ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 517.927.4+938.5

КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов

В статье исследованы необходимые и достаточные условия существования периодических и ограниченных решений для одного класса трехмерных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В рассматриваемых системах выделены главные нелинейные положительно однородные члены. В терминах свойств главных нелинейных членов сформулированы критерии существования периодических и ограниченных решений. Для периодической задачи доказано, что ранее известное достаточное условие существования периодических решений является и необходимым. В вопросе существования ограниченных решений доказано, что при гомотопии главных нелинейных членов сохраняется свойство существования ограниченных решений. На основе этого доказан новый критерий существования ограниченных решений с использованием методов качественной теории дифференциальных уравнений и нелинейного анализа, в том числе метода направляющих функций и топологического метода Важевского. Полученные результаты в дальнейшем можно обобщить для многомерных систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: трехмерная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, периодическое решение, ограниченное решение, метод направляющих функций, вращение векторного поля, отношение гомотопности, топологический метод Важевского.

E. Mukhamadiev, A. N. Naimov. Criteria for the existence of periodic and bounded solutions of three-dimensional systems of differential equations.

We study necessary and sufficient conditions for the existence of periodic and bounded solutions for one class of three-dimensional systems of nonlinear ordinary differential equations. The main nonlinear positively homogeneous terms are distinguished in the systems under consideration. Criteria for the existence of periodic and bounded solutions are formulated in terms of the properties of main nonlinear terms. For the periodic problem, it is proved that the previously known sufficient condition for the existence of periodic solutions is also a necessary condition. In the question of the existence of bounded solutions, it is proved that under a homotopy of the main nonlinear terms, the property of the existence of bounded solutions is preserved. Based on this, a new criterion for the existence of bounded solutions is proved with the use of methods of the qualitative theory of differential equations and nonlinear analysis, including the method of guiding functions and the topological method of Vazhevsky. The obtained results can be further generalized for multidimensional systems of differential equations.

Keywords: three-dimensional system of nonlinear ordinary differential equations, periodic solution, bounded solution, method of guiding functions, rotation of a vector field, homotopy relation, Vazhevsky topological method.

MSC: 34A34, 34C25, 34A26

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-157-172

1. Введение

В статье исследован вопрос о существовании периодических и ограниченных решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$x'(t) = \nabla v(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

где ∇v — градиент функции $v \in \mathbb{V}_m$, $f \in \mathcal{R}_m$ или $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$. Здесь $\mathbb{V}_m$ — множество функций $v \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, положительно однородных порядка $(m+1)$, т. е. $v(\lambda y) \equiv \lambda^{m+1} v(y)$ $\forall \lambda > 0$, и удовлетворяющих условию $\nabla v(y) \neq 0$ при $y \neq 0$. Через $\mathcal{R}_m$ обозначено множество отображений $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ таких, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t,y)| < \infty, \quad \lim_{|y|\to\infty} |y|^{-m} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t,y)| = 0.$$

$\mathcal{R}_{m,\omega}$ — подмножество $\mathcal{R}_m$, состоящее из ω-периодических по t отображений. Вещественные числа $m > 1$ и $\omega > 0$ считаются заданными.

Вопрос о существовании периодических решений для системы уравнений (1.1) ставится следующим образом: каким условиям должна удовлетворять $v \in \mathbb{V}_m$, чтобы при любом $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$ существовало хотя бы одно ω-периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ системы уравнений (1.1)? Аналогично ставится вопрос о существовании ограниченных решений: при каких условиях на $v \in \mathbb{V}_m$ при любом $f \in \mathcal{R}_m$ существует хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ системы уравнений (1.1)?

Система уравнений (1.1) отличается от общих систем тем, что при любом $f \in \mathcal{R}_m$ функция v является направляющей функцией для системы уравнений (1.1) на бесконечности, т. е. правая часть $\nabla v(y) + f(t, y)$ системы при больших значениях $|y|$ образует острый угол с градиентом $\nabla v(y)$ функции $v(y)$. Данное свойство позволяет исследовать существование периодических и ограниченных решений системы уравнений (1.1) в терминах свойств функции v.

В настоящей работе для исследования периодических и ограниченных решений системы уравнений (1.1) применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений [1, гл. 3, 4; 2, гл. 10, §3], метод направляющих функций [3, гл. 4, §22] и методы нелинейного анализа [4, гл. 2; 5, гл. 1]. Полученные результаты дополняют результаты работ [6, теоремы 4, 5; 7, теорема 8; 8, теоремы 7, 8] применительно к системе уравнений (1.1).

В [6] исследованы периодические и ограниченные решения системы уравнений вида

$$x'(t) = P(x(t)) + g(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

где $n \geq 2$, $P \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $P(\lambda y) \equiv \lambda^m P(y)$, $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. При этом предполагается, что автономная система

$$z' = P(z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

не имеет ненулевых ограниченных решений, а возмущение g удовлетворяет условию

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|^{-m} \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t, y)| = 0.$$

В данной работе доказано существование:

1) положительно однородной направляющей функции для системы уравнений (1.2) на бесконечности;

2) ограниченных решений системы уравнений (1.2) при условии $\gamma(P) \neq 0$, где $\gamma(P)$ — вращение векторного поля (отображения) P на единичной сфере $|y| = 1$;

3) ω-периодических решений при условии, что $\gamma(P) \neq 0$ и $g(t, y)$ является ω-периодичным по t.

Условие $\gamma(P) \neq 0$ при $n = 2$ необходимо и достаточно для существования ограниченных и периодических решений при любых возмущениях g. А при $n > 2$ можно построить такое отображение P, для которого $\gamma(P) = 0$, и при любом возмущении g существует ограниченное решение системы уравнений (1.2). Например, в работе [8, разд. 2] для гладких функций v многих переменных с невырожденным градиентом на бесконечности введено число Морса $M(v)$ и доказано следующее:

1) между $M(v)$ и вращением $\gamma_\infty(\nabla v)$ векторного поля ∇v на бесконечности имеет место неравенство $|\gamma_\infty(\nabla v)| \leq M(v)$;

2) при $n > 2$ существуют функции v, для которых $\gamma_\infty(\nabla v) = 0$ и $M(v) > 0$.

Из результатов указанной работы вытекает, что если $P = \nabla v$, то условие $M(v) > 0$ необходимо и достаточно для существования ограниченных решений системы уравнений (1.2) при любом возмущении g. Применение этих результатов к системе уравнений (1.1) затруднено вычислением числа $M(v)$; необходимо разработать методы и алгоритмы вычисления $M(v)$.

В [7, теорема 5] решена задача гомотопической классификации функций $v \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям положительно однородности $v(\lambda y) \equiv \lambda^{m+1} v(y)$ и невырожденности градиента $\nabla v(y) \neq 0$ при $y \neq 0$. В терминах топологических свойств множества

$$N_-(v) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y| = 1, v(y) < 0\} \tag{1.3}$$

сформулировано условие существования ограниченных решений для системы уравнений (1.2) при $P = \nabla v$ и любом возмущении g [7, теорема 8]. Сформулированное условие при $n = 3$ равносильно тому, что множество

$$N_0(v) = \{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| = 1, v(y) = 0\} \tag{1.4}$$

должно быть пустым или несвязным.

В настоящей статье показано, что условие (1.4) необходимо и достаточно для существования ограниченных решений системы уравнений (1.1). Кроме того, доказано, что условие $\gamma(P) \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$ существовало ω-периодическое решение системы уравнений (1.1). Полученные результаты в дальнейшем можно обобщить для многомерных систем дифференциальных уравнений вида (1.1).

Существование периодических и ограниченных решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследовано в многочисленных работах других авторов. Среди них можно отметить работы [9; 10], где применяются идеи и методы, близкие к настоящей работе. В работе [11] исследованы вопросы применения метода направляющих функций в задачах нелинейного анализа.

2. Основные результаты

Рассмотрим вопрос о существовании ω-периодических решений системы уравнений (1.1) для $v \in \mathbb{V}_m$ при любом $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$. В исследовании данного вопроса используется понятие вращения векторного поля. Определение и свойства вращения векторного поля подробно изложены в монографии [5, гл. 1]. Поясним, что *n-мерным векторным полем в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называют всякое непрерывное отображение $\Phi : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^n$, где $\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω. Если векторное поле Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω не обращается в нуль, то можно определить целочисленную характеристику $\gamma(\Phi, \partial\Omega)$ — вращение векторного поля Φ на $\partial\Omega$. Способ введения вращения особой роли не играет, при использовании вращения достаточно знать основные свойства вращения векторных полей. Например, если векторное поле Φ задано во всех точках пространства $\mathbb{R}^n$ и $\Phi(y) \neq 0$ при $|y| > r_0$, то значение $\gamma(\Phi, S_r)$ не зависит от радиуса сферы $S_r = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = r\}$ при $r > r_0$; это число можно назвать *вращением векторного поля* Φ *на бесконечности* и обозначить через $\gamma_\infty(\Phi)$. Если к тому же, векторное поле Φ положительно однородно, то при любом $r > 0$ имеет место равенство $\gamma(\Phi, S_r) = \gamma(\Phi, S_1)$.

Для $v \in \mathbb{V}_m$ обозначим через $\gamma(\nabla v)$ вращение векторного поля ∇v на единичной сфере $S = \{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| = 1\}$. Согласно результатам работы [6, теорема 4] для системы уравнений (1.1) ω-периодические решения существуют, если $\gamma(\nabla v) \neq 0$. Условие $\gamma(\nabla v) \neq 0$ также необходимо для существования ω-периодических решений. А именно верна следующая теорема.

Теорема 1. *Для $v \in \mathbb{V}_m$ при любом $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$ существует ω-периодическое решение системы уравнений* (1.1) *тогда и только тогда, когда выполнено условие* $\gamma(\nabla v) \neq 0$.

Необходимость условия $\gamma(\nabla v) \neq 0$ ранее была известна при $n = 2$. Схема доказательства теоремы 1 такова: ввиду предположения $\gamma(\nabla v) = 0$ и общих свойств векторных полей [5, гл. 1, § 5] предъявлено такое отображение $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$, при котором система уравнений (1.1) не имеет ω-периодических решений. Приведенная схема применима и при $n > 3$.

Если $\gamma(\nabla v) = 0$, то при некотором $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$ система уравнений (1.1) может иметь множество периодических и ограниченных решений. Пример такой системы уравнений приведен в следующем разделе после доказательства теоремы 1.

Для исследования ограниченных решений системы уравнений (1.1), как в работе [7], введем бинарное отношение гомотопности на множестве $\mathbb{V}_m$.

Определение 1. Функции $v_1, v_2 \in \mathbb{V}_m$ назовем гомотопными, если существует семейство функций $\widetilde{v}_\mu \in \mathbb{V}_m$, $\mu \in [0,1]$, непрерывно зависящее от μ и такое, что $\widetilde{v}_0 = v_1$, $\widetilde{v}_1 = v_2$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $v_1, v_2 \in \mathbb{V}_m$ гомотопны и для $v = v_1$ при любом $f \in \mathcal{R}_m$ существует ограниченное решение системы уравнений* (1.1). *Тогда для $v = v_2$ также при любом $f \in \mathcal{R}_m$ существует ограниченное решение системы уравнений* (1.1).

Теорема 2 позволяет гомотопировать $v \in \mathbb{V}_m$ к простой функции из $\mathbb{V}_m$ и найти критерий существования ограниченных решений. В связи с этим представляет интерес задача гомотопической классификации множества $\mathbb{V}_m$. В [7, теорема 5] доказано, что гомотопический класс функции $v \in \mathbb{V}_m$ определяется некоторыми топологическими свойствами множества (1.3) Эти свойства, учитывая размерность $n = 3$, можно переформулировать для множества (1.4) и тем самым найти критерий существования ограниченных решений для системы уравнений (1.1).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для $v \in \mathbb{V}_m$ при любом $f \in \mathcal{R}_m$ существует ограниченное решение системы уравнений* (1.1) *тогда и только тогда, когда множество $N_0(v)$ пусто или не связно.*

В доказательстве теоремы 3 используется теорема 2. Кроме этого, при доказательстве необходимого условия мы опираемся на теорему Римана о конформном отображении двумерной односвязной области на круг и теорему Келлога о гладком продолжении конформного отображения вплоть до гладкой границы области [12, гл. 10, § 1]. При доказательстве достаточного условия применяются метод направляющих функций по аналогии с работами [3, гл. 4, § 22], [4, гл. 2] и топологический метод Важевского [2, гл. 10, § 3]. Суть метода Важевского состоит в том, что с помощью набора функций выделяется область в фазовом пространстве, где остаются некоторые решения $x(t)$ системы дифференциальных уравнений при возрастании t. В приведенном доказательстве в качестве набора функций используются направляющие функции $v(y)$, $v(y) \pm \varepsilon|y|^{m+1}$, где ε — малое положительное число.

Теорему 3 можно сопоставить с основной теоремой из книги [1, гл. 4, §9] и интерпретировать следующим образом: динамическая система (1.1) при некотором $f \in \mathcal{R}_m$ может быть топологически эквивалентна системе параллельных прямых линий лишь в том случае, когда множество $N_0(v)$ не пусто и связно.

Отметим, что в работе [7, теорема 7] приведена формула для $\gamma(\nabla v)$, из которой следует, что в условиях теоремы 3 значение $\gamma(\nabla v)$ может быть равным любому целому числу. Если множество $N_0(v)$ не пусто и связно, то $\gamma(\nabla v) = 0$.

3. Существование периодических решений

В этом разделе докажем теорему 1. В силу результатов работы [6, теорема 4] условие $\gamma(\nabla v) \neq 0$ *достаточно* для существования ω-периодических решений системы уравнений (1.1) при любых $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$. Докажем, что это условие также *необходимо*.

Пусть $v \in \mathbb{V}_m$ и $\gamma(\nabla v) = 0$. Построим $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$, при котором система уравнений (1.1) не имеет ω-периодических решений.

Воспользуемся теоремой 5.2 из книги [5, гл. 1, § 5], в соответствии с которой из равенства $\gamma(\nabla v) = 0$ вытекает, что векторное поле ∇v можно непрерывно продолжить без нулей внутри шара $|y| < 1$ некоторой формулой $Q(y)$: $\nabla v(y) = Q(y)$ при $|y| = 1$ и $Q(y) \neq 0$ при $|y| < 1$.

Рассмотрим систему уравнений

$$x'(t) = \nabla v(x(t)) + g(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

где отображение g определено формулой

$$g(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geq 1, \\ Q(y) - \nabla v(y), & |y| < 1. \end{cases}$$

Очевидно, $g \in \mathcal{R}_{m,\omega}$ и

$$\nabla v(y) + g(y) \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3. \tag{3.2}$$

Верна следующая лемма.

Лемма 1. *При некотором* $\omega_0 > 0$ *система уравнений* (3.1) *не имеет* ω_0*-периодических решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что такое $\omega_0 > 0$ не существует. Тогда существует последовательность периодических решений $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, системы уравнений (3.1) с периодами $\omega_k = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу периодичности решений имеем

$$\frac{1}{\omega_k} \int\limits_0^{\omega_k} \langle \nabla v(x_k(t)) + g(x_k(t)), y \rangle dt = 0 \ \ \forall y \in \mathbb{R}^3, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Если функции $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены

$$\sup_{k=1,2,\ldots} \max_{t \in \mathbb{R}} |x_k(t)| < \infty, \tag{3.4}$$

то они, как и решения системы уравнения (3.1), равностепенно непрерывны. Без ограничения общности можно считать, что последовательность функций $x_k(t)$ равномерно сходится к функции $x_0(t)$ на отрезке $[0, 1]$. В (3.3), переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\langle \nabla v(x_0(0)) + g(x_0(0)), y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3,$$

что противоречит (3.2). Таким образом, для завершения доказательства леммы остается показать оценку (3.4).

Предположим, что оценка (3.4) не верна. Тогда можно считать, что

$$r_k := \max_{t \in \mathbb{R}} |x_k(t)| = |x_k(t_k)| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим функции $z_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{1-m} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$. Для этих функций имеем

$$z_k'(t) = \nabla v(z_k(t)) + r_k^{-m} g(z_k(t)), \quad |z_k(t)| \leq |z_k(0)| = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда, переходя к пределу, получим

$$z_0'(t) = \nabla v(z_0(t)), \quad |z_0(t)| \leq |z_0(0)| = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Существование такой функции $z_0(t)$ невозможно из-за того, что $\nabla v(y) \neq 0$ при $y \neq 0$. Действительно, рассмотрев функцию $\xi(t) = v(z_0(t))$, имеем $\xi(t)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, $\xi'(t) = |\nabla v(z_0(t))|^2$, $\xi'(0) = |\nabla v(z_0(0))|^2 > 0$, следовательно, существуют конечные пределы $\xi(t) \to \xi_-$ при $t \to -\infty$ и $\xi(t) \to \xi_+$ при $t \to +\infty$, где $\xi_- < \xi_+$, а также последовательности $\tau_k \to -\infty$ и $s_k \to +\infty$, вдоль которых $\xi'(t)$ стремится к нулю

$$\xi'(\tau_k) = |\nabla v(z_0(\tau_k))|^2 \to 0, \quad \xi'(s_k) = |\nabla v(z_0(s_k))|^2 \to 0.$$

Отсюда выводим $z_0(\tau_k) \to 0$, $z_0(s_k) \to 0$ и $\xi_- = \xi_+ = 0$ — противоречие.

Лемма 1 доказана.

В системе уравнений (3.1) произведем замену $z(t) = \lambda_0 x(\lambda_0^{m-1} t)$, где $\lambda_0 = (\omega_0/\omega)^{1/(m-1)}$. Тогда получаем следующую систему уравнений

$$z'(t) = \nabla v(z(t)) + \lambda_0^m g(\lambda_0^{-1} z(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^3. \tag{3.5}$$

Согласно произведенной замене всякому ω-периодическому решению системы уравнений (3.5) соответствует ω_0-периодическое решение системы уравнений (3.1). Поэтому в силу леммы 1 система уравнений (3.5) не может иметь ω-периодические решения. Таким образом, при $f(y) = \lambda_0^m g(\lambda_0^{-1} y)$ система уравнений (1.1) не имеет ω-периодических решений.

Теорема 1 доказана.

Если $\gamma(\nabla v) = 0$, то при некотором $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$ система уравнений (1.1) может иметь множество периодических и ограниченных решений.

П р и м е р. Рассмотрим автономную систему

$$x'(t) = \nabla v_0(x(t)) + f_0(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^3, \tag{3.6}$$

где

$$v_0(y) = y_3(y_3^2 - y_1^2 - y_2^2), \quad y = (y_1, y_2, y_3),$$

$$f_0(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geq 1, \\ Q_0(y) - \nabla v_0(y), & |y| < 1, \end{cases}$$

$$Q_0(y) = \begin{pmatrix} -2y_3\left[y_1 \cos 2\pi(1-|y|^2) + y_2 \sin 2\pi(1-|y|^2)\right] \\ -2y_3\left[-y_1 \sin 2\pi(1-|y|^2) + y_2 \cos 2\pi(1-|y|^2)\right] \\ 3y_3^2 - y_1^2 - y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно можно проверить, что $v_0 \in \mathbb{V}_2$ и $f_0 \in \mathcal{R}_2$. Вращение $\gamma(\nabla v_0)$ согласно работе [7, теорема 7] можно вычислить формулой $\gamma(\nabla v_0) = 1 - \chi(N_-(v_0))$, где $\chi(N_-(v_0))$ — эйлерова характеристика множества

$$N_-(v_0) = \{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| = 1, v_0(y) < 0\}.$$

В данном случае множество $N_-(v_0)$ состоит из объединения кольца и круга, у которых эйлеровы характеристики равны 0 и 1 соответственно. Следовательно, $\chi(N_-(v_0)) = 1$ и $\gamma(\nabla v_0) = 0$.

Следующие вектор-функции являются периодическими решениями автономной системы (3.6):

$$x^+(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}t\right) \\ \frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}t\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \quad x^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}t\right) \\ \frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}t\right) \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix},$$

$$y^+(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad y^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Численное решение автономной системы (3.6) показывает, что:

1) решения $y^-(t)$ и $y^+(t)$ устойчивы по Ляпунову при $t > 0$ и $t < 0$ соответственно, а решения $x^-(t)$ и $x^+(t)$ неустойчивы;

2) имеется множество непериодических ограниченных решений, траектории которых заполняют множество поверхностей в пространстве $\mathbb{R}^3$.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть функции $v_1, v_2 \in \mathbb{V}_m$ гомотопны посредством семейства функций $\widetilde{v}_\mu \in \mathbb{V}_m$, $\mu \in [0,1]$. Для данного семейства докажем одну коэрцитивную оценку.

Лемма 2. *Найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что при любых $\mu \in [0,1]$, $x \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^3)$, если*

$$r_0 < \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| < \infty,$$

имеет место неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| x'(t) - \nabla\widetilde{v}_\mu(x(t)) \right| > \varepsilon_0 \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|^m. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что указанные числа $\varepsilon_0 > 0$ и $r_0 > 0$ не существуют. Тогда найдутся последовательности $\mu_k \in [0,1]$, $x_k \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^3)$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$r_k := \sup_{t\in\mathbb{R}} |x_k(t)| < \infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| x_k'(t) - \nabla\widetilde{v}_{\mu_k}(x_k(t)) \right| < k^{-1} r_k^m, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$r_k \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим функции $z_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{1-m} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, где t_k при каждом k выбрано так, что $|x_k(t_k)| > r_k - k^{-1}$. Для этих функций имеем

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |z_k(t)| = 1, \quad |z_k(0)| > 1 - (kr_k)^{-1}, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| z_k'(t) - \nabla\widetilde{v}_{\mu_k}(z_k(t)) \right| < k^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Переходя к пределу, получим функцию $z_0(t)$, которая является ограниченным решением автономной системы

$$z_0'(t) = \widetilde{v}_{\mu_0}(z_0(t))$$

и удовлетворяет условию $|z_0(0)| = 1$. Существование такой функции $z_0(t)$, как было показано при доказательстве леммы 1, противоречит условию $\nabla v(y) \neq 0$ при $y \neq 0$.

Лемма 2 доказана.

Выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы при любых λ, μ $[0,1]$, $|\lambda - \mu| < \delta_0$, $y \in \mathbb{R}^3$ имело место неравенство

$$|\nabla\widetilde{v}_\lambda(y) - \nabla\widetilde{v}_\mu(y)| < \frac{\varepsilon_0}{4} |y|^m. \tag{4.2}$$

Рассмотрим две системы уравнений

$$x'(t) = \nabla\widetilde{v}_\lambda(x(t)) + f(t, x(t)), \tag{4.3}$$

$$z'(t) = \nabla\widetilde{v}_\mu(z(t)) + g(t, z(t)). \tag{4.4}$$

Покажем, что если $\lambda, \mu \in [0,1]$, $|\lambda - \mu| < \delta_0$ и система уравнений (4.3) при любом $f \in \mathcal{R}_m$ имеет ограниченное решение, то система уравнений (4.4) также имеет ограниченное решение при любом $g \in \mathcal{R}_m$. Этим самым теорема 2 будет доказана.

Пусть $g \in \mathcal{R}_m$. Для g верна оценка $|g(t,y)| < (\varepsilon_0/4)|y|^m + g_0$, где g_0 — некоторое положительное число, не зависящее от t и y. Выберем $r > r_0$ так, что $r^m > 2g_0/\varepsilon_0$, и положим

$$f_{\lambda,\mu}(t,y) = g(t,y) + \eta_r(|y|) \left(\nabla\widetilde{v}_\mu(y) - \nabla\widetilde{v}_\lambda(y) \right),$$

где $\eta_r \in C[0, +\infty]$, $0 \le \eta_r(s) \le 1$, $\eta_r(s) = 1$ при $s \le r$ и $\eta_r(s) = 0$ при $s \ge r+1$. В наших условиях при $f = f_{\lambda,\mu}$ существует ограниченное решение $x_{\lambda,\mu}$ системы уравнений (4.3). Проверим, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |x_{\lambda,\mu}(t)| \le r, \tag{4.5}$$

тогда $x_{\lambda,\mu}$ будет решением системы уравнений (4.4) при заданном $g \in \mathcal{R}_m$. Действительно, если (4.5) не верно, то согласно лемме 2 должно выполняться неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|x'_{\lambda,\mu}(t)-\nabla\widetilde{v}_\mu(x_{\lambda,\mu}(t))\right|>\varepsilon_0\sup_{t\in\mathbb{R}}|x_{\lambda,\mu}(t)|^m.$$

Но с другой стороны, учитывая (4.3) и (4.2) имеем

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|x'_{\lambda,\mu}(t)-\nabla\widetilde{v}_\mu(x_{\lambda,\mu}(t))\right|\le\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t,x_{\lambda,\mu}(t))|+\sup_{t\in\mathbb{R}}|\nabla\widetilde{v}_\mu(x_{\lambda,\mu}(t))-\nabla\widetilde{v}_\lambda(x_{\lambda,\mu}(t))|$$
$$\le\frac{\varepsilon_0}{4}\sup_{t\in\mathbb{R}}|x_{\lambda,\mu}(t)|^m+g_0+\frac{\varepsilon_0}{4}\sup_{t\in\mathbb{R}}|x_{\lambda,\mu}(t)|^m<\varepsilon_0\sup_{t\in\mathbb{R}}|x_{\lambda,\mu}(t)|^m.$$

Пришли к противоречию.

Теорема 2 доказана.

Функцию $v\in\mathbb{V}_m$ можно приблизить гладкими функциями

$$v_\varepsilon(y)=|y|^{m+1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}K_\varepsilon\Big(\Big|\frac{y}{|y|}-z\Big|\Big)v(z)dz,\quad y\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\},\quad v_\varepsilon(0)=0,$$

где $\varepsilon>0$, $K_\varepsilon(s)=0$ при $|s|\ge\varepsilon$ и

$$K_\varepsilon(s)=c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-s^2}},\quad |s|<\varepsilon,\quad \int\limits_{\mathbb{R}^3}K_\varepsilon(|z|)dz=1.$$

Можно проверить, что $v_\varepsilon\in\mathbb{V}_m\cap C^\infty\left(\mathbb{R}^3\setminus\{0\};\mathbb{R}\right)$ и

$$\max_{|y|=1}\left(|v_\varepsilon(y)-v(y)|+|\nabla v_\varepsilon(y)-\nabla v(y)|\right)\to0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to0.$$

Поэтому функция v_ε при малых ε линейно гомотопна функции v. Отсюда в силу теоремы 2 приходим к следующим выводам.

З а м е ч а н и е 1. *В вопросе существования ограниченных решений системы уравнений* (1.1) *без ограничения общности можно считать, что* $v\in\mathbb{V}_m\cap C^\infty\left(\mathbb{R}^3\setminus\{0\};\mathbb{R}\right)$.

Аналогично верно

З а м е ч а н и е 2. *В вопросе существования ограниченных решений системы уравнений* (1.1) *без ограничения общности можно считать, что* $f\in\mathcal{R}_m\cap C^{0,\infty}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3\right)$.

В этом можно убедиться, приближая $f\in\mathcal{R}_m$ отображениями

$$f_\varepsilon(t,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}K_\varepsilon\left(|y-z|\right)f(t,z)dz,\quad y\in\mathbb{R}^3,\quad\varepsilon>0.$$

Легко проверить, что $f_\varepsilon\in\mathcal{R}_m\cap C^{0,\infty}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3\right)$ и при любых $r>0$ и $T>0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R},|y|\le r}|f_\varepsilon(t,y)|\le\sup_{t\in\mathbb{R},|y|\le r}|f(t,y)|,$$

$$\max_{|t|\le T,|y|\le r}|f_\varepsilon(t,y)-f(t,y)|\to0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to0.$$

Если при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ система уравнений

$$x'_\varepsilon(t)=\nabla v(x_\varepsilon(t))+f_\varepsilon(t,x_\varepsilon(t))\tag{4.6}$$

имеет ограниченное решение x_ε, то верна оценка

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1}r_\varepsilon=\sup_{t\in\mathbb{R},0<\varepsilon<\varepsilon_1}|x_\varepsilon(t))|<\infty.\tag{4.7}$$

Действительно, при $r_\varepsilon>r_0$ в силу леммы 2 имеем

$$\varepsilon_0r_\varepsilon^m<\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|x'_\varepsilon(t)-\nabla v(x_\varepsilon(t))\right|\le\sup_{t\in\mathbb{R},|y|\le r_\varepsilon}|f(t,y)|\le\frac{1}{2}\varepsilon_0r_\varepsilon^m+c_0.$$

Отсюда вытекает оценка (4.7). Учитывая эту оценку и переходя к пределу в системе уравнений (4.6) при $\varepsilon\to0$, получим ограниченное решение системы уравнений (1.1).

5. Существование ограниченных решений

Приведем доказательство теоремы 3. *Необходимость.* Пусть $v \in \mathbb{V}_m$ и множество

$$N_0(v) = \{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| = 1, v(y) = 0\}$$

не пусто и связно. Покажем, что при некотором $f \in \mathcal{R}_m$ система уравнений (1.1) не имеет ограниченных решений. С учетом замечания 1 можно считать, что $v \in \mathbb{V}_m \cap C^\infty\big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R}\big)$. В этом случае $N_0(v)$ представляет собой достаточно гладкую замкнутую линию без самопересечений. Ниже докажем, что функция v гомотопна функции $v^*(y) = y_3|y|^m$. Для функции v^* система уравнений

$$x'(t) = \nabla v^*(x(t)) + (0,0,1)^\top$$

не имеет ограниченных решений, так как правая часть третьего уравнения не меньше 1. Тогда в силу теоремы 2 для функции v не при всех $f \in \mathcal{R}_m$ существует ограниченное решение системы уравнений (1.1), т.е. необходимость будет доказана.

Без ограничения общности можно считать, что $v(0,0,1) > 0$ и $v(0,0,-1) < 0$. Гомотопность функций v и v^* докажем следующим образом. Построим семейство диффеоморфизмов $\Phi(\cdot,\lambda) : S \mapsto S$, $\lambda \in [0,1]$ сферы $S = \{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| = 1\}$ в себя, обладающее следующими свойствами:

$$\Phi(y,0) = y, \quad y \in S, \quad \Phi(N_0(v),1) = N_0(v^*), \quad \Phi(N_\pm(v),1) = N_\pm(v^*).$$

Тогда гомотопию v и v^* можно определить в виде

$$\widetilde{v}_\lambda(y) = \begin{cases} |y|^m v\Big(\Phi^{-1}\Big(\dfrac{y}{|y|}, 2\lambda\Big)\Big), & \lambda \in [0,1/2], \\ (2-2\lambda)|y|^m v\Big(\Phi^{-1}\Big(\dfrac{y}{|y|}, 1\Big)\Big) + (2\lambda-1)v^*(y), & \lambda \in (1/2,1]. \end{cases}$$

Сферу S с выколотой точкой $(0,0,1)$ отобразим на плоскость $\mathbb{R}^2$ формулой

$$F(y) = \Big(\frac{y_1}{1-y_3}, \frac{y_2}{1-y_3}\Big) \colon S \setminus \{(0,0,1)\} \mapsto \mathbb{R}^2,$$

где $y = (y_1,y_2,y_3) \in S$. При таком отображении имеем $F(N_0(v)) = \Gamma$ — гладкая плоская линия, ограничивающая некоторую ограниченную односвязную область D, $(0,0) \in D$, $F(N_0(v^*)) = \Gamma_1$ есть единичная окружность $|\xi| = 1$, линии Γ и Γ_1 лежат внутри некоторого круга $|\xi| < \rho$.

Построим семейство диффеоморфизмов $\varphi(\cdot,\lambda) \colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0,1]$, преобразующее линию Γ в линию Γ_1 и обладающее следующими свойствами:

$$\varphi(\xi,0) = \xi \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\xi,\lambda) = \xi \quad \text{при} \quad |\xi| > \rho, \lambda \in [0,1], \quad \varphi(\Gamma,1) = \Gamma_1.$$

Тогда семейство диффеоморфизмов $\Phi(\cdot,\lambda) \colon S \mapsto S$, $\lambda \in [0,1]$, можно определить формулой

$$\Phi(y,\lambda) = \begin{cases} y, & |F(y)| > \rho, \\ F^{-1}\left(\varphi(F(y),\lambda)\right), & |F(y)| \le \rho. \end{cases}$$

Возьмем круг $\Omega_{\delta_0} = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| < \delta_0\} \subset D$ с границей Γ_{δ_0}. Семейство диффеоморфизмов $\varphi(\cdot,\lambda) \colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0,1]$ построим в два этапа:

$$\varphi(\xi,\lambda) = \begin{cases} \varphi_1(\xi,2\lambda), & \lambda \in [0,1/2], \\ \varphi_2(\xi,2\lambda-1), & \lambda \in (1/2,1], \end{cases}$$

где $\varphi_i(\xi,\lambda) = \xi$ при $|\xi| > \rho$, $\lambda \in [0,1]$, $\varphi_i(\xi,0) = \xi$ при $\xi \in \mathbb{R}^2$, $i = 1,2$ и при некотором $\delta \in (0,\delta_0)$ имеют место равенства $\varphi_1(\Gamma,1) = \Gamma_\delta$, $\varphi_2(\Gamma_\delta,1) = \Gamma_1$.

Семейство $\varphi_1(\cdot,\lambda)\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0,1]$ построим вдоль траекторий специально конструируемой двумерной автономной системы. А для построения автономной системы воспользуемся теоремой Римана о конформном отображении двумерной односвязной области на круг и теоремой Келлога о гладком продолжении конформного отображения вплоть до гладкой границы области [12, гл. 10, § 1]. Согласно теореме Римана существует непрерывное отображение $\Psi\colon \overline{D} \mapsto \overline{\Omega}_{\delta_0}$, конформное внутри области D и удовлетворяющее условиям $\Psi(\Gamma) = \Gamma_{\delta_0}$, $\Psi((0,0)) = (0,0)$. Данное отображение в соответствии с теоремой Келлога непрерывно дифференцируемо на $\overline{D}$.

Рассмотрим функцию $u(\xi) = |\Psi(\xi)|^2$, $\xi \in \overline{D}$. Можно непосредственно проверить, что $u \in C^1(\overline{D};\mathbb{R}^1)$, $\nabla u(\xi) \neq (0,0)$ $\forall \xi \in \overline{D} \setminus (0,0)$, $\nabla u(\xi) \parallel n(\xi)$ $\forall \xi \in \Gamma$, где $n(\xi)$ — единичный внешний нормальный вектор в точке $\xi \in \Gamma$. Учитывая, что $(0,0)$ является точкой минимума функции u и отображение Ψ конформно в окрестности точки $(0,0)$, выберем $\delta \in (0,\delta_0)$ так, чтобы при $|\xi| \le \delta$ имело место неравенство $\langle \nabla u(\xi), \xi \rangle \ge \alpha|\xi|^2$; здесь $\alpha > 0$ и не зависит от ξ. Векторное поле ∇u непрерывно продолжим вне $\overline{D}$ на множестве D_ε точек $\xi + l \cdot n(\xi)$, где $\xi \in \Gamma$, $l \in (0,\varepsilon)$. Число $\varepsilon > 0$ выберем настолько малым, что множество $\overline{D}_\varepsilon$ лежит внутри круга $|\xi| < \rho$ и в любой точке $z \in \overline{D}_\varepsilon$ единственно разложение $z = \eta(z) + l(z)n(\eta(z))$, где $\eta(z) \in \Gamma$, $l(z) \in [0,\varepsilon]$. Функции $\eta(z)$ и $l(z)$ определены на $\overline{D}_\varepsilon$ и являются гладкими в силу того, что линию Γ считаем достаточно гладкой. Непрерывное продолжение векторного поля ∇u определим следующей формулой:

$$G(z) = \begin{cases} \nabla u(z), & z \in D, \\ (1 - \varepsilon^{-1} l(z)) \nabla u(\eta(z)), & z = \eta(z) + l(z)n(\eta(z)) \in \overline{D}_\varepsilon, \\ 0, & z \notin D \cup \overline{D}_\varepsilon. \end{cases}$$

Рассмотрим автономную систему

$$z'(t) = G(z(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^2.$$

Для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^2$ существует единственное решение $Z(t,\xi)$ автономной системы, определенное при всех $t \in (-\infty,+\infty)$ и удовлетворяющее начальному условию $Z(0,\xi) = \xi$. Любое нестационарное решение $Z(t,\xi)$ обладает следующими свойствами:

1) траектория решения расположена внутри области $\overline{D} \cup D_\varepsilon$;

2) имеют место пределы $Z(t,\xi) \to (0,0)$ при $t \to -\infty$ и $Z(t,\xi) \to P_\varepsilon(\xi)$ при $t \to +\infty$, где $P_\varepsilon(\xi)$ — граничная точка области $\overline{D} \cup D_\varepsilon$;

3) существуют единственные моменты времени $\tau_{\Gamma_\delta}(\xi)$ и $\tau_\Gamma(\xi)$, при которых имеют места включения $Z(\tau_{\Gamma_\delta}(\xi),\xi) \in \Gamma_\delta$ и $Z(\tau_\Gamma(\xi),\xi) \in \Gamma$.

Последнее следует из свойства 2) и выше отмеченных свойств градиента функции u:

$$\nabla u(\xi) \parallel n(\xi) \quad \forall \xi \in \Gamma, \qquad \langle \nabla u(\xi), \xi \rangle \ge \alpha|\xi|^2 \quad \text{при} \quad |\xi| \le \delta.$$

Функции $\tau_{\Gamma_\delta}(\xi)$ и $\tau_\Gamma(\xi)$ определены на множестве $\overline{D} \cup D_\varepsilon \setminus (0,0)$ и непрерывно дифференцируемы в силу теоремы о неявной функции. Пределы этих функций при приближении ξ к точке $(0,0)$ равны $+\infty$, при приближении ξ к граничной точке области $\overline{D} \cup D_\varepsilon$ равны $-\infty$, при этом разность $(\tau_{\Gamma_\delta}(\xi) - \tau_\Gamma(\xi))$ ограничена.

Первое семейство диффеоморфизмов $\varphi_1(\cdot,\lambda)\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0,1]$ построим следующей формулой:

$$\varphi_1(\xi,\lambda) = \begin{cases} (0,0), & \xi = (0,0), \\ Z\left(\lambda\left[\tau_{\Gamma_\delta}(\xi) - \tau_\Gamma(\xi)\right], \xi\right), & \xi \in (\overline{D} \cup D_\varepsilon) \setminus (0,0), \\ \xi, & \xi \notin \overline{D} \cup D_\varepsilon. \end{cases}$$

Второе семейство диффеоморфизмов $\varphi_2(\cdot,\lambda)\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0,1]$ построим так:

$$\varphi_2(\xi,\lambda) = \begin{cases} (0,0), & \xi = (0,0), \\ \Theta\left(\lambda\left[t_1(|\xi|) - t_\delta(|\xi|)\right], |\xi|\right)\xi, & 0 < |\xi| < \rho, \\ \xi, & |\xi| \ge \rho. \end{cases}$$

Здесь $\Theta(t,\theta_0)$ — решение скалярной автономной системы

$$\theta'(t)=\theta(t)(1-\rho^{-1}\theta(t)),\quad \theta(t)\in(0,\rho),$$

удовлетворяющее начальному условию $\Theta(0,\theta_0)=\theta_0$, где $\theta_0\in(0,\rho)$. Функции $t_\delta(\theta_0)$ и $t_1(\theta_0)$ однозначно определяются из условий $\Theta\left(t_\delta(\theta_0),\theta_0\right)=\delta$ и $\Theta\left(t_1(\theta_0),\theta_0\right)=1$ соответственно. Можно проверить, что таким образом построенные семейства диффеоморфизмов обладают нужными свойствами. Первое семейство диффеоморфизмов осуществляет гладкое сжатие области $\overline{D}\cup D_\varepsilon$ в себя, при котором линия Γ преобразуется в линию Γ_δ. Второе семейство диффеоморфизмов осуществляет гладкое растяжение круга радиуса ρ в себя, при котором линия Γ_δ преобразуется в линию Γ_1.

Достаточность. Пусть $v\in\mathbb{V}_m$, $f\in\mathcal{R}_m$ и множество $N_0(v)$ пусто или не связно. Докажем существование ограниченного решения системы уравнений (1.1).

Если $N_0(v)$ пусто, то согласно формуле, приведенной в работе [7, теорема 7], имеет место равенство $|\gamma(\nabla v)|=1$. В этом случае существование ограниченного решения следует из результатов работы [6, теорема 5].

В случае, когда $N_0(v)$ не пусто и не связно, существование ограниченного решения докажем, применяя метод направляющих функций по аналогии с работами [3, гл. 4, §22], [4, гл. 2] и топологический метод Важевского [2, гл. 10, §3]. Суть метода Важевского состоит в том, что с помощью набора функций выделяется область в фазовом пространстве, где остаются некоторые решения $x(t)$ системы дифференциальных уравнений при возрастании t. В качестве набора функций возьмем направляющие функции $v(y)$, $v(y)\pm\varepsilon|y|^{m+1}$, где ε — малое положительное число.

Сначала докажем одну лемму о неограниченных решениях системы уравнений (1.1).

Лемма 3. *Если $f\in\mathcal{R}_m$ и решение $x(t)$ системы уравнений* (1.1) *не ограничено на интервале* $(0,t_+)$, *то $|x(t)|\to\infty$, $v(x(t))\to+\infty$ при $t\to t_+$ и $t_+<+\infty$.*

Доказательство. Предположим, что $x(t)$ не ограничено на интервале $(0,t_+)$ и существует возрастающая последовательность $t_k\to t_+$, вдоль которой $x(t)$ ограничено:

$$\sup_k|x(t_k)|<\infty,\quad r_k=\sup_{t_k<t<t_{k+1}}|x(t)|=|x(\tau_k)|\to\infty,\quad k\to\infty.$$

Тогда для функций $z_k(t)=r_k^{-1}x(\tau_k+r_k^{1-m}t)$, $k=1,2,\dots$, имеем

$$z_k'(t)=\nabla v(z_k(t))+o(1),\quad |z_k(t)|\le|z_k(0)|=1,\quad t\in(\alpha_k,\beta_k),$$

где $\alpha_k=-(\tau_k-t_k)r_k^{m-1}$, $\beta_k=(t_{k+1}-\tau_k)r_k^{m-1}$ и $z_k(\alpha_k)\to0$, $z_k(\beta_k)\to0$. Переходя к пределу, получим

$$z_0'(t)=\nabla v(z_0(t)),\quad |z_0(t)|\le|z_0(0)|=1,\quad t\in(\alpha_0,\beta_0);$$

здесь α_0, β_0 — предельные точки последовательностей α_k, β_k соответственно. При этом $z_0(\alpha_0)=0$, если $\alpha_0>-\infty$, и $z_0(\beta_0)=0$, если $\beta_0<+\infty$. Случай $\alpha_0=-\infty$ и $\beta_0=+\infty$ невозможен; это показано в ходе доказательства леммы 1. Случаи $\alpha_0>-\infty$ и $\beta_0<+\infty$ также невозможны, так как с учетом $m>1$ ненулевое решение $z_0(t)$ автономной системы $z'=\nabla v(z)$ не может обращаться в нуль при конечном t. Пришли к противоречию. Отсюда следует, что $|x(t)|\to\infty$ при $t\to t_+$.

Выберем $c_0>0$ и $r_0>0$ так, чтобы при любых $t\in\mathbb{R}$, $|y|>r_0$ имело место неравенство

$$\langle\nabla v(y)-c_0(m+1)|y|^{m-1}y,\nabla v(y)+f(t,y)\rangle>0,$$

и выберем $t_0\in(0,t_+)$ так, чтобы при $t\in(t_0,t_+)$ имело место неравенство $|x(t)|>r_0$. Тогда производная функции $v(x(t))-c_0|x(t)|^{m+1}$ положительна на интервале (t_0,t_+):

$$\bigl(v(x(t))-c_0|x(t)|^{m+1}\bigr)'=\bigl\langle\nabla v(x(t))-c_0(m+1)|x(t)|^{m-1}x(t),x'(t)\bigr\rangle$$

$$=\bigl\langle\nabla v(x(t))-c_0(m+1)|x(t)|^{m-1}x(t),\nabla v(x(t))+f(t,x(t))\bigr\rangle>0.$$

Отсюда вытекает, что $v(x(t)) \to +\infty$ при $t \to t_+$. Более того, существуют $t_1 \in (t_0, t_+)$ и $c_1 > 0$ такие, что $v(x(t)) > c_1|x(t)|^{m+1}$ при $t \in (t_1, t_+)$. Из этого неравенства выводим

$$\frac{1}{2}\left(|x(t)|^2\right)' = \langle x(t), x'(t)\rangle = \langle \nabla v(x(t)) + f(t, x(t)), x(t)\rangle$$

$$= (m+1)v(x(t)) + \langle f(t, x(t)), x(t)\rangle > c_2|x(t)|^{m+1},$$

$$\left(|x(t)|^2\right)'\left(|x(t)|^2\right)^{-\frac{m+1}{2}} > c_2, \quad t \in (t_1, t_+),$$

$$\frac{2}{m-1}\left(\left(|x(t_1)|^2\right)^{-\frac{m-1}{2}} - \left(|x(t)|^2\right)^{-\frac{m-1}{2}}\right) \geq c_2(t - t_1), \quad t \in (t_1, t_+),$$

Отсюда следует, что $t_+ < +\infty$.

Лемма 3 доказана.

При наших предположениях множество $N_0(v)$ не связно, поэтому одно из множеств

$$N_\pm(v) = \{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| = 1,\ \pm v(y) > 0\}$$

не связно. Без ограничения общности можно считать, что $N_+(v)$ не связно. Тогда множество

$$\{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| > 1,\ v(y) > -\varepsilon|y|^{m+1}\}$$

при малых $\varepsilon > 0$ также не связно. Выберем такое ε и которое меньше, чем $a/(m+1)$, где a — наименьшее значение $|\nabla v(y)|$ при $|y| = 1$. Зададим $\sigma \in (0, (m+1)\varepsilon)$, $c > 0$ и введем множество

$$\mathcal{R}_m(\sigma, c) = \left\{f \in \mathcal{R}_m \colon |f(t, y)| \leq \sigma|y|^m + c \ \ \forall t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Теперь выберем $\rho > 1$ так, чтобы при любых $f \in \mathcal{R}_m(\sigma, c)$, $t \in \mathbb{R}$, $|y| \geq \rho$ выполнялись неравенства $((m+1)\varepsilon - \sigma)|y|^m - c > 0$, $\langle \nabla v(y) \pm \varepsilon(m+1)|y|^{m-1}y, \nabla v(y) + f(t, y)\rangle > 0$. Введем множества

$$\Omega(\rho, \pm\varepsilon) = \left\{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| > \rho \quad v(y) > \pm\varepsilon|y|^{m+1}\right\},$$

$$D(\rho, \varepsilon) = \left\{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| < \rho\right\} \cup \Omega(\rho, -\varepsilon).$$

В силу выбора ε множества $\Omega(\rho, \pm\varepsilon)$ не связны.

Пусть $f \in \mathcal{R}_m(\sigma, c)$ и $x(t)$ — решение системы уравнений (1.1), определенное на наибольшем интервале (t_-, t_+), где $t_- t_+ < 0$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Если $x(t_0) \in \overline{D}(\rho, \varepsilon)$ при некотором $t_0 \in (t_-, t_+)$, то $x(t) \in D(\rho, \varepsilon)$ при всех $t \in (t_0, t_+)$.

2. Если $x(t_0) \in \overline{\Omega}(\rho, \varepsilon)$ при некотором $t_0 \in (t_-, t_+)$, то $x(t) \in \Omega(\rho, \varepsilon)$ при всех $t \in (t_0, t_+)$ и $|x(t)| \to \infty$, $v(x(t)) \to +\infty$ при $t \to t_+$.

   Отсюда, как следствие, вытекают

3. Если $x(t_0) \in \overline{D}(\rho, \varepsilon)$ при некотором $t_0 \in (t_-, t_+)$ и $x(t)$ не ограничено на интервале (t_0, t_+), то существует $t_1 \in (t_0, t_+)$ такое, что $x(t) \in \Omega(\rho, \varepsilon)$ при всех $t \in (t_1, t_+)$.

4. Если $x(t_0) \in \overline{D}(\rho, \varepsilon)$ при некотором $t_0 \in (t_-, t_+)$ и $x(t)$ ограничено на интервале (t_0, t_+), то $x(t) \notin \overline{\Omega}(\rho, \varepsilon)$ при всех $t \in (t_0, t_+)$.

1. Можно считать, что $x(t_0)$ — граничная точка области $D(\rho, \varepsilon)$. Тогда либо $|x(t_0)| = \rho$, $v(x(t_0)) < -\varepsilon|x(t_0)|^{m+1}$, либо $|x(t_0)| \geq \rho$, $v(x(t_0)) = -\varepsilon|x(t_0)|^{m+1}$. В первом случае производная $|x(t)|^2$ при $t = t_0$ отрицательна:

$$\tfrac{1}{2}\left(|x(t)|^2\right)' = \langle x(t), x'(t)\rangle = \langle \nabla v(x(t)) + f(t, x(t)), x(t)\rangle = (m+1)v(x(t))$$

$$+ \langle f(t, x(t)), x(t)\rangle < -(m+1)\varepsilon|x(t)|^{m+1} + |x(t)|\left(\sigma|x(t)|^m + c\right) < 0.$$

Во втором случае производная $v(x(t))+\varepsilon|x(t)|^{m+1}$ при $t=t_0$ положительна:

$$\big(v(x(t))+\varepsilon|x(t)|^{m+1}\big)'=\big\langle\nabla v(x(t))+\varepsilon(m+1)|x(t)|^{m-1}x(t),x'(t)\big\rangle$$

$$=\big\langle\nabla v(x(t))+\varepsilon(m+1)|x(t)|^{m-1}x(t),\nabla v(x(t))+f(t,x(t))\big\rangle>0.$$

Из приведенных оценок следует, что $x(t)\in D(\rho,\varepsilon)$ при всех $t\in(t_0,t_+)$.

2. Если $x(t_0)$ — граничная точка области $\Omega(\rho,\varepsilon)$, то $|x(t_0)|\ge\rho$, $v(x(t_0))\ge\varepsilon|x(t_0)|^{m+1}$ и при $t=t_0$ выводим

$$\frac{1}{2}\left(|x(t)|^2\right)'=(m+1)v(x(t))+\langle f(t,x(t)),x(t)\rangle\ge|x(t)|\left((m+1)\varepsilon-\sigma)|x(t)|^m-c)\right)>0,$$

$$\big(v(x(t))-\varepsilon|x(t)|^{m+1}\big)'=\big\langle\nabla v(x(t))-\varepsilon(m+1)|x(t)|^{m-1}x(t),\nabla v(x(t))+f(t,x(t))\big\rangle>0.$$

Отсюда следует, что $x(t)\in\Omega(\rho,\varepsilon)$ при всех $t\in(t_0,t_+)$ и $|x(t)|\to\infty$ при $t\to t_+$. В области $\Omega(\rho,\varepsilon)$ имеет место неравенство $v(x(t))>\varepsilon|x(t)|^{m+1}$, следовательно, $v(x(t))\to+\infty$ при $t\to t_+$.

Проверим справедливость следующих лемм.

Лемма 4. *Существует $\varepsilon_1>0$ такое, что автономная система $z'=\nabla v(z)$ не может иметь ненулевое и ограниченное при $t>0$ решение, удовлетворяющее условию $|v(z(t))|\le\varepsilon|z(t)|^{m+1}$ при некотором $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$.*

Лемма 5. *Пусть $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$, где ε_1 из леммы 4, и пусть для последовательности $f_k\in\mathcal{R}_m(\sigma,c)$, $k=1,2,\dots$, выполнены два условия:*

1) *имеет место предел*

$$\sup_{k=1,2,\dots}\sup_{t\in\mathbb{R}}|y|^{-m}|f_k(t,y)|\to0,\quad |y|\to\infty;$$

2) *при каждом $k=1,2,\dots$, существует ограниченное на промежутке $[0,+\infty)$ решение $x_k(t)$ системы уравнений*

$$x_k'(t)=\nabla v(x_k(t))+f_k(t,x_k(t)),\quad t>0,$$

с начальным значением $x_k(0)\in D(\rho,\varepsilon)$.

Тогда решения $x_k(t)$, $k=1,2,\dots$, равномерно ограничены

$$\sup_{k=1,2,\dots}\sup_{t\ge0}|x_k(t)|<\infty.$$

Доказательство леммы 4. Если указанное $\varepsilon_1>0$ не существует, то найдется последовательность ненулевых решений $z_k(t)$, $k=1,2,\dots$, автономной системы $z'=\nabla v(z)$, ограниченных на промежутке $[0,+\infty)$ и удовлетворяющих условиям $|v(z_k(t))|\le k^{-1}|z_k(t)|^{m+1}$. Без ограничения общности можно считать, что $|z_k(t)|\le1$ при $t>0$ и $|z_k(0)|=1$, $k=1,2,\dots$. Переходя к пределу, получим ограниченное решение $z_0(t)$ этой же автономной системы, для которого имеем $|z_0(t)|\le1$, $|v(z_0(t))|=0$ при $t>0$ и $|z_0(0)|=1$. Это противоречит тому, что $(v(z_0(t)))'=|\nabla v(z_0(t)|^2>0$.

Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Предположим, что лемма не верна. Тогда можно считать, что имеет место предел

$$r_k=\sup_{t\ge0}|x_k(t)|\to\infty,\quad k\to\infty.$$

Так как $x_k(0) \in D(\rho, \varepsilon)$ и $x_k(t)$ ограничено на промежутке $[0, +\infty)$, то в силу утверждений 1 и 4 (см. с. 168) имеем $|v(x_k(t)| < \varepsilon |x_k(t)|^{m+1}$, если $|x_k(t)| \geq \rho$. Рассмотрим функции $z_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{1-m} t)$, $t \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, где $|x_k(t_k)| > r_k - 1/k$. Для этих функций, учитывая условия леммы, выводим

$$z_k'(t) = \nabla v(z_k(t)) + o(1), \quad |z_k(t)| \leq 1, \quad t > 0, \quad |z_k(0)| > 1 - (kr_k)^{-1},$$

$$|v(z_k(t)| < \varepsilon |z_k(t)|^{m+1}, \quad \text{если} \quad |z_k(t)| \geq \rho r_k^{-1}.$$

Переходя к пределу, получим

$$z_0'(t) = \nabla v(z_0(t)), \quad |z_0(t)| \leq |z_0(0)| = 1, \quad t > 0,$$

$$|v(z_0(t)| \leq \varepsilon |z_0(t)|^{m+1}, \quad \text{если} \quad |z_0(t)| > 0.$$

Последнее неравенство согласно лемме 4 возможно лишь при $z_0(t) \equiv 0$, пришли к противоречию.

Лемма 5 доказана.

В последующем, учитывая замечания 1 и 2, можно считать, что $v \in \mathbb{V}_m \cap C^\infty\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R}\right)$ и $f \in \mathcal{R}_m \cap C^{0,\infty}\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3\right)$. Тогда при любом $y \in \mathbb{R}^3$ существует единственное решение $X(t, y)$ системы уравнений (1.1), удовлетворяющее начальному условию $X(0, y) = 0$ и непрерывное по совокупности переменных. Воспользуясь этим, докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Если $f \in \mathcal{R}_m(\sigma, c)$, то существует решение $x(t)$ системы уравнений* (1.1) *с начальным значением $x(0)$ из шара $|y| < \rho$ и ограниченное на промежутке* $[0, +\infty)$.

Доказательство. Предположим, что при заданном $f \in \mathcal{R}_m(\sigma, c)$ решение $X(t, y)$, $t \in (0, t_+(y))$ системы уравнений (1.1) не ограничено для любой точки y из шара $|y| < \rho$. Тогда для любой точки y, где $|y| < \rho$ согласно утверждению 3 (см. с. 168) существует $t_1(y) \in (0, t_+(y))$ такое, что $X(t, y) \notin \Omega(\rho, \varepsilon)$ при $t \in (0, t_1(y))$ и $X(t, y) \in \Omega(\rho, \varepsilon)$ при $t \in (t_1(y), t_+)$. В силу непрерывности $X(t, y)$ малая окрестность точки y переходит в малую окрестность точки $X(t_1(y), y)$. Следовательно, непрерывное отображение $y \mapsto X(t_1(y), y)$ шар $|y| < \rho$ отображает в связное подмножество множества $\overline{\Omega}(\rho, \varepsilon)$. Но, с другой стороны, множество $\overline{\Omega}(\rho, \varepsilon)$ по построению не связно и имеются две точки y_1, y_2 из шара $|y| < \rho$, которым соответствуют точки $X(t_1(y_1), y)$, $X(t_1(y_2), y)$ из разных связных компонент множества $\overline{\Omega}(\rho, \varepsilon)$. Другими словами, посредством неограниченных при $t > 0$ решений $X(t, y)$ связное множество $|y| < \rho$ непрерывно стягивается в несвязное множество. Пришли к противоречию.

Лемма 6 доказана.

Пусть $f \in \mathcal{R}_m$ и v, f гладкие. Соответствующим образом выбирая ε, c, σ, построим множество $\mathcal{R}_m(\sigma, c)$ так, чтобы все сдвиги $f(t-k, y)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, отображения $f(t, y)$ принадлежали $\mathcal{R}_m(\sigma, c)$. Тогда согласно лемме 6 при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$ существует ограниченное на промежутке $[0, +\infty)$ решение $x_k(t)$ системы уравнений $x' = \nabla v(x) + f(t-k, x)$ с начальным значением $|x_k(0)| < \rho$. По лемме 5 последовательность функций $x_k(t)$, $t \in [0, +\infty)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, равномерно ограничена. Отсюда следует, что функции $z_k(t) = x_k(t+k)$, $t \in [-k, +\infty)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, являются равномерно ограниченными решениями системы уравнений (1.1). Переходя к пределу, получим ограниченное на $\mathbb{R}$ решение системы уравнений (1.1).

Теорема 3 доказана.

Заключение

В статье исследованы условия существования периодических и ограниченных решений для системы уравнений (1.1), где выделена главная нелинейная часть ∇v, являющаяся градиентом функции v из $\mathbb{V}_m$, а возмущение f — из $\mathcal{R}_m$ или $\mathcal{R}_{m,\omega}$. Сформулированы и доказаны три теоремы, новизна которых состоит в следующем:

1) ранее известное достаточное условие $\gamma(\nabla v) \neq 0$ является также необходимым для существования ω-периодических решений при любом $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$;

2) свойство существования при любом $f \in \mathcal{R}_m$ ограниченных решений сохраняется, если функцию v непрерывно изменить (гомотопировать) на множестве $\mathbb{V}_m$;

3) ограниченное решение при любом $f \in \mathcal{R}_m$ существует тогда и только тогда, когда множество нулей функции v на единичной сфере пусто или не связно.

Полученные результаты в дальнейшем можно обобщить для многомерных систем дифференциальных уравнений вида (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ОГИЗ, 1947. 448 с.
2. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959. 211 с.
4. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 331 с.
5. **Красносельский М.А., Забрейко П.П.** Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.
6. **Мухамадиев Э.** О построении правильной направляющей функции для системы дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 4. С. 777–779.
7. **Мухамадиев Э.** Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. АН. 1996. Т. 351, № 5. С. 596–598.
8. **Мухамадиев Э.** Число Морса направляющих функций и рекуррентные движения динамических систем // Известия РАЕН. Сер. Серия Математика. Мат. моделирование. Информатика и управление. 2000. Т. 4, № 4. С. 37–66.
9. **Перов А. И., Каверина В. К.** Применение идей метода направляющих функций при исследовании неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естест. и техн. науки. 2018. Т. 23, № 123. С. 510-516. doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516 .
10. **Перов А. И., Каверина В. К.** Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 2. С. 269-272. doi: 10.1134/S0374064119020146 .
11. **Obukhovskii V., Kornev S., van Loi N., Zecca P.** Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. 2013. 173 p. (Lecture Notes in Math.; vol. 2076). doi: 10.1007/978-3-642-37070-0.
12. **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 630 с.

Поступила 15.01.2021
После доработки 8.02.2021
Принята к публикации 15.02.2021

Мухамадиев Эргашбой
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры математики и информатики
Вологодского государственного университета
г. Вологда
e-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Наимов Алижон Набиджанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры математики и информатики
Вологодского государственного университета
г. Вологда
e-mail: naimovan@vogu35.ru

REFERENCES

1. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Qualitative theory of differential equations.* Princeton: Princeton University Press, 1961, 523 p. ISBN: 0486659542 . Original Russian text published in Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii.* Moscow: OGIZ Publ., 1947, 448 p.
2. Hartman P. *Ordinary differential equations.* New York: Wiley, 1964, 612 p. Translated to Russian under the title *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Mir Publ., 1970, 720 p.
3. Krasovsky N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of stability of motion]. Moscow: Fizmatlit Publ., 1959, 211 p.
4. Krasnosel'skii M.A. *The operator of translation along the trajectories of differential equations*, Providence: American Mathematical Society, 1968, 294 p. ISBN: 0821813692 . Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravnenii.* Moscow: Nauka Publ., 1966, 331 p.
5. Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P. *Geometrical methods of nonlinear analysis.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1984, 434 p. ISBN: 978-3-642-69411-0 . Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. *Geometricheskie metody nelineinogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1975, 512 p.
6. Muhamadiev E. Construction of a correct guiding function for a system of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1970, vol. 190, no. 4, pp. 777–779 (in Russian).
7. Muhamadiev E. Bounded solutions and homotopic invariants of systems of nonlinear differential equations. *Dokl. Akad. Nauk*, 1996, vol. 351, no. 5, pp. 596–598 (in Russian).
8. Mukhamadiev E. Morse number of guiding functions and recurrent motions of dynamical systems. *Izvestiya RAEN, ser. MMMIU*, 2000, vol. 4, no. 4, pp. 37–66 (in Russian).
9. Perov A.I., Kaverina V.K. Research of the nonautonomous system of ODE by the ideas of the method of guiding functions. *Tambov University Reports. Ser. Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 510–516 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516 .
10. Perov A.I., Kaverina V.K. On a problem posed by Vladimir Ivanovich Zubov. *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 274–278. doi: 10.1134/S0012266119020125 .
11. Obukhovskii V., Kornev S., van Loi N., Zecca P. *Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis.* Lecture Notes in Math., vol. 2076. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag GmbH, 2013, 173 p. doi: 10.1007/978-3-642-37070-0 .
12. Goluzin G.M. *Geometric theory of functions of a complex variable.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 26. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1969, 676 p. ISBN: 978-0-8218-1576-2 . Original Russian text published in Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo: uchebnoe posobie.* Moscow; Leningrad: Nauka GITTL Publ., 1952, 628 p.

Received January 15, 2021
Revised February 8, 2021
Accepted February 15, 2021

Ergashboy Mukhamadiev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Vologda State University, Vologda, 160000 Russia, e-mail: emuhamadiev@rambler.ru .

Alizhon Nabidjanovich Naimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Vologda State University, Vologda, 160000 Russia, e-mail: naimovan@vogu35.ru .

Cite this article as: E. Mukhamadiev, A. N. Naimov. Criteria for the existence of periodic and bounded solutions of three-dimensional systems of differential equations, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 157–172 .