ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 514.174.3

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ НАИЛУЧШИХ ПОКРЫТИЙ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ НАБОРАМИ РАЗЛИЧНЫХ ШАРОВ[1]

П. Д. Лебедев, А. Л. Казаков

В теории управления и в различных прикладных областях математики важно выполнять аппроксимацию множеств сложной геометрии наборами унифицированных простых тел. Один из самых распространенных методов — покрытие шарами. В классическом варианте все шары равны, однако интерес представляет и более общая постановка, когда они могут быть различны. В настоящей статье изучается задача о построении покрытия компактного множества M в трехмерном евклидовом пространстве набором из заданного числа шаров, радиусы которых равны произведению общего для всех параметра r на индивидуальный положительный коэффициент. Критерием оптимальности считается минимизация r. Предложены эвристические алгоритмы построения искомых покрытий, основу которых составляют процедуры разбиения M на зоны влияния точек и вычисление их чебышевских центров. Доказаны утверждения о свойствах указанных алгоритмов, выполнена их программная реализация. Проведено численное решение задач о покрытии куба различными наборами шаров двух типов. Намечены возможные направления для проведения дальнейших исследований.

Ключевые слова: оптимизация, покрытие шарами, эвристический алгоритм, чебышевский центр, вычислительный эксперимент.

P. D. Lebedev, A. L. Kazakov. Iterative algorithms for constructing the thinnest coverings of convex polyhedra by sets of different balls.

In control theory and various areas of applied mathematics, it is important to approximate sets of complex geometry by unions of simple unified bodies. One of the most common methods here is covering sets with balls. In the classical statement, all the balls are equal; nevertheless, a more general statement is also of interest when the balls can be different. In this paper, we study the problem of constructing a covering of a compact set M in three-dimensional Euclidean space by a set of a given number of balls whose radii are equal to the product of a common parameter r and an individual positive coefficient. The optimality criterion is the minimum of r. We propose heuristic algorithms for constructing such coverings based on splitting the set M into zones of influence of points and finding their Chebyshev centers. Statements about the properties of these algorithms are proved, and the algorithms are implemented. The problems of covering a cube with different sets of balls of two types are solved numerically. Possible directions of further research are outlined and discussed.

Keywords: optimization, ball covering, heuristic algorithm, Chebyshev center, computational experiment.

MSC: 52C17, 05B40

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-116-129

Введение

Задачи построения оптимальных покрытий и упаковок принадлежат к числу классических проблем математики, которые сохраняют свою актуальность на протяжении многих лет. Наиболее часто в качестве элемента покрытия (упаковки) используются шары (в двумерном случае — круги). Отметим, что проблемой оптимальной упаковки шаров занимался еще Иоганн Кеплер [1]. При этом крайне редко удается найти решение аналитическими методами и задачи решаются численно, т. е. рассматриваются как проблемы вычислительной геометрии [2]. Чаще всего подобные задачи изучаются в двумерной постановке, поскольку в этом случае их связь с приложениями более очевидна [3], хотя соответствующие прикладные задачи суще-

[1]Исследование П. Д. Лебедева поддержано грантом РНФ (проект №19-11-00105).

ствуют и для пространственного случая. Достаточно сказать, что И. Кеплер первоначально сформулировал свою знаменитую гипотезу о плотнейшей упаковке шаров [1], изучая проблему оптимального размещения пушечных ядер. В последние годы трехмерные задачи упаковки и покрытия рассматриваются в связи с проблемами лазерной коагуляции при лечении диабетической ретинопатии [4], создания оптимальных систем мониторинга с использованием беспроводных сенсоров [5; 6] и др.

Важной задачей в теории динамических систем является отыскание оптимального положения начальных позиций системы, которые обеспечивает вложение заданного компакта в множество достижимости системы при минимальном времени ее развития [7; 8]. Один из ключевых элементов решения данной задачи — построение оптимального покрытия множества набором шаров различного радиуса.

Остановимся на задаче построения оптимального покрытия ограниченного множества шарами (кругами) более подробно. В простейшей постановке она состоит в том, что требуется покрыть рассматриваемую область определенным числом кругов равного радиуса [9], и даже в таком виде она является NP-трудной. В случае, когда радиусы кругов могут быть различными, данная задача была впервые рассмотрена в работе [10], где была высказана гипотеза о нижней границе плотности покрытия. Последняя было доказана только через 27 лет [11], и это послужило толчком к более активному изучению данной проблемы. Так, в работе [12] было получено достаточное условие для того, чтобы покрытие было "твердым". В [13] были найдены простые конструктивные оценки верхней и нижней границ плотности покрытия. Как уже отмечалось, аналитические методы в данном случае имеют ограниченный диапазон применимости, поэтому основным инструментом исследования является численный эксперимент. Из значительного количества такого рода публикаций выделим работу [14], в которой предложен удачный алгоритм ветвей-границ, позволяющий проверить, покрывается ли многоугольник заданным набором кругов. В [15] изучались регулярные покрытия плоскости кругами. Плоскость разбивается на конгруэнтные правильные многоугольники, и все они покрываются одинаково. Критерием оптимальности здесь служит достижение минимальной плотности покрытия.

В пространственном (трехмерном) случае задача покрытия ограниченного множества шарами, как это ни удивительно, относительно мало изучена. Можно отметить работы [16; 17], но они посвящены покрытиями шарами равного радиуса.

Представляемое исследование является продолжением большого цикла наших работ, посвященных оптимальным упаковкам и покрытиям. Помимо задач упаковки в различных постановках (см., например, [18]) ранее мы рассматривали задачи о нахождении оптимальных покрытий плоских фигур, методика исследования которых базируется на построении n-сетей [19; 20], а также задачу о покрытии плоского множества разными кругами, для которой n-сети, вообще говоря, неприменимы [21]. Наконец, был предложен алгоритм приближенного построения оптимальных покрытий ограниченных множеств равными шарами в трехмерном случае (Ушаков В.Н., Лебедев П.Д. Алгоритмы построения оптимального покрытия множеств в трехмерном евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 276–288).

В настоящей статье рассматривается задача о покрытии ограниченного выпуклого множества шарами различного радиуса. При этом предполагается, что радиусы кругов пропорциональны переменной r, достижение ее минимума является критерием оптимальности покрытия. Для решения данной задачи предложен оригинальный вычислительный алгоритм, доказаны утверждения о его свойствах. Метод является эвристическим и утверждать, что он позволяет найти оптимальное решение, мы не можем, однако это стандартная ситуация для такого рода постановок. Выполнен вычислительный эксперимент для случаев двух различных типов шаров, когда покрываемое множество имеет вид многогранника (куба). Результаты расчетов показали работоспособность предложенного подхода, а также позволили сделать содержательные выводы о свойствах рассмотренных покрытий.

1. Постановка задачи

Пусть заданы компактное множество $M \subset \mathbb{R}^3$, натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и набор n положительных чисел $A_n = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$. Обозначим $U(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \colon \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leqslant r\}$ — шар в трехмерном пространстве. Будем говорить, что набор Ξ_n, содержащий n шаров $U(\mathbf{s}_i, \alpha_i r), i = \overline{1, n}$, является покрытием компакта M, если выполняется

$$M \subseteq \bigcup_{i=\overline{1,n}} U(\mathbf{s}_i, \alpha_i r).$$

З а д а ч а 1. Требуется найти набор Ξ_n шаров $U(\mathbf{s}_i, \alpha_i r), i = \overline{1, n}$, который является покрытием множества M при наименьшем возможном $r > 0$.

Заметим, что задача 1 может быть сформулирована как задача об отыскании массива S_n точек, для которого минимально значение величины

$$r = R_M(S_n, A_n) \triangleq \max_{\mathbf{m} \in M} \min_{i=\overline{1,n}} \frac{\|\mathbf{m} - \mathbf{s}_i\|}{\alpha_i}. \tag{1.1}$$

Найти для задачи 1 точное решение, вообще говоря, не представляется возможным. Поэтому далее предложены эвристические алгоритмы, которые позволяют построить приближенное решение.

2. Алгоритмы решения задачи 1

Рассмотрим последовательно базовый случай $n = 1$, т. е. когда покрытие состоит из одного элемента, и общий случай $n \geqslant 2$. Напомним, что здесь и далее все рассмотрение проводится в пространстве $\mathbb{R}^3$.

2.1. Случай $n = 1$

В наиболее простом случае количество шаров равно 1, а массив A_n состоит из одного числа α_1. В этом случае задача 1 сводится к отысканию минимума функции

$$F_M(\mathbf{x}) \triangleq \max_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{m} - \mathbf{x}\|. \tag{2.1}$$

Множество M вложено в шар $U\left(\mathbf{x}, \alpha_1^{-1} F_M(\mathbf{x})\right)$. Свойства функции (2.1) описаны, например, в работе [19]. В частности, $F_M(\mathbf{x})$ выпукла на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. При $F_M(\mathbf{x}) > 0$ определен субдифференциал

$$\partial F_M(\mathbf{x}) = \operatorname{co}\Big(\frac{\Psi_M(\mathbf{x}) - \{\mathbf{x}\}}{F_M(\mathbf{x})}\Big), \tag{2.2}$$

где

$$\Psi_M(\mathbf{x}) \triangleq \{\mathbf{m} \in M \colon \|\mathbf{m} - \mathbf{x}\| = F_M(\mathbf{x})\}.$$

Для любого компактного M существует единственная точка $\mathbf{c}(M)$, называемая *чебышевским центром* [23], для которой

$$F_M\big(\mathbf{c}(M)\big) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} F_M(\mathbf{x}). \tag{2.3}$$

Поскольку функция $F_M(\mathbf{x})$ есть максимум из набора выпуклых функций, она тоже является выпуклой, а для субдифференциала в точке ее минимума справедливо

$$\mathbf{0} \in \partial F_M\big(\mathbf{c}(M)\big) \tag{2.4}$$

(подробнее см. [22, гл. II]). Величина (2.3) называется *чебышевским радиусом* $r(M)$ множества M.

При нахождении чебышевского радиуса множества важно иметь оценку того, насколько радиус покрывающего компакт M шара с центром в произвольной точке $\mathbf{x}$ отличается от $r(M)$. Как явствует из нижеследующей леммы, это можно сделать, не располагая какой-либо иной информацией о множестве M, помимо величины $F_M(\mathbf{x})$.

Лемма. *Пусть заданы точка* $\mathbf{x}$ *и компактное множество* M *в* $\mathbb{R}^3$. *Если* $F_M(\mathbf{x}) > 0$, *то выполняется*

$$r(M) \leqslant F_M(\mathbf{x}) - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}(M)\|^2}{2F_M(\mathbf{x})}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрения можно принять, что

$$\mathbf{c}(M) = \mathbf{0}. \tag{2.6}$$

Из условия (2.4) и выражения (2.2) имеем, что справедливо неравенство $\mathbf{0} \in \Psi_M(\mathbf{0})$, а значит, найдется такая точка $\mathbf{m}^* \in \Psi_M(\mathbf{0})$, что $\langle \mathbf{m}^*, \mathbf{x} \rangle \leqslant 0$. Из этого следует, что в треугольнике $\triangle \mathbf{x0m}^*$ угол при вершине $\mathbf{0}$ не меньше прямого, причем возможен вырожденный случай, когда точка $\mathbf{0}$ лежит на отрезке $[\mathbf{x}, \mathbf{m}^*]$, а значит, имеем оценку

$$\|\mathbf{m}^* - \mathbf{x}\|^2 \geqslant \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{m}^*\|^2. \tag{2.7}$$

По построению $\|\mathbf{m}^* - \mathbf{x}\| \leqslant F_M(\mathbf{x})$ и $\|\mathbf{m}^*\| = r(M)$, откуда с учетом (2.7) получаем, что

$$F_M(\mathbf{x})^2 \geqslant \|\mathbf{x}\|^2 + r(M)^2. \tag{2.8}$$

Неравенство (2.8) после переноса $r^2(M)$ в правую часть и деления обеих частей на $F_M(\mathbf{x}) + r(M)$ преобразуется к виду

$$F_M(\mathbf{x}) - r(M) \geqslant \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{F_M(\mathbf{x}) + r(M)} \geqslant \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2F_M(\mathbf{x})}. \tag{2.9}$$

Последнее неравенство в (2.9) является очевидным следствием определения чебышевского центра (см. (2.3)). Переставив слагаемые, окончательно имеем

$$r(M) \leqslant F_M(\mathbf{x}) - \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2F_M(\mathbf{x})}. \tag{2.10}$$

С учетом (2.6) оценка (2.10) эквивалентна (2.5). □

Чебышевский центр относительно легко найти для набора конечного числа точек или выпуклого многогранника. В случае множества с криволинейной границей его отыскание возможно лишь приближенно с помощью численных методов. В общем случае нахождение $\mathbf{c}(M)$ может представляет из собой довольно трудную задачу (подробнее см. [24; 25]). Авторы для ее решения предлагают алгоритм, использующий следующее свойство:

$$\mathbf{c}(M) = \mathbf{c}(\operatorname{co} M),\ \ r(M) = r(\operatorname{co} M),$$

где $\operatorname{co} M$ — выпуклая оболочка множества M.

Алгоритм 1. **Приближенное нахождение чебышевского центра множества** M.

1. Задаются параметр точности $d_0 > 0$ и точка $\mathbf{m}^{(0)} \in \operatorname{co} M$.
2. Устанавливается значение $\mathbf{c}^* := \mathbf{m}^{(0)}$.
3. Строится множество $M^{(0)} = \left\{\mathbf{m}^{(0)}\right\}$.
4. Значение переменной счетчика устанавливается $k := 0$.

5. Вычисляется значение $r^* := r\big(M^{(k)}\big)$.

6. В множестве M находится произвольная точка $\mathbf{m}^* \in \Psi_M(\mathbf{c}^*)$.

7. Вычисляется величина $h^* := \|\mathbf{m}^* - \mathbf{c}^*\|$.

8. Проводится увеличение переменной счетчика $k := k + 1$.

9. Строится множество $M^{(k)} := M^{(k-1)} \cup \{\mathbf{m}^*\}$.

10. Если
$$\sqrt{2h^*(h^* - r^*)} \geq d_0, \tag{2.11}$$
то выполняется переход к п. 5.

11. В качестве приближенного положения чебышевского центра множества M берется точка $\widetilde{\mathbf{c}} := \mathbf{c}^*$.

Покажем, что описанная процедура позволяет вычислить координаты чебышевского центра $\mathbf{c}(M)$ с любой наперед заданной точностью, причем за конечное число операций.

Предложение 1. *Алгоритм* 1 *за конечное число шагов дает значение* $\widetilde{\mathbf{c}}$ *такое, что*
$$\|\widetilde{\mathbf{c}} - \mathbf{c}(M)\| \leqslant d_0. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем вначале, что, если оценка (2.11) не выполняется, т. е. алгоритм 1 корректно завершает работу, то для $\widetilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^*$ неравенство (2.12) выполняется. В самом деле, этом случае $2h^*(h^* - r^*) \leqslant d_0^2$ и по построению $h^* = F_M(\mathbf{c}^*)$, а также
$$M^{(k-1)} \subset \operatorname{co} M. \tag{2.13}$$
Следовательно, $r^* = r(M^{(k-1)}) \leqslant r(M)$. Отсюда $2F_M(\mathbf{c}^*)\big(F_M(\mathbf{c}^*) - r(M)\big) \leqslant d_0^2$, из чего, в свою очередь, после элементарных алгебраических преобразований получаем неравенство
$$r(M) \geqslant F_M(\mathbf{c}^*) - \frac{d_0^2}{2F_M(\mathbf{c}^*)}. \tag{2.14}$$
Ввиду оценок (2.14) и (2.5) выполняется соотношение (2.12) при $\widetilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^*$.

Предположим теперь, что при некоторых начальных условиях неравенство (2.11) никогда не выполняется, т. е. при любом количестве шагов $k \in \mathbb{N}$ алгоритма 1
$$\|\mathbf{c}^* - \mathbf{c}(M)\| > d_0, \tag{2.15}$$
где на каждом шаге $\mathbf{c}^* = \mathbf{c}(M^{(k-1)})$ по построению. В силу (2.13) имеем
$$F_{M^{(k-1)}}\big(\,\mathbf{c}(M)\big) \leqslant F_M\big(\,\mathbf{c}(M)\big) = r(M). \tag{2.16}$$
Из (2.16) и леммы (см. (2.5)) следует справедливость оценки
$$r(M^{(k-1)}) \leqslant F_{M^{(k-1)}}\big(\,\mathbf{c}(M)\big) - \frac{\|\mathbf{c}^* - \mathbf{c}(M)\|^2}{2F_{M^{(k-1)}}(\mathbf{c}^*)} \leqslant r(M) - \frac{\|\mathbf{c}^* - \mathbf{c}(M)\|^2}{2r(M)}. \tag{2.17}$$
Из (2.15) и (2.17) выводим, что $r(M^{(k)}) \leqslant r(M) - d_0^2/[2r(M)]$ при любом $k \in \mathbb{N}$, а значит, найдется число $\widehat{r} > 0$ такое, что
$$r(M) > r\left(M^{(k)}\right) + \widehat{r}. \tag{2.18}$$
С другой стороны, множество $M^{(k+1)}$ по построению содержит точку $\mathbf{m}^*$, для которой
$$\left\|\mathbf{m}^* - \mathbf{c}\left(M^{(k)}\right)\right\| \geqslant r(M). \tag{2.19}$$

Из неравенств (2.18), (2.19) и того факта, что $\mathbf{m}^* \in M^{(k+1)}$, т.е. расстояние от $\mathbf{m}^*$ до $\mathbf{c}(M^{(k+1)})$ не превышает $r(M^{(k+1)})$, следует

$$\left\| \mathbf{c}\left(M^{(k+1)}\right) - \mathbf{m}^* \right\| \leqslant r(M) - \widehat{r}. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и (2.20) выводим оценку расстояния между чебышевскими центрами множеств $M^{(k)}$ и $M^{(k+1)}$

$$\left\| \mathbf{c}\left(M^{(k+1)}\right) - \mathbf{c}\left(M^{(k)}\right) \right\| \geqslant \widehat{r}. \tag{2.21}$$

С другой стороны, согласно (2.5) справедливо неравенство

$$F_{M^{(k)}}\bigl(\mathbf{c}\left(M^{(k+1)}\right)\bigr) \geqslant r\bigl(M^{(k)}\bigr) + \frac{\|\mathbf{c}\left(M^{(k+1)}\right) - \mathbf{c}\left(M^{(k)}\right)\|^2}{2F_{M^{(k)}}\bigl(\mathbf{c}\left(M^{(k+1)}\right)\bigr)}. \tag{2.22}$$

Поскольку $M^{(k)} \subset M^{(k+1)} \subset M$, то $r\bigl(M^{(k+1)}\bigr) \geqslant r\bigl(M^{(k)}\bigr)$ и $F_{M^{(k)}}\left(\mathbf{c}\left(M^{(k+1)}\right)\right) \leqslant r(M)$, а значит, с учетом (2.21), (2.22) имеем

$$r\bigl(M^{(k+1)}\bigr) \geqslant r\bigl(M^{(k)}\bigr) + \frac{\widehat{r}^2}{4r(M)}. \tag{2.23}$$

Из (2.23) следует, что существует число r^0, $0 < r_0 \leqslant \widehat{r}^2/[4r(M)]$ такое, что для всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$r\bigl(M^{(k+1)}\bigr) > r\bigl(M^{(k)}\bigr) + r^0. \tag{2.24}$$

Неравенство (2.24) означает, что найдется такое n, что $r(M^{(n)}) > r(M)$. Однако подобное невозможно в силу (2.18). Полученное противоречие доказывает, что алгоритм 1 за конечное число шагов выдает результат $\widetilde{\mathbf{c}}$, для которого выполняется условие (2.12). □

Доказанное предложение 1 обеспечивает сходимость алгоритма 1, однако в целях получения приемлемого результата требуется, чтобы параметр точности d_0 удовлетворял условию $d_0 \ll r(M)$.

2.2. Случай $n > 1$

Рассмотрим теперь общий случай. Считаем далее, если это не оговорено особо, что заданы компактное множество M, число элементов покрытия $n \geqslant 2$ и массив A_n.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть заданы набор точек S_n и вектор A_n. Будем называть областью доминирования точки $\mathbf{s}_i \in S_n$ над $\mathbf{s}_j \in S_n$ множество

$$D^{(i,j)}(S_n, A_n) \triangleq \bigl\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \alpha_i^{-1}\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leqslant \alpha_j^{-1}\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\|\bigr\}.$$

Свойства областей доминирования описаны, например, в опубликованной нами годом ранее статье (Лебедев П. Д., Казаков А. Л., Лемперт А. А. Численные методы построения упаковок из различных шаров в выпуклые компакты // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, №2. С. 173–187). Их границы могут быть либо сферами, либо плоскостями.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть заданы набор точек S_n, вектор A_n и компактное множество M. Будем называть обобщенной зоной Дирихле точки $\mathbf{s}_i \in S_n$ в M следующее множество:

$$D_M^{(i)}(S_n, A_n) \triangleq \bigl\{\mathbf{m} \in M \colon \alpha_i^{-1}\|\mathbf{m} - \mathbf{s}_i\| = \min_{j=\overline{1,n}} \alpha_j^{-1}\|\mathbf{m} - \mathbf{s}_i\|\bigr\}, i = \overline{1,n}. \tag{2.25}$$

Из определения 2 (см. также (1.1)) следует, что

$$R_M(S_n, A_n) = \max_{i=\overline{1,n}} \alpha_i^{-1} F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\mathbf{s}_i). \tag{2.26}$$

Обобщенные зоны Дирихле могут строиться на базе областей доминирования по формуле $D^{(i)}(S_n, A_n, M) = M \cap \bigcap_{j=\overline{1,n}} D^{(i,j)}(S_n, A_n), i = \overline{1,n}$, где $D^{(i,i)}(S_n, A_n) = \mathbb{R}^3, i = \overline{1,n}$.

Пусть задано множество точек S_n (которые, заметим, не обязаны принадлежать множеству M), определяющее начальные положения центров шаров упаковки (получить их можно различными способами, например путем случайной генерации). Построим процедуру итерационного улучшения. Для это воспользуемся следующей формулой, использующей определения чебышевского центра (2.3) и обобщенной зоны Дирихле (2.25):

$$\widehat{\mathbf{s}}_i = \begin{cases} \mathbf{c}\left(D_M^{(i)}(S_n, A_n)\right), D_M^{(i)}(S_n, A_n) \neq \varnothing, \\ \mathbf{s}_i, D_M^{(i)}(S_n, A_n) = \varnothing, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.27}$$

Полученное множество точек $\widehat{S}_n \triangleq \{\widehat{\mathbf{s}}_i\}_{i=1}^n$ используется в качестве нового набора центров шаров покрытия.

Для обоснования корректности предложенной процедуры докажем, что она улучшает свойства массива $\widehat{S}_n$ по сравнению с S_n. Для этого необходимо получить оценку величины $R_M(\widehat{S}_n, A_n)$, которая в явном виде показывает, что при переходе от $\widehat{S}_n$ к S_n величина (1.1), характеризующая качество покрытия, уменьшается (или, по крайней мере, не увеличивается).

Теорема 1. *Пусть заданы множество $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^3)$ и набор точек S_n такой, что $R_M(S_n, A_n) \neq 0$. Тогда для построенного по формуле* (2.27) *набора точек $\widehat{S}_n$ справедливо неравенство*

$$R_M(\widehat{S}_n, A_n) \leqslant R_M(S_n, A_n) - \min_{i=\overline{1,n}} \frac{\|\widehat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_i\|^2}{2\alpha_i^2 R_M(S_n, A_n)}. \tag{2.28}$$

Доказательство. Пусть хотя бы при каком-то $i = \overline{1,n}$ множество $D_M^{(i)}(S_n, A_n)$ пустое; тогда для такого i справедливо равенство $\|\widehat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_i\| = 0$ и вычитаемое в формуле (2.28) равно нулю. В то же время из (2.27) следует, что для любой непустой обобщенной зоны Дирихле имеет место неравенство $F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) \leqslant F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\mathbf{s}_i), i = \overline{1,n}$. Значит, выполняется и оценка $R_M(\widehat{S}_n, A_n) \leqslant R_M(S_n, A_n)$.

Пусть теперь $D_M^{(i)}(S_n, A_n) \neq \varnothing \ \forall i = \overline{1,n}$. Тогда согласно лемме (см. (2.5)) справедливо неравенство

$$F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) = r\big(D_M^{(i)}(S_n, A_n)\big) \leqslant F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\mathbf{s}_i) - \frac{\|\widehat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_i\|^2}{2F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\mathbf{s}_i)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Из (2.26) следует, что $F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\mathbf{s}_i) \leqslant \alpha_i R_M(S_n, A_n)$, откуда, в свою очередь, имеем

$$\forall \ i = \overline{1,n} \ F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) \leqslant \alpha_i R_M(S_n, A_n) - \frac{\|\widehat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_i\|^2}{2\alpha_i R_M(S_n, A_n)}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.29}$$

Из очевидного факта, что объединение всех n обобщенных зон Дирихле точек из набора $\widehat{S}_n$ в M совпадает с множеством M, следует

$$R_M(\widehat{S}_n, A_n) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \frac{F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\widehat{\mathbf{s}}_i)}{\alpha_i}. \tag{2.30}$$

Из оценок (2.29) и (2.30) получаем окончательно, что

$$R_M(\widehat{S}_n, A_n) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \Big\{ R_M(S_n, A_n) - \frac{\|\widehat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_i\|^2}{2\alpha_i^2 R_M(S_n, A_n)} \Big\}. \tag{2.31}$$

В неравенстве (2.31) максимум достигается при минимальном значении $(\|\widehat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_i\| \alpha_i^{-1})^2$, $i = \overline{1,n}$. Значит, неравенство (2.31) эквивалентно (2.28). □

Заметим, что при вычислении чебышевского центра каждой обобщенной области Дирихле применяется алгоритм 1, сходимость которого доказана в предложении вышес которых начинается построение множеств $M^{(k)}$, удобно брать $\mathbf{s}_i, i = \overline{1,n}$. В таком случае после нескольких циклов применения процедуры (2.27) точка $\mathbf{s}_i$, как правило, лежит достаточно близко к $\mathbf{c}\left(D_M^{(i)}(S_n, A_n)\right)$ при всех $i = \overline{1,n}$, что приносит экономию вычислительных ресурсов. В случае, если M — выпуклый многогранник, обобщенные зоны Дирихле имеют границу, состоящую из многоугольников и сферических сегментов. Их форма существенно облегчает отыскание точек из $\Psi_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\mathbf{c}^*)$ в алгоритме 1. Наиболее удаленная точка сферического сегмента от $\mathbf{c}^*$ — это либо лежащая на прямой, соединяющей центр сферы с $\mathbf{c}^*$, точка $\widetilde{\mathbf{m}}$; либо принадлежащая дуге окружности, ограничивающей сегмент, точка $\check{\mathbf{m}}$, такая, что прямая, проходящая через точки $\mathbf{c}^*$ и $\check{\mathbf{m}}$, ортогональна касательной к дуге в $\check{\mathbf{m}}$; либо $\widehat{\mathbf{m}}$ — точка пересечения трех или более сферических сегментов, ограничивающих данную область, или пересечения сферического сегмента со сферой и с плоскостью, или пересечения сферического сегмента с двумя плоскостями.

3. Вычислительный эксперимент

Нами модернизирован программный комплекс, предназначенный для построения покрытий тел шарами в трехмерном пространстве, который ранее был предназначен только для решения аналогичных задач на плоскости [21]. Его основу составило применение итерационной процедуры (2.27).

Как показали вычислительные эксперименты, при построении наилучшего покрытия набором шаров различного радиуса возникает ряд существенных трудностей. Прежде всего, отсутствуют универсальные методы генерации начального положения точек. В случае покрытий из конгруэнтных шаров успешно используется гранецентрированная кубическая решетка [9], однако в задаче 1 при наличии в покрытии различных элементов она оказалась неприменима. Более того, точки $S_n^{(0)}$, произвольным образом размещенные в $\operatorname{co} M$, могут дать массив, локально устойчивый относительно процедуры (2.27), но далекий от глобального оптимума.

Еще одна проблема заключается в том, что в общем случае пока невозможно оценить, насколько текущее значение $R_M(S_n, A_n)$ далеко от минимально возможного значения r для всех возможных положений точек. Единственным универсальным решением указанных проблем в настоящее время является выполнение большого числа построений покрытий с независимой генерацией начальных условий и сравнение результатов с выбором наилучшего из полученных (т. е. использование метода мультистарта).

Тем не менее иметь некоторое представление о том, насколько полученное покрытие с центрами элементов S_n близко к оптимальному, позволяет сравнение между собой следующих отношений:

$$R_M^{(i)}(S_n, A_n) \triangleq \frac{r\left(D_M^{(i)}(S_n, A_n)\right)}{\alpha_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

Если все множества (2.25) не пустые, то величины (3.1) можно назвать нормированными значениями чебышевского радиуса множеств $D_M^{(i)}(S_n, A_n),\ i = \overline{1,n}$. Также по построению

$$R_M^{(i)}(S_n, A_n) = \frac{F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\widehat{\mathbf{s}}_i)}{\alpha_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

При любом значении расстояния $d(\widehat{S}_n, S_n) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \|\widehat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_i\|$ между массивами S_n и $\widehat{S}_n$ выполняется оценка

$$R_M(S_n, A_n) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} R_M^{(i)}(S_n, A_n) + \frac{d(\widehat{S}_n, S_n)}{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \alpha_i}. \tag{3.3}$$

Поскольку условием окончания работы алгоритма является получение некоторого малого значения $d(\widehat{S}_n, S_n)$, то из оценки (3.3) и теоремы 1 выводим $R_M(S_n, A_n) \approx \max\limits_{i=\overline{1,n}} R_M^{(i)}(S_n, A_n)$. Существенное значение для оценки качества покрытия имеет величина

$$\Delta r = \frac{\max\limits_{i=\overline{1,n}} R_M^{(i)}(S_n, A_n) - \min\limits_{i=\overline{1,n}} R_M^{(i)}(S_n, A_n)}{\min\limits_{i=\overline{1,n}} R_M^{(i)}(S_n, A_n)}, \tag{3.4}$$

которая показывает относительное отклонение наибольшего нормированного чебышевского радиуса обобщенной области Дирихле от наименьшего: чем меньше величина Δr, тем построенное покрытие “лучше”, (точнее — более “равномерное”). Следует отметить, что показатель (3.4), разумеется, отнюдь не является эквивалентом критерия оптимальности (1.1), однако он прост и нагляден.

С учетом вышесказанного, при реализации алгоритмов была предусмотрена возможность стохастической коррекции текущего покрытия. Если для построенного массива S_n значение величины Δr достаточно велико, то строится набор $\widetilde{S}_n = \{\widetilde{\mathbf{s}}_i\}$ по формуле

$$\widetilde{\mathbf{s}}_i = \widehat{\mathbf{s}}_i + \alpha_i\big(R_M(S_n, A_n) - R_M^{(i)}(S_n, A_n)\big)\mathbf{z}_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.5}$$

Здесь $\mathbf{z}_i, i = \overline{1,n}$, — векторы со случайными координатами, на которые наложены ограничения $\forall i = \overline{1,n}\ \mathbf{z}_i \in U(\mathbf{0}, 1)$. Затем $\widetilde{S}_n$ используется в качестве начальных условий для повторного запуска итерационного алгоритма.

Заметим, что для массива $\widetilde{S}_n$ исходя из (3.2) выполняется оценка

$$R_M(\widetilde{S}_n, A_n) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \frac{F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\widetilde{\mathbf{s}}_i)}{\alpha_i} \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \frac{F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) + \alpha_i\big(R_M(S_n, A_n) - R_M^{(i)}(S_n, A_n)\big)}{\alpha_i}$$

$$\leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \frac{F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) + \alpha_i R_M(S_n, A_n) - F_{D_M^{(i)}(S_n,A_n)}(\widehat{\mathbf{s}}_i)}{\alpha_i} \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \frac{\alpha_i R_M(S_n, A_n)}{\alpha_i} = R_M(S_n, A_n).$$

Следовательно, покрытие с центрами в точках (3.5), по крайней мере, не хуже, чем то, на котором остановился алгоритм.

П р и м е р 1. Пусть требуется решить задачу 1 для множества

$$M = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \max\{|x|, |y|, |z|\} \leqslant 1\big\}. \tag{3.6}$$

Параметры покрытия: $n = 12$, $A_{12} = \{1.5, 1.5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

Полученный массив центров элементов покрытия

$$S_{12} = \{(0.4308, 0.4567, 0.4336), (-0.3465, -0.2313, -0.2564),$$

$$(-0.4065, -0.8182, -0.7891), (-0.2651, -0.6686, 0.7131),$$

$$(0.5234, 0.6597, -0.6255), (-0.5107, 0.5849, -0.9722),$$

$$(0.7676, -0.2019, -0.6097), (-0.6280, 0.4918, 0.7030),$$

$$(0.6367, -0.6105, 0.5535), (-0.9447, -0.5163, 0.5186),$$

$$(-0.5915, 0.9995, -0.1449), (0.6284, -0.8663, -0.4580)\}.$$

Параметр, задающий радиус шаров $R_M(S_{12}, A_{12}) = 0.6978$, отношение объема покрытия к объему тела $M : \sigma(\Xi_{12}) = 2.9804$. Набор шаров Ξ_{12} показан на рис. 1.

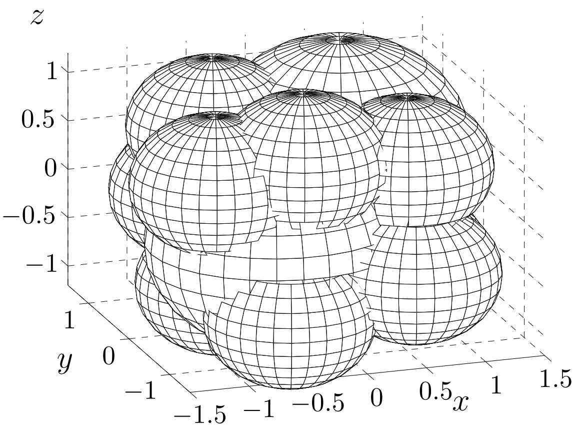

Рис. 1. Покрытие Ξ_{12} куба M 12 шарами в примере 1.

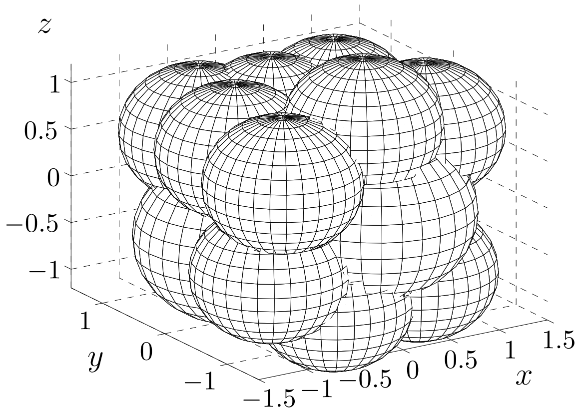

Рис. 2. Покрытие Ξ_{13} куба M 13 шарами в примере 2.

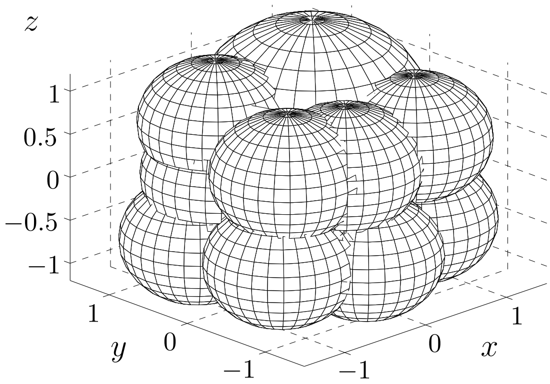

Рис. 3. Покрытие Ξ_{14} куба M 14 шарами в примере 3.

П р и м е р 2. Пусть требуется решить задачу 1 для множества (3.6). Параметры покрытия: $n = 13$, $A_{13} = \{1.25, 1.25, 1.25, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

Полученный массив центров элементов покрытия

$$S_{13} = \{(0.5501, 0.5758, -0.3933), (0.3209, -0.5837, -0.0818),$$

$$(-0.4734, 0.4770, -0.5285), (-0.7495, -0.5263, -0.5370),$$

$$(0.6177, 0.5479, 0.6194), (-0.0548, 0.5214, 0.5835),$$

$$(-0.7559, -0.7378, 0.4894), (0.1727, -0.5958, 0.8773),$$

$$(-0.0822, -0.5158, -0.9829), (-0.7024, 0.1036, 0.5579),$$

$$(-0.6022, 0.8296, 0.5011), (0.9069, -0.4497, 0.6301),$$

$$(0.8188, -0.4688, -0.8710)\}.$$

Параметр, задающий радиус шаров $R_M(S_{13}, A_{13}) = 0.7086$, отношение объема покрытия к объему тела $M : \sigma(\Xi_{13}) = 2.955$. Набор шаров Ξ_{13} показан на рис. 2.

П р и м е р 3. Пусть требуется решить задачу 1 для множества (3.6). Параметры покрытия: $n = 14$, $A_{14} = \{1.5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

Полученный массив центров элементов покрытия

$$S_{14} = \{(0.3319, 0.2965, 0.5856), (-0.2510, -0.7251, 0.4592),$$

$$(-0.7043, 0.4603, 0.7413), (0.9715, 0.5726, -0.3644),$$
$$(0.7590, -0.6360, -0.4810), (0.5853, -0.7524, 0.5557),$$
$$(-0.0842, -0.8239, -0.5863), (-0.1393, -0.1506, -0.6311),$$
$$(-0.1349, 0.8592, -0.4776), (-0.7170, 0.4059, 0.1548),$$
$$(0.6612, 0.3884, -0.9929), (-0.8550, -0.5345, -0.5273),$$
$$(-0.8017, -0.5605, 0.4893), (-0.8711, 0.5183, -0.5867)\}.$$

Параметр, задающий радиус шаров $R_M(S_{14}, A_{14}) = 0.7033$, отношение объема покрытия к объему тела $M : \sigma(\Xi_{14}) = 2.9831$. Набор шаров Ξ_{14} показан на рис. 3.

Важным показателем близости аппроксимации к оптимальной служит величина $\sigma(\Xi_n)$ — отношение суммы объема шаров к объему компакта M (чем оно меньше — тем лучше). Отметим, что отношение объема шара, описанного вокруг куба, к объему последнего равно $\pi\sqrt{3}/2 \approx 2.72$, так что получение значения $\sigma(\Xi_n) < 3$ является хорошим результатом. Этого удалось добиться во всех рассмотренных примерах: расчетные результаты весьма близки к указанному целевому показателю.

Заключение

В работе рассмотрена задача о покрытии ограниченного множества в пространстве наборами из заданного числа шаров, радиусы которых, вообще говоря, различны и пропорциональны с фиксированными коэффициентами некоторому параметру r. Последний является целевой функцией, подлежащей минимизации. Предложен итерационный алгоритм решения исследуемой задачи, обосновано утверждение о том, что он не увеличивает значение целевой функции.

Алгоритм реализован в виде компьютерной программы, с помощью которой проведено построение покрытий многогранников шарами двух различных радиусов. Для каждого примера был выполнен ряд запусков со случайной генерацией начальных условий и их стохастической коррекцией на основе вычисления нормированного радиуса обобщенных областей Дирихле. Выполнена визуализация расчетов. Плотность наилучших построенных покрытий во всех примерах близка к 3 (точнее, чуть ниже), что можно считать хорошим результатом для рассмотренной задачи.

Отметим, что ввиду высокой объективной сложности задачи (общеизвестно, что задача покрытия в трехмерном пространстве значительно сложнее задачи упаковки) удалось добиться эффективности разработанного программно-алгоритмического аппарата только в случаях, когда покрываемое множество является прямоугольным параллелепипедом, и для шаров двух типов. Актуальной проблемой в этом контексте является его совершенствование с целью построения покрытий множеств с более сложной конфигурацией (вплоть до невыпуклых и неодносвязных), а также увеличения количества типов элементов покрытия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кеплер И.** О шестиугольных снежинках / пер. с латинского Ю. А. Данилова. М.: Наука, 1982. 192 с.
2. **Preparata F.P., Shamos M.I.** Computational geometry: An Introduction. N Y: Springer-Verlag, 1985. 396 p.
3. **Banhelyi B., Palatinus E., Levai B.L.** Optimal circle covering problems and their applications // Central European J. Operations Research. 2015. Vol. 23, № 4. P. 815–832. doi: 10.1007/s10100-014-0362-7 .
4. **Широканев А.С., Кирш Д.В., Ильясова Н.Ю., Куприянов А.В.** Исследование алгоритмов расстановки коагулятов на изображение глазного дна // Компьютерная оптика. 2018. Т. 42, № 4. С. 712–721. doi: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-712-721 .

5. **Hayat H. et al.** The State-of-the-art of sensors and environmental monitoring technologies in buildings // Sensors. 2019. Vol. 19, no. 17. art.-no. 3648, 31 p. doi :10.3390/s19173648 .
6. **Бычков И.В., Максимкин Н.Н., Хозяинов И.С., Киселев Л.В.** О задаче патрулирования границы акватории, охраняемой группой подводных аппаратов // Технические проблемы освоения Мирового океана. 2013. Т. 5. С. 424–428.
7. **Ершов А.А., Ушаков А.В., Ушаков В.Н.** Задача о сближении управляемой системы с компактом в фазовом пространстве при наличии фазовых ограничений// Мат. сб., 2019. Т. 210, № 8. С. 29–66. doi 10.4213/sm9141 .
8. **Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Липин А.Е.** Об одном дополнении к определению стабильного моста и аппроксимирующей системы множеств в дифференциальных играх// Тр. МИАН. 2019. Т. 304. С. 285–297. doi 10.4213/tm3976 .
9. **Toth L.F.** Regular figures. N Y: A Pergamon Press Book The Macmillan Co., 1964. 339 p.
10. **Toth L.F.** Solid circle-packings and circle-coverings // Studia Sci. Math. Hungar. 1968. Vol. 3. P. 401–409.
11. **Tóth F.G.** Covering the plane with two kinds of circles // Discrete & Computational Geometry. 1995. Vol. 13, iss. 3–4. P. 445–457. doi: 10.1007/BF02574055 .
12. **Florian A., Heppes A.** Solid Coverings of the Euclidean Plane with Incongruent Circles // Discrete & Computational Geometry. 2000. Vol. 23, iss. 2. P. 225–245. doi: 10.1007/PL00009497 .
13. **Dorninger D.** Thinnest covering of the Euclidean plane with incongruent circles // Anal. Geom. Metr. Spaces. 2017. Vol. 5, no. 1. P. 40–46. doi: 10.1515/agms-2017-0002 .
14. **Bánhelyi B., Palatinus E, Lévai B.L.** Optimal circle covering problems and their applications // Central European J. Operations Research. 2015. Vol. 23, no. 4. P. 815–832. doi: 10.1007/s10100-014-0362-7 .
15. **Takhonov I.I.** Multi-level regular coverings of the plane by disks // J. Math. Sci. 2015. Vol. 211, iss. 6. P. 886–901. doi: 10.1007/s10958-015-2642-8 .
16. **Киселева Е.М. Лозовская Л.И., Тимошенко Е.В.** Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 3. С. 98–117.
17. **Dumer I.** Covering spheres with spheres // Discrete & Computational Geometry. 2006. Vol. 38, iss. 4. P. 665–679. doi: 10.1007/s00454-007-9000-7 .
18. **Казаков А.Л., Лебедев П.Д.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости // Выч. методы и программирование. 2015. Т. 16. № 2. С. 307–317.
19. **Лебедев П.Д., Ушаков А.В.** Аппроксимация множеств на плоскости оптимальными наборами кругов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. Р. 79–90.
20. **Казаков А.Л., Лебедев П.Д.** Алгоритмы построения наилучших n-сетей в метрических пространствах // Автоматика и телемеханика. 2017. № 7. С. 141–155
21. **Kazakov A., Lebedev P., Lempert A.** On covering bounded sets by collections of circles of various radii // The Bulletin of Irkutsk State University. Ser.: Mathematics. 2020. Vol. 31. P. 18–33. doi: 10.26516/1997-7670.2020.31.18 .
22. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука. 1980. 320 с.
23. **Гаркави А.Л.** О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 6. С. 139–145.
24. **Шориков А.Ф.** Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. I // Автоматика и телемеханика. 1996. № 7. С. 130–143.
25. **Шориков А.Ф.** Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. II // Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 139–150.

Поступила 11.01.2021
После доработки 20.02.2021
Принята к публикации 25.02.2021

Казаков Александр Леонидович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Ин-т динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН
г. Иркутск,
ведущий науч. сотрудник

Ин-т машиноведения УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: kazakov@icc.ru
Лебедев Павел Дмитриевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Ин-т математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: pleb@yandex.ru

REFERENCES

1. Kepler J. *The six-cornered snowflake.* Philadelphia: Paul Dry Books, 2010, 150 p. ISBN: 9781589882850 . Translated to Russian under the title *O shestiugol'nykh snezhinkakh.* Moscow: Nauka Publ., 1982, 192 p.
2. Preparata F.P., Shamos M.I. *Computational geometry: An introduction.* N Y: Springer-Verlag, 1985, 396 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1098-6 .
3. Banhelyi B., Palatinus E., Levai B.L. Optimal circle covering problems and their applications. *Central European J. Operations Research*, 2015, vol. 23, no. 4, pp. 815–832. doi: 10.1007/s10100-014-0362-7 .
4. Shirokanev A.S., Kirsh D.V., Ilyasova N.Yu., Kupriyanov A.V. Investigation of algorithms for coagulate arrangement in fundus images. *Computer Optics*, 2018, vol. 42, no. 4, pp.712–721 (in Russian). doi: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-712-721 .
5. Hayat H. et al. The state-of-the-art of sensors and environmental monitoring technologies in buildings. *Sensors*, 2019, vol. 19, no. 17, art.-no. 3648, 31 p. doi: 10.3390/s19173648 .
6. Bychkov I.V., Maksimkin N.N., Khozyainov I.S., Kiselev L.V. On the problem of patrolling the border of the water area guarded by a group of underwater vehicles. In: *5th All-Russian Sci. Tech. Conf. "Tekhnicheskie problemy osvoeniya Mirovogo okeana"* (Technical problems of the development of the World Ocean), 2013, Vladivostok, Russia). Vladivostok: IPMT Publ., 2013, pp. 424–428. ISBN: 978-5-8044-1409-3 ,
7. Ershov A.A., Ushakov A.V., Ushakov V.N. An approach problem for a control system and a compact set in the phase space in the presence of phase constraints. *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 8, pp. 1092–1128. doi: 10.1070/SM9141 .
8. Ushakov V.N., Ukhobotov V.I., Lipin A.E. An addition to the definition of a stable bridge and an approximating system of sets in differential games. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 304, pp. 268–280. doi: 10.1134/S0081543819010206 .
9. Toth L.F. *Regular figures.* N Y: A Pergamon Press Book The Macmillan Co., 1964, 339 p. ISBN: 9780080100586 .
10. Toth L.F. Solid circle-packings and circle-coverings. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1968, vol. 3, pp. 401–409.
11. Tóth F.G. Covering the plane with two kinds of circles. *Discrete & Computational Geometry*, 1995, vol. 13, no. 3–4, pp. 445–457. doi: 10.1007/BF02574055 .
12. Florian A., Heppes A. Solid coverings of the Euclidean plane with incongruent circles. *Discrete & Computational Geometry*, 2000, vol. 23, no. 2, pp. 225–245. doi: 10.1007/PL00009497 .
13. Dorninger D. Thinnest covering of the Euclidean plane with incongruent circles. *Anal. Geom. Metr. Spaces*, 2017, vol. 5, no. 1, pp. 40–46. doi: 10.1515/agms-2017-0002 .
14. Bánhelyi B., Palatinus E, Lévai B.L. Optimal circle covering problems and their applications. *Central European J. Operations Research*, 2015, vol. 23, no. 4, pp. 815–832. doi: 10.1007/s10100-014-0362-7 .
15. Takhonov I.I. Multi-level regular coverings of the plane by disks. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 211, no. 6, pp. 886–901. doi: 10.1007/s10958-015-2642-8 .
16. Kiseleva E.M., Lozovskaya L.I., Timoshenko E.V. Solution of continuous problems of optimal covering with spheres using optimal set-partition theory. *Cybern. Syst. Anal.*, 2009, vol. 45, no. 3, pp. 421–437. doi: 10.1007/s10559-009-9113-5 .
17. Dumer I. Covering spheres with spheres. *Discrete & Computational Geometry*, 2006, vol. 38, no. 4, pp. 665–679. doi: 10.1007/s00454-007-9000-7 .
18. Kazakov A.L., Lebedev P.D. Algorithms of optimal packing construction for planar compact sets. *Vychisl. Metody Programm.*, 2015, vol. 16, no. 2, pp. 307–317 (in Russian).
19. Lebedev P.D., Ushakov A.V. Approximating sets on a plane with optimal sets of circles. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 485–493. doi: 10.1134/S0005117912030071 .

20. Kazakov A.L., Lebedev P.D. Algorithms for constructing optimal n-networks in metric spaces. *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 7, pp. 1290–1301. doi: 10.1134/S0005117917070104 .
21. Kazakov A., Lebedev P., Lempert A. On covering bounded sets by collections of circles of various radii. *The Bulletin of Irkutsk State University. Ser.: Mathematics*, 2020, vol. 31, pp. 18–33. doi: 10.26516/1997-7670.2020.31.18 .
22. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 320 p.
23. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and convex hull of a set. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1964, vol. 19, no. 6, pp. 139–145 (in Russian).
24. Shorikov A.F. An algorithm for a posteriori minimax estimation of states of discrete dynamic systems. I. *Autom. Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 7, pp. 1016–1026.
25. Shorikov A.F. An algorithm for a posteriori minimax estimation of states of discrete dynamic systems. II. *Autom. Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 9, pp. 1335–1343.

Received January 11, 2021
Revised February 20, 2021
Accepted February 25, 2021

Funding Agency: P.D. Lebedev's research is supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00105).

Alexander Leonidovich Kazakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia; Institute of Engineering Science of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620049 Russia, e-mail: kazakov@icc.ru .

Pavel Dmitrievich Lebedev, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: pleb@yandex.ru .

Cite this article as: P. D. Lebedev, A. L. Kazakov. Iterative algorithms for constructing the thinnest coverings of polyhedra by sets of different balls, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 116–129 .