученных нижних оценок от лучших известных нижних оценок для множества примеров j90

Серия	APD оптим. решения от критич. пути, %	APD LB от BLB, %	время, ms	Серия	APD оптим. решения от критич. пути, %	APD LB от BLB, %	время, ms
45	67.66	3.07	4.3	7	0	0	5.4
13	56.98	2.15	4.1	8	0	0	6.4
29	56.98	3.29	3.8	10	0	0	10.4
41	52.31	5.71	4.2	11	0	0	7.1
25	47.92	4.39	4	12	0	0	5.6
9	46.25	2.47	5.4	14	0	0	4.1
37	32.09	16.01	5.1	15	0	0	3.8
21	28.98	15.89	4	16	0	0	4
5	24.72	6.40	6.4	18	0	0	4.3
1	9.73	8.00	5	19	0	0	4.3
17	9.69	8.55	4.2	20	0	0	4.1
33	8.38	7.36	4.4	23	0	0	4.3
46	3.82	1.36	4.2	24	0	0	4.5
42	2.28	2.12	4.1	27	0	0	4.1
30	1.46	0.33	4.4	28	0	0	4.5
34	1.42	1.35	4.3	31	0	0	4.3
38	0.72	0.71	4.4	32	0	0	3.5
26	0.47	0.10	4.4	36	0	0	3.8
6	0.42	0.41	5	39	0	0	4.8
22	0.41	0.40	4.3	40	0	0	4.9
35	0.10	0.10	4.5	43	0	0	4.5
2	0	0	5.8	44	0	0	4.1
3	0	0	7.3	47	0	0	4.4
4	0	0	5.8	48	0	0	4.5

означает среднее число непосредственных последователей для каждой работы. RF определяет среднее количество различных типов ресурсов, задействованных каждой работой. Параметр RS говорит о степени дефицитности ресурса. Нулевое значение параметра RS соответствует минимальной потребности каждого типа ресурсов для выполнения всех работ, в то время как значение $RS = 1$ соответствует количеству ресурсов, необходимому для выполнения наиболее раннего расписания. Для построения примеров из множеств j30, j60 и j90, были использованы следующие значения параметров: $NC \in \{1.5, 1.8, 2.1\}$, $RF \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ и $RS \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$. Для множества примеров j120 параметр RS мог принимать значения $RS \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$. Известно [15], что значения параметров $RF = 1$, $RS = 0.2$ соответствуют наиболее трудным сериям из множеств j30, j60 and j90 ($RF = 1$, $RS = 0.1$ для j120). Некоторые авторы (например, [6; 14]) указывали, что параметр RS является очень важным параметром с точки зрения качества решения точных и эвристических алгоритмов.

Среднее значение RS намного ниже для множества j120, чем для остальных, а экземпляры с более низкими значениями RS являются наиболее трудными для решения, как указали несколько независимых исследований. Идентификаторы j12016, j12036, j12056, j12011, j12031,j12051, где $n = 120$, соответствуют сериям с наибольшим разрывом между найденными

Таблица 3

APD полученных нижних оценок от лучших известных нижних оценок для множества примеров j120

Серия	APD оптим. решения от критич. пути, %	APD LB от BLB, %	время, ms	Серия	APD оптим. решения от критич. пути, %	APD LB от BLB, %	время, ms
56	152.97	5.14	17	22	11.40	9.82	9.6
16	142.37	1.23	8.6	42	11.31	8.62	16.8
36	128.01	1.73	9.1	39	8.82	1.32	15.3
51	122.72	4.33	16.6	19	8.55	1.41	10.5
31	108.93	1.88	14	54	8.19	3.93	16.3
11	105.57	1.64	12.3	8	6.90	4.22	10.6
6	74.41	4.63	8.1	28	5.69	4.23	10.4
46	71.79	8.45	16	34	5.45	2.41	10.7
26	67.68	7.02	14.6	43	4.68	4.33	15.2
37	64.75	1.98	10.7	49	4.19	3.79	15.3
57	64.46	1.46	15.4	60	3.93	1.46	18.7
17	59.30	1.51	11.4	14	3.65	1.37	11.2
52	54.02	3.09	17.4	29	2.74	1.53	12.5
12	53.25	2.78	12.7	44	1.91	1.79	15.8
32	39.92	2.61	9.6	4	1.60	1.52	9.9
47	32.83	6.32	16.4	23	1.19	1.15	10
27	31.73	4.63	11.6	24	1.17	1.11	11.5
58	30.72	2.41	15.9	9	0.75	0.48	10.5
7	29.80	5.21	14.7	25	0.75	0.72	11.5
18	25.78	2.56	10.6	50	0.64	0.60	15.8
1	25.12	14.71	11	3	0.50	0.48	10
41	24.67	16.54	16.1	20	0.41	0.13	10.3
38	24.30	2.10	12.2	40	0.38	0.13	14.9
21	21.07	14.05	12.2	55	0.31	0	15.4
53	19.06	2.83	15.6	30	0.25	0.24	12.8
33	18.62	2.84	11.3	45	0.18	0.17	16.5
13	13.43	4.21	9.6	5	0	0	15.3
48	12.74	6.91	14.9	10	0	0	9.4
2	12.74	10.34	13.2	15	0	0	10.10
59	11.80	3.31	16.6	35	0	0	12.10

наилучшими решениями и длиной критического пути. Для получения дополнительных сведений о тестовых задачах PSPLIB читатели могут обратиться к статьям [9; 10].

Описание параметров тестовых примеров можно найти в статье [9], и загрузить эти примеры по адресу http://www.om-db.wi.tum.de/psplib/. Показателем качества решения является среднее процентное отклонение (average percent deviation, APD) полученных нижних оценок (LB) для ЗРКП$^\rho$ от лучших нижних оценок (BLB), которые были взяты с веб-сайта PSPLIB по состоянию на последнее время.

В приведенных в статье таблицах серии примеров упорядочены в неубывающем порядке APD лучших эвристических решений (для множеств j60, j90 и j120) от нижних оценок, полученных с помощью алгоритма критического пути. Лучшие эвристические решения для множеств j60, j90 и j120 также взяты с сайта PSPLIB по состоянию на последнее время.

Таблицы 1–3 показывают APD полученных нижних границ от наиболее лучших известных нижних оценок и время (в миллисекундах), необходимое для их получения, для множеств примеров j60, j90 и j120, соответственно.

На основе данных этих таблиц можно сделать вывод, что качество нижних оценок возрастает с увеличением размерности задачи. Мы получили нижние оценки, очень близкие к наиболее лучшим известным нижним оценкам для трудных серий примеров из множества j120 (см. табл. 3), имеющих наибольший разрыв между найденными наилучшими решениями и длиной критического пути. В табл. 4 приведены, в качестве примера, нижние оценки для каждого экземпляра из двух таких трудных серий: серии 16 и серии 11 из множества примеров j120. Для каждого случая приведены две оценки: лучшая известная и полученная нашим алгоритмом, отклонение последней от BLB, а также процессорное время на ее нахождение.

Среднее процессорное время на обычном настольном ПК по всем экземплярам каждого из множеств примеров j60, j90 и j120 составляло 3.4, 4.8 и 13.4 миллисекунды соответственно.

Таблица 4

Нижние оценки для примеров из двух трудных серий 11 и 16 из множества примеров j120

Серия	пример	Откл. луч. реш. от критич. пути, %	Лучшая LB (из PSPLIB)	Наша LB	Откл. LB/BLB, %	время CPU, sec
j120 16	1	176.06	179	178	0.56	0.007
j120 16	2	171.76	218	214	1.83	0.006
j120 16	3	141.24	219	215	1.83	0.006
j120 16	4	150.00	189	188	0.53	0.006
j120 16	5	117.39	184	181	1.63	0.007
j120 16	6	159.49	194	193	0.52	0.007
j120 16	7	105.56	174	172	1.15	0.014
j120 16	8	151.95	182	178	2.20	0.006
j120 16	9	132.95	188	186	1.06	0.015
j120 16	10	117.35	202	200	0.99	0.012
j120 11	1	91.11	155	152	1.94	0.007
j120 11	2	102.56	145	144	0.69	0.011
j120 11	3	117.20	186	182	2.15	0.016
j120 11	4	103.13	177	170	3.95	0.007
j120 11	5	116.49	191	190	0.52	0.007
j120 11	6	130.77	189	184	2.65	0.008
j120 11	7	97.56	148	146	1.35	0.014
j120 11	8	70.53	151	149	1.32	0.014
j120 11	9	126.32	167	166	0.60	0.034
j120 11	10	100.00	163	161	1.23	0.005

Заключение

В статье рассмотрена релаксация ЗРКП (с постоянными функциями интенсивности выделения и потребления ресурсов в заданных временны́х интервалах и без директивных сроков) путем замены нескладируемых ресурсов на складируемые с целью получения нижней оценки длины расписания в задаче с использованием нескладируемых ресурсов. Проведены численные эксперименты на примерах задач из электронной библиотеки PSPLIB. Результаты расчетов показывают, что новый алгоритм вычисления нижней оценки, обладая существенно меньшей временно́й сложностью по сравнению с известными зарубежными алгоритмами, на некоторых сериях задач из PSPLIB дает результаты, близкие к лучшим значениям нижних оценок, опубликованных в этой библиотеке. Особенно хорошие оценки получаются на задачах с бо́льшим числом работ. На решение тестовых примеров библиотеки PSPLIB затрачивается чрезвычайно малое процессорное время (в среднем порядка миллисекунды на пример). В дальнейшем, при использования метода ветвей и границ для решения упомянутой задачи с нескладируемыми ресурсами, было бы желательным достичь аналогичных результатов также и для вычисления верхней оценки длины расписания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Baptiste P., Pape C.L.** Constraint propagation and decomposition techniques for highly disjunctive and highly cumulative project scheduling problems // Constraints. 2000. Vol. 5. P. 119–139. doi: 10.1023/A:1009822502231 .
2. **Blazewicz J., Lenstra J.K., Rinnoy Kan A. H. G.** Scheduling subject to resource constraints: Classification and complexity // Discrete Applied Math. Vol. 5, no. 1. 1983. P. 11–24. doi: 10.1016/0166-218X(83)90012-4 .
3. **Bottcher J., Drexl A., Salewski F.** Project scheduling under partially renewable resource constraints // Management Science. 1999. Vol. 45, no. 4. P. 543–559. doi: 10.1007/s10732-006-5224-6 .
4. **Brucker P., Drexl A., Möhring R., et al.** Resource-Constrained Project Scheduling: Notation, classification, models, and methods // Eur. J. Oper. Res. 1999. Vol. 112, no. 1. P. 3–41.
5. **Gafarov E., Lazarev A., Werner F.** On lower and upper bounds for the Resource-Constrained Project Scheduling Problem. Technical report. Magdeburg: Otto-von-Guericke Universitaet, 2010. 27 p.
6. **Hartmann S., Kolisch R.** Experimental evaluation of state-of-the-art heuristics for the Resource-Constrained Project Scheduling Problem // Eur. J. Oper. Res. 2000. Vol. 127, no. 2. P. 394–407.
7. **Herroelen W., Demeulemeester E., De Reyck B.A.** Classification scheme for project scheduling // Project Scheduling-Recent Models, Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Pub., 1998. P. 77–106. (International Ser. Oper. Research and Management Sci.; vol. 14.) doi: 10.1007/978-1-4615-5533-9_1 .
8. **Knust S.** Lower bounds on the minimum project duration // Handbook on project management and scheduling. Cham: Springer, 2015. Vol. 1, chap. 3. P. 43–56. doi: 10.1007/978-3-319-05443-8_3 .
9. **Kolisch R., Sprecher A.** PSPLIB — a Project Scheduling Problem Library // Eur. J. Oper. Res. 1996. Vol. 96. P. 205–216. doi: 10.1016/S0377-2217(96)00170-1 .
10. **Kolisch R., Sprecher A., Drexl A.** Characterization and generation of a general class of Resource-Constrained Project Scheduling Problems // Manage Science. 1995. Vol. 41. P. 1693–1703. doi: 10.1287/mnsc.41.10.1693 .
11. **Neron E., Artigues C., Baptiste P., Carlier J., Damay J., Demassey S., Laborie P.** Lower bounds for Resource Constrained Project Scheduling Problem // Perspectives in modern project scheduling. Chap. 7. Cham: Springer, 2006. P. 167–204. doi: 10.1007/978-0-387-33768-5_7 .
12. **Neumann K., Schwindt C., Trautmann N.** Scheduling of continuous and discontinuous material flows with intermediate storage restrictions // European J. Oper. Research. 2005. Vol. 165, no. 2. P. 495–509.
13. **Shirzadeh Chaleshtarti A., Shadrokh S., Fathi Y.** Branch and bound algorithms for Resource Constrained Project Scheduling Problem subject to nonrenewable resources with prescheduled procurement // Mathematical Problems in Engineering. Hindawi Publishing Corporation. 2014. Vol. 2014. doi: 10.1155/2014/634649 .
14. **Valls, V., Ballestin, F., Quintanilla, S.** A hybrid genetic algorithm for the Resource-Consrtained Project Scheduling Problem // Eur. J. Oper. Res. 2008. Vol. 185, no. 2. P. 495–508.

15. **Weglarz, J.** Project scheduling. Recent models, algorithms and applications. Boston: Kluwer Acad. Publ, 1999. 535 p. doi: 10.1007/978-1-4615-5533-9 .
16. **Алексеев А.М., Гимади Э.Х., Перепелица В.А.** Математические модели календарного планирования и управления долгосрочными проектами (на примере БАМ) // Проблемы строительства магистрали и развития строительной базы для хозяйственного освоения зоны БАМ, Новосибирск, 1977: Тр. II Всесоюзной конференции по проблемам хозяйственного освоения зоны БАМ. Благовещенск, 1977. С. 118–126.
17. **Гимади Э.Х., Пузынина Н.М.** Задача календарного планирования крупномасштабного проекта в условиях ограниченных ресурсов: опыт построения математического обеспечения // Управляемые системы. Новосибирск,1983. Вып. 23. С. 24–32.
18. **Гимади Э.Х.** О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Модели и методы оптимизации: тр. / АН СССР. Сиб. Отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск: Наука, 1988. Т. 10. С. 89–115.
19. **Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Севастьянов С.В.** Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискрет. анализ и исследование операций. 2000. Т. 7, № 1. С. 9–34.
20. **Зуховицкий С.И., Радчик И.А.** Математические методы сетевого планирования. М.: Наука, 1965. 296 с.
21. **Клейнберг Дж., Тардос Е.** Алгоритмы: разработка и применение. Классика Computers Science / пер. с англ. Е. Матвеева. СПб.: Питер, 2016. 800 с.
22. **Козлов М.К., Шафранский В.В.** Календарное планирование выполнения комплексов работ при заданной динамике поступления складируемых ресурсов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1977. № 4. С. 75–81.

Поступила 25.09.2020
После доработки 20.02.2021
Принята к публикации 26.02.2021

Гимади Эдуард Хайрутдинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный научный сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
г. Новосибирск
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Гончаров Евгений Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
г. Новосибирск
e-mail: gon@math.nsc.ru

Штепа Александр Александрович
аспирант
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ)
г. Новосибирск
e-mail: shoomath@gmail.com

REFERENCES

1. Baptiste P., Pape C. L. Constraint propagation and decomposition techniques for highly disjunctive and highly cumulative project scheduling problems. *Constraints*, 2000, vol. 5, pp. 119–139. doi: 10.1023/A:1009822502231 .
2. Blazewicz J., Lenstra J. K., Rinnoy Kan A. H. G. Scheduling subject to resource constraints: Classification and complexity. *Discrete Applied Math.*, 1983, vol. 5, no. 1, pp. 11–24. doi: 10.1016/0166-218X(83)90012-4 .

3. Bottcher J., Drexl A., Salewski F. Project scheduling under partially renewable resource constraints. *Management Sci.*, 1999, vol. 45, no. 4, pp. 543–559. doi: 10.1007/s10732-006-5224-6 .
4. Brucker P., Drexl A., Möhring R., et al. Resource-Constrained Project Scheduling: Notation, classification, models, and methods. *Eur. J. Oper. Res.*, 1999, vol. 112, no. 1, pp. 3–41.
5. Gafarov E., Lazarev A., Werner F. On Lower and upper bounds for the Resource-Constrained Project Scheduling Problem. *Technical report*, Magdeburg: Otto-von-Guericke Universitaet, 2010, 27 p.
6. Hartmann S., Kolisch R. Experimental evaluation of state-of-the-art heuristics for the Resource-Constrained Project Scheduling Problem. *Eur. J. Oper. Res.*, 2000, vol. 127, no. 2, pp. 394–407.
7. Herroelen W., Demeulemeester E., De Reyck B. A. Classification scheme for project scheduling. In: Weglarz J. (Ed.), *Project Scheduling-Recent Models, Algorithms and Applications, International*, Series in Operations Research and Management Science, vol. 14, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998, pp. 77–106. doi: 10.1007/978-1-4615-5533-9_1 .
8. Knust S. Lower bounds on the minimum project duration . In: C. Schwindt, J. Zimmermann (eds.), *Handbook on project management and scheduling*, Cham: Springer, 2015, vol. 1, chap. 3, pp. 43–56. doi: 10.1007/978-3-319-05443-8_3 .
9. Kolisch R., Sprecher A. PSPLIB — a Project Scheduling Problem Library. *Eur. J. Oper. Res.*, 1996, vol. 96, pp. 205–216. doi: 10.1016/S0377-2217(96)00170-1 .
10. Kolisch R., Sprecher A., Drexl A. Characterization and generation of a general class of Resource-Constrained Project Scheduling Problems. *Manage Science*, 1995, vol. 41, 1995, pp. 1693–1703. doi: 10.1287/mnsc.41.10.1693 .
11. Neron E., Artigues C., Baptiste P., Carlier J., Damay J., Demassey S., Laborie P. Lower bounds for Resource Constrained Project Scheduling Problem. In: J. Jozefowska, J. Weglarz (Eds.), *Perspectives in modern project scheduling*, Chap. 7, Cham: Springer, 2006, pp. 167–204. doi: 10.1007/978-0-387-33768-5_7 .
12. Neumann K., Schwindt C., Trautmann N. Scheduling of continuous and discontinuous material flows with intermediate storage restrictions. *European J. Operational Research*, 2005, vol. 165, no. 2, 2005, pp. 495–509.
13. Shirzadeh Chaleshtarti A., Shadrokh S., Fathi Y. Branch and bound algorithms for Resource Constrained Project Scheduling Problem subject to nonrenewable resources with prescheduled procurement // Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation, 2014, vol. 2014. doi: 10.1155/2014/634649 .
14. Valls, V., Ballestin, F., Quintanilla, S. A hybrid genetic algorithm for the Resource-Consrtained Project Scheduling Problem. *Eur. J. Oper. Res.*, 2008, vol. 185, no. 2, pp. 495–508.
15. Weglarz, J. Project scheduling. Recent models, algorithms and applications, Boston: Kluwer Acad. Publ, 1999. 535 p. doi: 10.1007/978-1-4615-5533-9 .
16. Alekseev A.M., Gimadi E.Kh., Perepelitsa V.A. Mathematical models of scheduling and management of long-term projects (on the example of BAM). In: *“Problems of highway construction and development of the construction base for the economic development of the BAM zone”*, (II All-Union Conference on economic development of the BAM zone, Blagoveshchensk, 1977). Novosibirsk, 1977, pp. 118–126 (in Russian).
17. Gimadi E.Kh., Puzynina N.M. Problem of the calendar planning of a large-scale design under the conditions of limited resources: experience in the construction of software. *Upravliaemie systemy*, 1983, no. 23, pp. 24–32 (in Russian).
18. Gimadi E.Kh. Some mathematical models and methods for the planning of large-scale projects. In: “Modeli i metody optimizatsii” (Optimization models and methods), Novosibirsk: Nauka Publ., 1988 (*Trudy Inst. Mat. Sib. Otd. AN SSSR*, 1988, vol. 10), pp. 89–115 (in Russian).
19. Gimadi E.Kh., Zalyubovskii V.V., Sevast’yanov S.V. Polynomial solvability of scheduling problems with storable resources and directive deadlines. *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2*, 2000, vol. 7, no. 1, pp. 9–34 (in Russian).
20. Zukhovitsky S.I., Radchik I.A. *Matematicheskie metody setevogo planirovaniya* [Mathematical methods of network planning]. Moscow: Nauka Publ., 1965, 296 p.
21. Kleinberg J., Tardos E. *Algorithm design.* Boston: Pearson/Addison-Wesley, 2006, 838 p. ISBN: 0321295358 . Translated to Russian under the title “Algoritmy: razrabotka i primenenie”. St. Petersburg: Piter Publ., 2016, 800 p.

22. Kozlov M.K., Shafransky V.V. Scheduling of the execution of complexes of jobs for a given dynamics of the receipt of stored resources. *Izv. AN SSSR, Tekhnicheskaya kibernetika*, 1977, no. 4, pp. 75–81 (in Russian).

Received September 25, 2020
Revised February 20, 2021
Accepted February 26, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Program for Fundamental Research of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (project no. 0314-2019-0014) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-31-90091).

Edward Khairutdinovich Gimadi, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru .

Evgenii Nikolaevich Goncharov, Cand. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: gon@math.nsc.ru .

Alexandr Alexandrovich Shtepa, doctoral student, Novosibirsk State University (NSU), Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: shoomath@gmail.com .

Cite this article as: E. Kh. Gimadi, E. N. Goncharov, A. A. Shtepa. A fast algorithm for finding a lower bound of the solution of the Resource-Constrained Project Scheduling Problem tested on PSPLIB instances, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 22–36 .