ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 519.65

ЗАМЕЧАНИЕ О СВЯЗИ МЕЖДУ ВТОРОЙ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ И ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

Ю. С. Волков

В недавней работе С. И. Новикова и В. Т. Шевалдина рассмотрена задача о связи между второй разделенной разностью и второй производной. Задача состоит в нахождении наименьшего значения второй производной (по равномерной норме) среди функций, интерполирующих последовательность значений на произвольных сетках, имеющих ограниченные вторые разделенные разности. В указанной работе найдены двусторонние оценки искомой величины. Мы отмечаем, что известна более точная оценка сверху, достигаемая, например, на равномерной сетке. Эту же оценку легко можно получить с помощью интерполяционных сплайнов по Субботину.

Ключевые слова: задача Фавара, интерполяция, разделенная разность, сплайны второй степени.

Yu. S. Volkov. A remark on the connection between the second divided difference and the second derivative.

In the recent paper of S.I. Novikov and V.T. Shevaldin, the problem of the relationship between the second divided difference and the second derivative has been considered. The problem is to find the smallest value (in the uniform norm) of the second derivative among the functions interpolating a sequence of values with bounded second divided differences on arbitrary grids. In their paper, two-sided estimates for the required quantity have been found. We note that a more exact upper bound is known; it is attainable, for example, on a uniform grid. This bound can be easily obtained using Subbotin's interpolation splines.

Keywords: Favard problem, interpolation, divided difference, quadratic splines.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-19-21

В работе [1] С. И. Новиков и В. Т. Шевалдин сформулировали задачу экстремальной функциональной интерполяции, состоящую в нахождении константы

$$A_n(\Delta) = \sup\nolimits_{\boldsymbol{y}\in Y_n} \inf\nolimits_{f\in F_n} \|f^{(n)}\|_{L_\infty(a,b)},$$

где $\Delta = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $a = \inf_i x_i$, $b = \sup_i x_i$,

$$Y_n = \{\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\ y_i = f_0(x_i),\ |f_0[x_i,\dots,x_{i+n}]| \le 1,\ i\in\mathbb{Z}\},$$
$$F_n = \{f : f^{(n-1)} \in AC,\ f^{(n)} \in L_\infty(a,b),\ f(x_i) = f_0(x_i),\ i\in\mathbb{Z}\},$$

здесь $g[x_i,\dots,x_{i+n}]$ означает n-ю разделенную разность функции g по узлам $x_i,\dots,x_{i+n}$. В случае равномерной сетки эта задача была решена Ю. Н. Субботиным [2], а позднее другим методом — Шёнбергом [3]. Для произвольной конечной сетки на отрезке подобную задачу решал еще в 1940 году Фавар [4], который хотел получить оценку n-й производной функции через наибольшую из заданных разделенных разностей этой функции. Он подробно разобрал случаи $n=1$ и $n=2$, а для произвольного n показал, что возникающая константа не зависит ни от функции, ни от сетки, ни от количества узлов, и предложил конструктивный алгоритм построения интерполирующей сеточные данные функции с n-й производной, "не сильно превышающей" имеющиеся разделенные разности. В 1975 г. к этой задаче обратился де Бор [5;6], который улучшил алгоритм Фавара и сформулировал явно соответствующую экстремальную задачу поиска оптимальной константы

$$K(n) = \sup_{\boldsymbol{y},\Delta} \frac{\inf\{\|f^{(n)}\|_{L_\infty(a,b)} : f\in F_n\}}{\sup_i n!|f[x_i,\dots,x_{i+n}]|}.$$

[1] Данная заметка дискуссионного характера печатается в специальном порядке по решению редколлегии журнала.

Допуская в определении величины $K(n)$ рассмотрение произвольных сеток (конечных или бесконечных), отметим очевидное неравенство $\sup_\Delta A_n(\Delta) \le n!K(n)$. Сам Фавар установил равенство $K(2)=2$, которое, согласно локальной оценке [6, p. 178], справедливо в том числе и для бесконечных сеток.

С. И. Новиков и В. Т. Шевалдин в [1] рассматривали лишь случай $n=2$. В теореме 1 они приводят двусторонние оценки константы $A_2(\Delta)$, дающие ее точное значение в случае геометрических сеток. Однако, для общего случая их оценка сверху $A_2(\Delta) \le 18$ гораздо хуже оценки $A_2(\Delta) \le 4$, следующей из упомянутого результата Фавара $K(2)=2$.

Данную оценку сверху также можно сразу получить при использовании классического интерполяционного параболического сплайна по Субботину (см. [7]), т. е. сплайна с узлами в серединах интервалов между заданными точками интерполяции. Тогда вместо равенств (3.2) в [1] с коэффициентами, задаваемыми соотношениями (3.3), получим уравнения (29) из монографии [7, с. 40], причем коэффициенты a_k, b_k, c_k надо определить так $a_k = \lambda_{k+1}/4$, $b_k = 3/4$, $c_k = \mu_{k+1}/4$.

Леммы 2 и 3 в [1] доказаны для конкретных значений коэффициентов (3.3). Однако их можно переформулировать в общем виде для любых ограниченных бесконечных трехдиагональных систем уравнений, обладающих диагональным преобладанием, без особого усложнения доказательства. Но вместе с тем утверждение леммы 2 излишне, это известное свойство вполне регулярных бесконечных систем уравнений [8, с. 37], к классу которых сводится как рассмотренная в [1] система, так и получаемая при использовании сплайна по Субботину. Таким образом, лемму 3 из [1] можно переформулировать следующим образом.

Лемма 3. *Для решения разностного уравнения*

$$a_k Z_{k+2} + b_k Z_{k+1} + c_k Z_k = 2f_0[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$$

с ограниченными коэффициентами, удовлетворяющими для всех целых k условиям

$$b_k - |a_k| - |c_k| = r_k \ge r > 0$$

для некоторого $r>0$, справедлива следующая оценка

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |Z_k| \le \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2|f_0[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]|}{r_k}.$$

Поскольку упомянутая система уравнений (29) из [7] имеет диагональное преобладание на любой неравномерной сетке, для нее $r = r_k = 1/2$, тогда $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |Z_k| \le 4$, что означает $A_2(\Delta) \le 4$ для всех сеток Δ.

Дополнительно отметим, что можно обойтись и без лемм 2, 3 (и обобщений), если воспользоваться теоремой де Бора из [9] для бесконечных матриц. Вполне неотрицательность нужной матрицы доказана в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Новиков С. И., Шевалдин В. Т.** О связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 216–224.
2. **Субботин Ю. Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
3. **Schoenberg I.J.** Cardinal interpolation and spline functions // J. Approx. Theory. 1969. Vol. 2, no. 2. P. 167–206.
4. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no. 3. P. 281–306.
5. **de Boor C.** How small can one make the derivatives of an interpolating function? // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 13, no. 2. P. 105–116.

6. **de Boor C.** A smooth and local interpolant with “small” k-th derivative, *Numerical solutions of boundary value problems for ordinary differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1974).* New York: Academic Press, 1975, pp. 177–197.
7. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
8. **Канторович Л. В., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
9. **de Boor C.** On the (bi)infinite case of Shadrin's theorem concerning the L_∞-boundedness of the L_2-spline projector // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 24–29.
10. **Волков Ю. С.** Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 7. С. 891–908.

Поступила 23.10.2020

После доработки 26.02.2021

Принята к публикации 1.03.2021

Волков Юрий Степанович

д-р физ.-мат. наук, доцент, главный науч. сотрудник

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

e-mail: volkov@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Novikov S.I., Shevaldin V.T. On the connection between the second divided difference and the second derivative. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 216–224 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224 .
2. Subbotin Yu.N. On the relations between finite differences and the corresponding derivatives, *Amer. Math. Soc. Translations*, 1967, pp. 23–42.
3. Schoenberg I.J. Cardinal interpolation and spline functions. *J. Approx. Theory*, 1969, vol. 2, no. 2, pp. 167–206. doi: 10.1016/0021-9045(69)90040-9 .
4. Favard J. Sur l'interpolation. *J. Math. Pures Appl.*, 1940, vol. 19, no. 3, pp. 281–306.
5. de Boor C. How small can one make the derivatives of an interpolating function? *J. Approx. Theory*, 1975, vol. 13, no. 2, pp. 105–116. doi: 10.1016/0021-9045(75)90043-X .
6. de Boor C. A smooth and local interpolant with “small” k-th derivative, *Numerical solutions of boundary value problems for ordinary differential equations* (*Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1974*). N Y: Acad. Press, 1975, pp. 177–197.
7. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splainy v vychislitel'noi matematike* [Splines in computational mathematics]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p.
8. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Approximate methods of higher analysis.* N Y: Interscience, 1964, 681 p. ISBN: 0471456721 .
9. de Boor C. On the (bi)infinite case of Shadrin's theorem concerning the L_∞-boundedness of the L_2-spline projector. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. 73–78. doi: 10.1134/S0081543812050082 .
10. Volkov Yu.S. Interpolation by splines of even degree according to Subbotin and Marsden. *Ukrainian Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 7, pp. 994–1012. doi: 10.1007/s11253-014-0990-z .

Received October 23, 2020

Revised February 26, 2021

Accepted March 1, 2021

Yuriy Stepanovich Volkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: volkov@math.nsc.ru .

Cite this article as: Yu. S. Volkov. A remark on the connection between the second divided difference and the second derivative, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 19–21 .