ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 519.17

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ И $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ НЕ СУЩЕСТВУЮТ[1]

М. П. Голубятников

В 2019 г. И. Н. Белоусов, А. А. Махнев и М. С. Нирова получили описание Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3, где графы Γ_2 и Γ_3 имеют то же множество вершин, что и граф Γ, и в этих графах вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся в графе Γ на расстоянии 2 или 3 соответственно. Некоторые Q-полиномиальные дистанционно регулярные графы Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 имеют массивы пересечений

$$\Big\{\frac{(s^2+su-1)(u^2-1)}{s^2-1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2-1}, u^2; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2-1}, \frac{su^3-su}{s^2-1}\Big\}.$$

Для небольших значений s и u получаем массивы пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ ($u = 5$, $s = 2$) и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ ($u = 7$, $s = 2$). В этой работе мы доказываем, что дистанционно регулярные графы с такими массивами пересечений не существуют. Также мы изучаем свойства локальных подграфов в гипотетическом дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$ ($u = 8$, $s = 2$).

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, Q-полиномиальный граф.

M. P. Golubyatnikov. Distance-regular graphs with intersection arrays $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ and $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ do not exist.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev, and M. S. Nirova in 2019 described Q-polynomial distance-regular graphs Γ of diameter 3 with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3, where the graphs Γ_2 and Γ_3 have the same vertices as Γ and these vertices are adjacent if and only if they are at distance 2 and 3 in Γ, respectively. Some of the Q-polynomial distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 have intersection arrays

$$\Big\{\frac{(s^2+su-1)(u^2-1)}{s^2-1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2-1}, u^2; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2-1}, \frac{su^3-su}{s^2-1}\Big\}.$$

For small values of s and u, we have intersection arrays $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ ($u = 5$, $s = 2$) and $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ ($u = 7$, $s = 2$). We prove that distance-regular graphs with such arrays do not exist. We also study the properties of a local subgraph in a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$ ($u = 8$, $s = 2$).

Keywords: distance-regular graph, Q-polynomial graph.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-98-105

1. Введение

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев и М. С. Нирова в работе [1] нашли описание Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Положим $a = a_3$. Скажем, что Γ — граф типа (I), если $c_2 + 1$ делит a, — граф типа (II), если $c_2 + 1$ делит $a + 1$, — граф типа (III), если $c_2 + 1$ не делит a и не делит $a + 1$.

Графы типа (Ii) имеют массивы пересечений

$$\Big\{\frac{(s^2+su-1)(u^2-1)}{s^2-1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2-1}, u^2; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2-1}, \frac{su^3-su}{s^2-1}\Big\}.$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-71-10067).

Эти графы являются формально самодуальными, в частности, их параметры Крейна совпадают с числами пересечений $q_{ij}^l = p_{ij}^l$. В [1] доказано, что при $u = s^2$ такие графы не существуют.

В классе графов типа (Ii) при $s = 2$ возникает серия массивов пересечений

$$\Big\{\frac{(2u+3)(u^2-1)}{3}, \frac{2u(u^2-4)}{3}, u^2; 1, \frac{u^2-4}{3}, \frac{u(u^2-1)}{3}\Big\}.$$

В работе рассмотрены минимальные возможные параметры $u = 5$, $u = 7$ и $u = 8$.

Основными результатами работы являются доказательства теоремы о несуществовании дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ и предложения о свойствах гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$.

Теорема. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ *не существуют.*

Предложение. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *собственные значения локального подграфа содержатся в* $[-5, -1] \cup \{15, 78\}$;

(2) *кратность собственного значения* 15 *равна* 84, *а кратность собственного значения* -5 *не менее* 177. *Более того если все собственные значения локального подграфа целые, то их число не меньше* 4;

(3) *порядок коклики в* $\Gamma(v)$ *не более* 24.

2. Предварительные сведения

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a — вершина графа Γ, то через $\Gamma_i(a)$ обозначается i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью* вершины a; если вершина a зафиксирована, то $\Gamma_1(a)$ — *локальный подграф*.

Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{2, 3, \ldots, d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (соответственно $c_i(u, w)$) обозначается число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно $\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma(w)$. Если в графе Γ диаметра d значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ для любого $i = 0, \ldots, d$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i, то граф Γ называется *дистанционно регулярным* с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$.

Через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p_{ij}^l и называются *числами пересечений графа* Γ.

Пусть Γ — Q-полиномиальный дистанционно регулярный граф диаметра d, для него определяется многочлен $T_2(\lambda)$ степени $d+1$, называемый *многочленом Тервиллигера* (см. [4, § 4]). Если μ — неглавное собственное значение подграфа $\Gamma(x)$ для некоторой вершины x, то $T_2(\mu) \geq 0$.

Для дистанционно регулярного графа Γ через $\begin{Bmatrix} uv \\ ij \end{Bmatrix}$ обозначим множество вершин графа Γ, находящихся на расстоянии i от вершины u и на расстоянии j от вершины v.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Числа пересечений дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, вычисляются по рекуррентной формуле [2, лемма 4.1.7]

$$p_{j+1,h}^i = \frac{1}{c_{j+1}} \left(p_{j,h-1}^i b_{h-1} + p_{jh}^i (a_h - a_j) + p_{j,h+1}^i c_{h+1} - p_{j-1,h}^i b_{j-1} \right), \tag{2.1}$$

$$p^i_{0h} = \delta_{ih}, \quad p^i_{j0} = \delta_{ij}, \quad p^i_{j,d+1} = 0,$$

$$p^i_{1h} = \begin{cases} c_i, & \text{если } h = i-1, \\ a_i, & \text{если } h = i, \\ b_i, & \text{если } h = i+1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера и $a_i = b_0 - b_i - c_i$.

Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$,

$$\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix} = \left| \begin{Bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{Bmatrix} \right|.$$

Числа $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right]$ называются *тройными числами пересечений*. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. В отличие от двойных чисел пересечения p^i_{jh} тройные числа пересечений зависят от выбора вершин. Опишем способ вычисления некоторых тройных чисел пересечений, предложенный в [3].

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u, v)$, $U = d(v, w)$, $V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и считая число вершин, находящихся на расстоянии $i \in \{1, 2, 3\}$ от третьей, получим систему линейных диофантовых уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{d} [ljh] = p^U_{jh} - [0jh], & j, h \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum\limits_{l=1}^{d} [ilh] = p^V_{ih} - [i0h], & i, h \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum\limits_{l=1}^{d} [ijl] = p^W_{ij} - [ij0], & i, j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Более того, используя неравенство треугольника, получаем, что при $|i - j| > W$ или $i + j < W$ число $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \ldots, d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}.$$

Если параметр Крейна $q^h_{ij} = 0$, то по [3, теорема 3] имеем $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

3. Граф с массивом пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$. Дуальной матрицей собственных значений является матрица [2, гл. 2.3]

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 104 & 1040 & 325 \\ 1 & 34 & -10 & -25 \\ 1 & -1 & -10 & 10 \\ 1 & -8 & 32 & -25 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Числа пересечений графа* Γ *определяются как*
$p^1_{11} = 33$, $p^1_{21} = 70$, $p^1_{32} = 250$, $p^1_{22} = 720$, $p^1_{33} = 75$;
$p^2_{11} = 7$, $p^2_{12} = 72$, $p^2_{13} = 25$, $p^2_{22} = 742$, $p^2_{23} = 225$, $p^2_{33} = 75$;
$p^3_{12} = 80$, $p^3_{13} = 24$, $p^3_{22} = 720$, $p^3_{23} = 240$, $p^3_{33} = 60$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямые вычисления с помощью формулы 2.1. $\square$

Лемма 2. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$. *Пусть* u, v, w — *вершины графа* Γ *с* $d(u, v) = d(u, w) = 1$, $d(v, w) = 2$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$. *Тогда*

$[111] = 6$, $[112] = [121] = 27$, $[122] = 42$;

$[211] = 0$, $[212] = [221] = 45$, $[213] = [231] = 25$;

$[222] = 450$, $[223] = [232] = 225$, $[233] = 0$;

$[322] = 250$, $[323] = [332] = 0$, $[333] = 75$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $[113] = [123] = [131] = [132] = [133] = [311] = [312] = [313] = [321] = [331] = 0$, отсюда сразу имеем $[213] = p^2_{13} - 0 = 25$ и $[231] = p^2_{13} - 0 = 25$.

Обозначим $a = [122]$. Выразим из системы (2.2) тройные числа пересечений через параметр a.

Из соотношений $[112] + a = p^1_{21} - 1 = 69$ и $[121] + a = p^1_{21} - 1 = 69$ получаем $[112] = [121] = -a + 69$. Далее из равенств $[121] + [221] = p^2_{12} - 0 = 72$ и $[112] + [212] = p^2_{12} - 0 = 72$ находим $[212] = [221] = a + 3$. А из соотношения $[111] + [121] = p^1_{11} - 0 = 33$ имеем $[111] = a - 36$. Затем $[211] = 6 - [111] = -a + 42$.

Из соотношения $a + [222] + [322] = p^2_{22} - 0 = 742$ получаем $[322] = 742 - a - b$. Далее из равенств $[322] + [323] = p^1_{32} - 0 = 250$ и $[322] + [332] = p^1_{32} - 0 = 250$ выводим $[332] = a + b - 492$ и $[323] = a + b - 492$. Из соотношений $[223] + [323] = p^2_{23} - 0 = 225$, $[232] + [332] = p^2_{32} - 0 = 225$ и $[332] + [333] = p^1_{33} - 0 = 75$ получаем $[223] = [232] = -a - b + 717$ и $[333] = -a - b + 567$. Из $[233] + [333] = p^2_{33} - 0 = 75$ имеем $[233] = a + b - 492$.

Так как для этого графа $q^3_{11} = 0$, то

$$S_{113}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{r1} Q_{s1} Q_{t3} [rst] = -41160a + 1715b + 956970 = 0.$$

Отсюда $b = 24a - 558$, $[223] = [232] = -25a + 1275$, $[322] = -25a + 1300$, $[233] = [323] = [332] = 25a - 1050$ и $[333] = -25a + 1125$.

Так как $[211] \geq 0$, то $a \leq 42$. С другой стороны, $[323] \geq 0$, поэтому $a \geq 42$. Отсюда $a = 42$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$. *Пусть* u, v, w' — *вершины графа* Γ, $d(u, v) = 1$, $d(u, w') = 2$, $d(v, w') = 3$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw' \\ ijh \end{bmatrix}$ *и* $a' = [122]$. *Тогда*

$[112] = -a' + 72$, $[113] = a' - 39$, $[121] = 7$, $[123] = [213] = -a' + 63$;

$[212] = a' + 7$, $[221] = -5a' + 288$, $[222] = 24a' - 630$, $[223] = -19a' + 1062$, $[231] = 5a' - 216$, $[232] = -25a' + 1365$, $[233] = 20a' - 900$;

$[321] = 5a' - 215$, $[322] = -25a' + 1350$, $[323] = 20a' - 885$, $[331] = -5a' + 240$, $[332] = 25a' - 1125$, $[333] = -20a' + 960$.

Здесь $a' \in \{45, 46, 47, 48\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $[111] = [131] = [132] = [133] = [211] = [311] = [312] = [313] = 0$. Отсюда сразу получаем $[121] = p^2_{11} - 0 = 7$.

Обозначим $a' = [122]$. Выразим из системы (2.2) тройные числа пересечений через параметр a'.

Из соотношения $[112] + a' = p^2_{12} - 0 = 72$ получаем $[112] = -a' + 72$. Из $[121] + a' + [123] = p^1_{12} - 0 = 70$ имеем $[123] = -a' + 63$. Из равенств $[112] + [212] = p^3_{12} - 1 = 79$ и $[112] + [113] = p^1_{11} - 0 = 33$ выводим $[212] = a' + 7$ и $[113] = a' - 39$. Соотношение $[212] + [213] = p^2_{23} - 0 = 70$ дает $[213] = 63 - a'$.

Обозначим теперь $b = [222]$. Из $a' + b + [322] = p^3_{22} - 0 = 720$ получаем $[322] = 720 - a' - b$. Равенство $[322] + [332] = p^2_{32} - 0 = 225$ влечет $[332] = a' + b - 495$. Далее, из соотношения $[232] + [332] = p^3_{32} - 0 = 240$ получаем $[232] = 735 - a' - b$.

Пусть теперь $c = [333]$. Тогда из соотношений $[323]+c = p^2_{33}-0 = 75$ и $[233]+c = p^3_{33}-0 = 60$ находим $[323] = 75 - c$ и $[233] = 60 - c$. Из $[213] + [223] + [233] = p^2_{23} - 0 = 225$ выводим $[223] = a'+c+102$. Из $[221]+b+[223] = p^1_{22}-0 = 720$ получаем $[221] = 618-a'-b-c$. Равенство $[121]+[221]+[321] = p^3_{21}-0 = 80$ влечет $[321] = a'+b+c-545$. Из $[221]+[231] = p^2_{21}-0 = 72$ имеем $[231] = a'+b+c-546$. Наконец, из $[231]+[331] = p^3_{31} - 0 = 24$ получаем $[331] = 570-a'-b-c$.

Так как для этого графа $q^3_{11} = 0$, то

$$S_{113}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{r1}Q_{s1}Q_{t3}[rst] = -8575b - 10290c + 4476150 = 0,$$

$$S_{311}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{r1}Q_{s1}Q_{t3}[rst] = -41160a' + 1715b + 1080450 = 0.$$

Отсюда $b = 24a' - 630$ и $c = -20a' + 960$. Подставляя полученные значения для b и c получаем требуемые равенства.

Из неравенства $[332] \geq 0$ следует $a' \geq 45$, а из $[333] \geq 0$ получаем $a' \leq 48$. Лемма доказана.

Докажем теперь, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ не существует. Пусть u и v смежные вершины графа Γ. Заметим что $\left|\left\{ {uv \atop 12} \right\}\right| = p^1_{12} = 70$ и $\left|\left\{ {uv \atop 23} \right\}\right| = p^1_{23} = 250$. Пусть e — число пар вершин (x,y), находящихся на расстоянии 3, где $x \in \left\{ {uv \atop 12} \right\}$ и $y \in \left\{ {uv \atop 23} \right\}$.

По лемме 2 имеем $e = p^1_{12} \cdot \left[{uvw \atop 233} \right] = 0$. С другой стороны, по лемме 3 число e удовлетворяет неравенствам $250 \cdot (-48 + 63) \leq e \leq 250 \cdot (-45 + 63)$. Отсюда $3750 \leq e \leq 4500$, противоречие. Таким образов граф с массивом $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ не существует.

Лемма доказана.

4. Граф с массивом пересечений $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$

В этом разделе мы докажем несуществование дистанционно регулярного графа с массивом $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$. Тогда дуальной матрицей собственных значений является матрица [2, гл. 2.3]

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 272 & 3808 & 833 \\ 1 & 62 & -14 & -49 \\ 1 & -1 & -14 & 14 \\ 1 & -16 & 64 & -49 \end{pmatrix}.$$

Лемма 4. *Числа пересечений графа* Γ *определяются как*
(1) $p^1_{11} = 61$, $p^1_{21} = 210$, $p^1_{22} = 2912$, $p^1_{32} = 686$, $p^1_{33} = 147$;
(2) $p^2_{11} = 15$, $p^2_{21} = 208$, $p^2_{22} = 2962$, $p^2_{31} = 49$, $p^2_{32} = 637$, $p^2_{33} = 147$;
(3) $p^3_{21} = 224$, $p^3_{22} = 2912$, $p^3_{31} = 48$, $p^3_{32} = 672$, $p^3_{33} = 112$.

Доказательство. Прямые вычисления с помощью формулы (2.1). □

Лемма 5. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$. *Пусть* u, v, w *— вершины графа* Γ, $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 1$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$ *и* $a = [111]$. *Тогда выполняются следующие равенства:*

$[112] = [121] = [211] = -a + 60$;

$[122] = [212] = [221] = a + 150;$
$[222] = 416a/25 + 9204/5;$
$[223] = [232] = [322] = -441a/25 + 4606/5;$
$[233] = [323] = [332] = 441a/25 - 1176/5;$
$[333] = -441a/25 + 1911/5.$

Доказательство. Заметим, что $[113] = [123] = [131] = [132] = [133] = [213] = [231] = [311] = [312] = [313] = [321] = [331] = 0$.

Обозначим $a = [111]$ и выразим из системы 2.2 тройные числа пересечений через параметр a.

Из соотношений $a + [211] = p^1_{11} - 1 = 60$, $a + [121] = p^1_{11} - 1 = 60$ и $a + [112] = p^1_{11} - 1 = 60$ получаем $[112] = [121] = [211] = -a + 60$. Аналогично из формул $[211] + [212] = p^1_{21} - 0 = 210$, $[211] + [221] = p^1_{21} - 0 = 210$ и $[112] + [122] = p^1_{21} - 0 = 210$ имеем $[122] = [212] = [221] = a + 150$.

Обозначим теперь $b = [222]$. Равенства $[221] + [222] + [223] = p^3_{22} - 0 = 2912$, $[212] + [222] + [232] = p^3_{22} - 0 = 2912$ и $[122] + [222] + [322] = p^3_{22} - 0 = 2912$ дают $[223] = [232] = [322] = -a - b + 2762$. Из соотношений $[223] + [323] = p^1_{32} - 0 = 686$, $[223] + [233] = p^1_{32} - 0 = 686$ и $[232] + [332] = p^1_{32} - 0 = 686$ выводим $[323] = [233] = [332] = a + b - 2076$. Наконец, из равенства $[233] + [333] = p^1_{33} - 0 = 147$ находим $[333] = -a - b + 2223$.

Так как для этого графа $q^3_{11} = 0$, то

$$S_{113}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{r1}Q_{s1}Q_{t3}[rst] = -235872a + 14175b - 26093340 = 0.$$

Отсюда $b = 416a/25 + 9204/5$, $[223] = [232] = [322] = -441a/25 + 4606/5$, $[233] = [323] = [332] = 441a/25 - 1176/5$ и $[333] = -441a/25 + 1911/5$. Лемма доказана.

Докажем теперь, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существует. Ввиду леммы 5 из соотношений $[333] \geq 0$ и $[332] \geq 0$ получаем $14 \leq a \leq 21$. С другой стороны, из условия целочисленности $[333]$ число a должно быть сравнимо с 5 по модулю 25; противоречие. Таким образом, граф с массивом $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существует.

Лемма доказана.

Из результатов разд. 2 и 3 получаем, что графы с массивами пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существуют.

Теорема доказана.

5. Свойства графа с массивом пересечений $\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$ ($s = 2$, $u = 8$). Дуальной матрицей собственных значений является матрица [2, гл. 2.3]

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 399 & 6384 & 1216 \\ 1 & 79 & -16 & -64 \\ 1 & -1 & -16 & 16 \\ 1 & -21 & 84 & -64 \end{pmatrix}.$$

Лемма 6. *Числа пересечений графа* Γ *определяются как*
$p^1_{11} = 78$, $p^1_{21} = 320$, $p^1_{32} = 1024$, $p^1_{22} = 5040$, $p^1_{33} = 192$;
$p^2_{11} = 20$, $p^2_{12} = 315$, $p^2_{13} = 64$, $p^2_{22} = 5108$, $p^2_{23} = 960$, $p^2_{33} = 192$;
$p^3_{12} = 336$, $p^3_{13} = 63$, $p^3_{22} = 5040$, $p^3_{23} = 1008$, $p^3_{33} = 144$.

Доказательство. Прямые вычисления с помощью формулы (2.1). □

Зафиксируем некоторую вершину v графа Γ и опишем некоторые спектральные свойства локального подграфа.

Лемма 7. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$. *Тогда многочлен Тервиллигера графа* Γ *вычисляется следующим образом*:

$$T_2(\lambda) = -16(\lambda+5)(\lambda+1)(\lambda-15)(\lambda-59) \tag{1}$$

Доказательство. Заметим, что граф Γ имеет классические параметры (D, b, α, β) (см [2, гл. 6.3]), равные $(3, 4, 3, 19)$. Заметим, что $b_2 = 64$ и

$$\begin{bmatrix} D \\ 1 \end{bmatrix}_b = \frac{b^3 - b^0}{b^1 - b^0} = 21.$$

По [4, лемма 4.7] имеем

$$T_2(\lambda) = 16(-\lambda^2 + 58\lambda + 379)(\lambda^2 - 10\lambda - 11) - 4096(\lambda+1)^2 = -16(\lambda+5)(\lambda+1)(\lambda-15)(\lambda-59).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *собственные значения локального подграфа содержатся в* $[-5, -1] \cup \{15, 78\}$;

(2) *кратность собственного значения* 15 *равна* 84, *а кратность собственного значения* -5 *не менее* 177. *Более того если все собственные значения локального подграфа целые, то их число не меньше* 4;

(3) *порядок коклики в* $\Gamma(v)$ *не более* 24.

Доказательство. Из формулы (1) леммы 7 определяем, что неглавные собственные значения локального подграфа содержатся в $[-5, -1] \cup [15, 59]$. С другой стороны по [2, теорема 4.4.3] неглавные собственные значения локального подграфа не больше 15. Отсюда получаем справедливость п. (1) леммы.

Свойство (2) следует из решения системы уравнений для кратностей

$$\begin{cases} f_{-5} + f_{-4} + f_{-3} + f_{-2} + f_{-1} + f_{15} + 1 = 399, \\ -5f_{-5} - 4f_{-4} - 3f_{-3} - 2f_{-2} - f_{-1} + 15f_{15} + 78 = 0, \\ (-5)^2 f_{-5} + (-4)^2 f_{-4} + (-3)^2 f_{-3} + (-2)^2 f_{-2} + f_{-1} + 15^2 f_{15} + 78^2 = 399 \cdot 78. \end{cases}$$

Здесь f_μ — кратность собственного значения μ в $\Gamma(v)$.

Докажем свойство (3). Через $\alpha(\Gamma(v))$ обозначим размер максимальной коклики в графе $\Gamma(v)$, граница Хоффмана дает

$$\alpha(\Gamma(v)) \le 399 \frac{5}{78+5} \le 24.$$

Лемма доказана.

Из леммы 8 следует предложение, сформулированное в разд. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоусов И.Н., Махнев А.А., Нирова М.С.** О дистанционно регулярных Q-полиномиальных графах Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1358–1365. doi: 10.33048/semi.2019.16.096 .
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs, Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
3. **Coolsaet K., Jurishich A.** Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory. Ser. A. 2008. Vol. 115. P. 1086–1095. doi: 10.1016/j.jcta.2007.12.001 .

4. **Gavrilyuk A. L., Koolen J. H.,** The Terwilliger polynomial of a Q-polynomial distance-regular graph and its application to the pseudo-partition graphs // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 466. P. 117–140.

Поступила 13.03.2020
После доработки 21.10.2020
Принята к публикации 26.10.2020

Голубятников Михаил Петрович
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: mike_ru1@mail.ru

REFERENCES

1. Belousov I.N., Makhnev A.A., Nirova M.S. On Q-polynomial distance-regular graphs Γ_2 and Γ_3. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 1385–1392 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2019.16.096 .
2. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
3. Coolsaet K., Jurishich A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 2008, vol. 115, no. 6, pp. 1086–1095. doi: 10.1016/j.jcta.2007.12.001 .
4. Gavrilyuk A.L., Koolen J.H. The Terwilliger polynomial of a Q-polynomial distance-regular graph and its application to pseudo-partition graphs. *Linear Algebra Appl.*, 2015, vol. 466, pp. 117–140. doi: 10.1016/j.laa.2014.09.048 .

Received March 13, 2020
Revised October 21, 2020
Accepted October 26, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10067).

Mikhail Petrovich Golubyatnikov, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: mike_ru1@mail.ru .

Cite this article as: M. P. Golubyatnikov. Distance-regular graphs with intersection arrays $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ and $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ do not exist, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 98–105 .