

УДК 519.62

## ДВИЖУЩИЙСЯ В $\mathbb{R}^2$ ОБЪЕКТ СО СКОРОСТНЫМ ПОРАЖАЮЩИМ МИНИОБЪЕКТОМ И НЕДРУЖЕСТВЕННЫЙ ТЕЛЕСНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ<sup>1</sup>

В. И. Бердышев

Предложена модель движения в заданном коридоре  $Y \subset \mathbb{R}^2$  объекта  $t$ , снабженного скоростным поражающим миниобъектом в присутствии телесного недружественного наблюдателя  $f$ . В  $\mathbb{R}^2 \setminus Y$  имеется множество  $G$ , препятствующее видимости и движению. Наблюдатель в целях безопасности держится в окрестности углов и выпуклых фрагментов границы множества  $G$ . Траектория объекта  $t$  — это кривая  $\mathcal{T} \subset Y$  с заданным скоростным режимом  $v_t$  движения по ней. Возможность для наблюдателя следить за объектом в безопасном для себя режиме, а для объекта — избежать наблюдения зависит от позиции наблюдателя и объекта. Охарактеризованы позиции, при которых объект для любой  $\mathcal{T}$  может выбрать режим  $v_t$ , позволяющий уклониться от наблюдения, и позиции, гарантирующие наблюдателю возможность видеть часть траектории.

Ключевые слова: навигация, траектория, наблюдатель, движущийся объект.

**V. I. Berdyshev. An object moving in  $\mathbb{R}^2$  with a high-speed destructive minioobject and an unfriendly solid observer.**

We propose a model for the motion in a given corridor  $Y \subset \mathbb{R}^2$  of an object  $t$  equipped with a high-speed destructive minioobject in the presence of a solid unfriendly observer  $f$ . In  $\mathbb{R}^2 \setminus Y$  there is a subset  $G$  that obstructs visibility and motion. For safety reasons, the observer sticks to neighborhoods of the angles and convex fragments of the boundary of  $G$ . The trajectory of  $t$  is a curve  $\mathcal{T} \subset Y$  with a given speed regime  $v_t$  of the motion along it. The possibilities for the observer to track the object in a safe mode and for the object to avoid the observation depend on the positions of the observer and the object. We characterize the positions in which, for any  $\mathcal{T}$ , the object can choose a regime  $v_t$  enabling the avoidance of observation and the positions guaranteeing that the observer can see a part of the trajectory.

Keywords: navigation, trajectory, observer, moving object.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-76-82

**1. Введение.** В пространстве  $X = \mathbb{R}^2$  имеются множество  $G$ , являющееся замыканием открытого множества, которое препятствует видимости и движению, и коридор  $Y$ ,  $Y \cap G = \emptyset$ , граница которого гомеоморфна сфере пространства. В  $Y$  зафиксированы точки  $t_*$ ,  $t^*$ . Движение объекта  $t$  осуществляется внутри коридора из точки  $t_*$  в  $t^*$  в условиях наблюдения. Объект имеет поражающее средство — миниобъект, способный двигаться прямолинейно и равномерно с большой скоростью  $v_m$ . Поэтому наблюдатель  $f$ , находясь на малом расстоянии от  $t$  в зоне видимости объекта, не рискует себя демаскировать, в частности, он может укрыться от  $t$  за такие фрагменты границы  $\partial G$ , как вершины (угловые точки) и выпуклые участки. Далее граница  $\partial G$  предполагается кусочно-гладкой. Через  $C$  обозначается гладкая строго выпуклая связная максимальная по включению дуга  $C \subset \partial G$  без концевых точек. В каждой точке  $c \in C$  существует единственная опорная к множеству  $G \cap V_\delta(c)$  прямая, где  $V_\delta(c)$  — шар малого радиуса  $\delta > 0$  с центром в точке  $c$ . Точку  $a \in \partial G$  называем вершиной угла  $A \subset \partial G$  или угловой точкой, если в ней существует пара опорных к множеству  $G \cap V_\delta(a)$  прямых. Оказалось, что углы  $A$  и выпуклые дуги  $C$  в рассматриваемых задачах играют одинаковую роль, поэтому удобно применять обозначение  $s \in \{a \in A, c \in C\}$ . В нашей модели объект и миниобъект

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

изображаются точками, а наблюдатель — шаром  $V_\varepsilon(f)$  малого радиуса  $\varepsilon > 0$ , в центре  $f$  которого расположено средство наблюдения. Для наблюдателя опасно попадание миниобъекта в шар  $V_\varepsilon(f)$ .

Задача наблюдателя — поиск позиции, которая позволяет наблюдать за объектом на возможно большей части его траектории. Задача объекта состоит в поиске траектории, наиболее скрытой от наблюдателя.

Траекторией объекта будем называть пару  $\{\mathcal{T}, v_t(\cdot)\}$ , где  $\mathcal{T}$  — кривая,  $v_t(\cdot)$  — функция скорости движения объекта на ней. Предполагаем, что вся геометрическая кривая  $\mathcal{T}$  видна наблюдателю.

Задаче построения оптимальных траекторий в условиях недружественного точечного наблюдателя рассматривалась, например, в [1–3]. Случай телесного наблюдателя ближе к реальности, но он для исследования более трудоемок.

**2. Предварительные построения.** Опишем возможные позиции наблюдателя  $f$  и объекта  $t$ , при которых наблюдатель может следить за объектом в безопасном для себя режиме.

Пусть  $a$  — вершина угла  $A \subset \partial G$  и шар  $V_\varepsilon(f_0)$  таков, что  $V_\varepsilon(f_0) \cap G = a$  (рис. 1). Считая величину  $\varepsilon$  малой в сравнении с размерами угла  $A$ , прокатим шар  $V_\varepsilon(f)$  из исходного положения  $V_\varepsilon(f_0)$  по одной из сторон угла (условно “левой”), не отрывая его от множества  $G$ , с ненулевой скоростью  $v_f$  ( $v_f < v_m$ ) движения центра  $f$ , потратив на это время  $\tau_0$ . Траекторию центра, соединяющую начальную  $f_0$  и конечную  $f_{\tau_0}$  точки, обозначим через  $\mathcal{T}_a = \{f_\tau: 0 \leq \tau \leq \tau_0\}$ . На рис. 1 она изображена пунктирной линией. Пусть  $L = L^a$  — прямая, касающаяся шара  $V_\varepsilon(f_{\tau_0})$  ( $a \in L^a$ ) и разделяющая точки  $f_0, f_{\tau_0}$ . Пусть  $P^L$  — замкнутое полупространство с границей  $L$ , содержащее  $f_{\tau_0}$  и множество  $G \cap V_\delta(a)$  при малом  $\delta > 0$ ,  $P^L = X \setminus P_L$ ,  $R = v_m \tau_0 + \varepsilon$ , где  $v_m$  — скорость миниобъекта. Определим лучи:  $L_+^0$  — касательный луч в точке  $a$  к кривой, определяющей “правую” сторону угла  $A$ ,  $L_+^a = \{a + \lambda(a - b): \lambda \geq 0\} \subset L^a$ , где  $b = L^a \cap V_\varepsilon(f_{\tau_0})$ ,  $L_+^\tau = L_+(f_\tau) = \{a + \lambda(a - f_\tau): \lambda \geq 0\}$ . Через  $L^\tau$  обозначается прямая, содержащая луч  $L_+^\tau$ . В дальнейшем будем считать, что точка  $f_0$  принадлежит прямой  $L^0$ .

Пусть  $C$  — выпуклая дуга,  $C \subset \partial G$ ,  $c \in C$ , шар  $V_\varepsilon(f_0)$ , касающийся дуги в точке  $c$ ,  $L = L^c$  — прямая, разделяющая шар и дугу,  $L^0$  — прямая, касающаяся правой стороны дуги  $C$  и содержащая точку  $f_0$ . Прокатим шар  $V_\varepsilon(f)$  из положения  $V_\varepsilon(f_0)$  по одной из сторон дуги  $C$  (условно “левой” относительно точки  $c$ ) с ненулевой скоростью, не отрывая его от  $C$ , до того момента  $\tau_0$ , когда  $V_\varepsilon(f_{\tau_0})$  коснется прямой  $L^c$  и дуги  $C$  одновременно, т. е. когда  $f$  уйдет в “укрытие”. Центр шара опишет траекторию  $\mathcal{T}_c = \{f_\tau: 0 \leq \tau \leq \tau_0\}$ . Определим лучи, касающиеся правой ветви дуги  $C$ :  $L_+^c = \{c + \lambda(c - b): \lambda \geq 0\}$ , где  $b = L \cap V_\varepsilon(f_{\tau_0})$ ,  $L_+^\tau = L_+(f_\tau) = \{c_\tau + \lambda(c_\tau - f_\tau): \lambda \geq 0\}$ , где  $c_\tau$  — точка касания с дугой  $C$  луча с началом в точке  $f_\tau$ .

Далее  $s \in \{a \in A, c \in C\}$ . Обозначим

$$T(s, \tau) = \{t \in P_{L^s} \cap P^{L^\tau} : \|s - t\| \geq R\}, \quad \text{где } R = v_m \tau_0 + \varepsilon, \quad T(s) = T(s, 0). \quad (1)$$

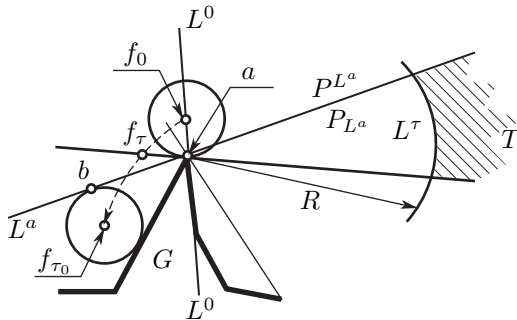


Рис. 1

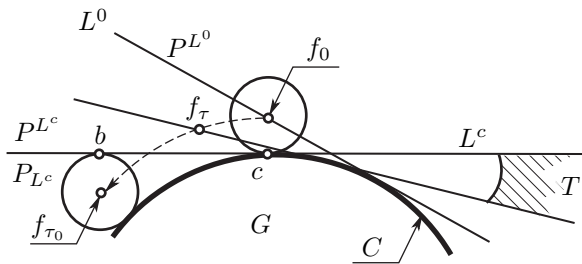


Рис. 2

**Предложение.** Наблюдатель  $f_\tau$  при движении от точки  $f_0$  по участку  $\mathcal{T}_s \cap P^{L^s}$  траектории  $\mathcal{T}_1$  имеет возможность в безопасном для себя режиме наблюдать объекты  $t \in T(s, \tau)$ , при этом площадь контролируемой им части множества  $T(s, \tau) \cap Y$  убывает до нуля по мере приближения  $f_\tau$  к прямой  $L^s$ . Если объект  $t$  расположен в  $P^{L^s}$ , то для его миниобъекта доступен любой шар  $V_\varepsilon(f_\tau)$ ,  $0 \leq \tau < \tau_0$ .

**Доказательство.** Миниобъект  $m$ , стартующий с  $t \in T(s)$ ,  $\|t - s\| = R$ , за временной промежуток от 0 до  $\tau_0$  может лишь приблизиться к точке  $s$ , или войти в полупространство  $P^{L^s}$ . За это время шар  $V(f_\tau)$  займет положение  $V(f_{\tau_0})$ , разместившись в полупространстве  $P_L$ , и, отключив свое средство наблюдения, станет невидимым для объекта  $t$ . Остальные утверждения предложения очевидны.  $\square$

**3. Основные результаты.** Далее будем изучать возможности движущегося объекта и наблюдателя после выхода объекта из множества  $T(s)$ , т. е. на части маршрута  $\mathcal{T} \setminus T(s)$ , которая при высокой скорости миниобъекта имеет большую длину. На части маршрута  $\mathcal{T} \cap T(s)$  наблюдатель держит объект в поле зрения.

Пусть задан гладкий маршрут движения объекта  $t$

$$\mathcal{T} = \{t(\eta) : 0 \leq \eta \leq 1, t(0) = t_*, t(1) = t_*\}, \quad (2)$$

наблюдатель  $f$  расположен в окрестности угловой точки  $s = a$  или точки  $s = c$ , лежащей на дуге  $C$ , т. е.  $s \in \{a, c\}$ , и точка  $t_s$  удовлетворяет условиям  $t_s \in \mathcal{T} \cap T(s)$ ,  $\|s - t_s\| = \mathcal{R}$ . Охарактеризуем позицию наблюдателя. Далее  $\partial_l Y$  — левая,  $\partial_r Y$  — правая стороны границы коридора  $Y$ . Предполагаем, что  $\rho(s, \partial_l Y) < \rho(s, \partial_r Y)$ , а наблюдатель  $f$  движется в “укрытие” по траектории  $\mathcal{T}_s$  от  $f_0$  к  $f_{\tau_0}$  против стрелки часов. Кроме того, для некоторого  $\tau = \tau_s$  имеем  $f_\tau \in P^{L^s}$ , и точка  $t_s$  лежит на луче  $L_+(f_\tau)$  (см. рис. 3). Нам предстоит выбрать скоростной режим для маршрута  $\mathcal{T}$ . Естественно предположить, что наблюдатель будет уходить в “укрытие” с максимальной постоянной скоростью  $v_f$  либо при минимальном требовании  $v_f > 0$ .

Наша цель — выяснить в изложенной выше позиции наблюдателя возможность построения траектории объекта, не видимой для наблюдателя. Рассмотрим случай, когда  $s = a$  — угловая точка. Для дуги  $C$  рассуждения аналогичны. Определим полярную систему координат  $(\varphi, \rho)$  с началом в точке  $a$  и осью  $L_+(f_{\tau_s}) = \{a + \lambda(t_s - a) : \lambda \geq 0\}$ . Пусть части границ  $\partial_l Y$ ,  $\partial_r Y$  и кривой  $\mathcal{T}$  (2), попавшие в конус, ограниченный лучами  $L_+^0$  и  $L_+(f_{\tau_0})$ , представлены графиками функций  $\varphi = \varphi_l(\rho)$ ,  $\varphi = \varphi_r(\rho)$ ,  $\varphi = \varphi_0(\rho)$ , соответственно,  $0 \leq \rho \leq \mathcal{R}$ . Ясно, что

$$\varphi_l(\rho) \leq \varphi_0(\rho) \leq \varphi_r(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \mathcal{R}.$$

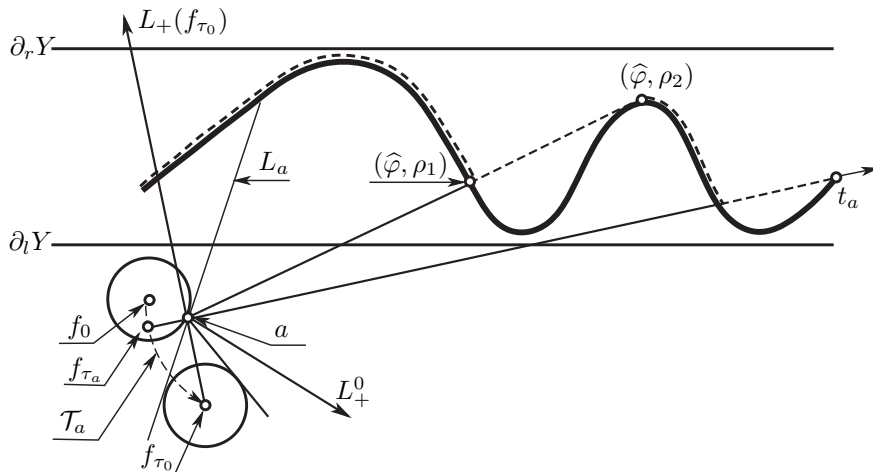


Рис. 3

Введем вспомогательную функцию  $\widehat{\varphi}(\rho) = \max\{\varphi_0(\gamma) : \rho \leq \gamma \leq \mathcal{R}\}$ . Она непрерывна и при изменении  $\rho$  от  $\mathcal{R}$  до 0 возрастает, вообще говоря, нестрого: участки ее строгого роста чередуются с участками постоянства. На рис. 3 кривая  $\mathcal{T}$  изображена сплошной линией, а график  $\text{gr } \widehat{\varphi}$  — пунктирной. Наблюдатель  $f_\tau$  движется по траектории  $\mathcal{T}_a$  против стрелки часов с ненулевой скоростью, поэтому луч  $L_+^\tau = \{a + \lambda(a - f_\tau) : \lambda \geq 0\}$  вращается, увеличивая свой угол с осью  $L_+^{\tau_s}$ . При этом наблюдатель  $f_\tau$  видит все точки полупространства  $P^{L^\tau}$  и не видит точки дополнения  $P_{L^\tau}$ . Задача объекта  $t$  — следовать по кривой  $\mathcal{T}$  за лучом  $L_+^\tau$ , оставаясь внутри полупространства  $P_{L^\tau}$ , например, в полупространстве  $P_{L^\tau - \delta}$  при малом  $\delta > 0$ . На участке строгого возрастания функции  $\widehat{\varphi}(\rho)$  движение точки  $t$  по кривой  $\mathcal{T}$  в зависимости от  $\tau$  задается соотношением  $t(\tau) = \mathcal{T} \cap L_+^{\tau - \delta}$ . Скорость движения точки  $t(\tau)$  по такому участку кривой  $\mathcal{T}$  определяется величиной производной

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\|t(\tau + \Delta\tau) - t(\tau)\|}{\Delta\tau}.$$

Пусть  $[\rho_1, \rho_2] \subset [0, \mathcal{R}]$  — участок постоянства функции  $\widehat{\varphi}(\rho)$ ,  $\rho_1 < \rho_2$ . График функции  $\widehat{\varphi}$  на этом участке лежит на луче  $L_+^\tau$  при некотором  $\tau$ . Чтобы объекту  $t$  следовать за лучом  $L_+^{\tau+0}$ , он должен преодолеть участок графика  $\text{gr } \varphi$ , связывающий точки  $(\widehat{\varphi}(\rho_i), \rho_i)$  ( $i = 1, 2$ ), с высокой скоростью, потратив на это некоторое время  $\delta > 0$ . В момент прибытия  $t$  в точку  $(\widehat{\varphi}, \rho_1)$  преследуемый объектом луч займет положение  $L_+^{\tau+\delta}$ . Итак, установлена

**Теорема 1.** *Для любой гладкой кривой  $\mathcal{T} \subset Y$ , соединяющей точку  $t_s$  с отрезком прямой  $L(f_{\tau_0}) \cap Y$ , найдется функция скорости движения объекта  $v_t \geq \min\{dt/d\tau : t \in \mathcal{T}\}$  такая, что объект  $t$ , начинающий движение из точки  $t_s$  одновременно со стартом наблюдателя  $f$  из точки  $f_{\tau_s}$ , не освещается наблюдателем ни в одной точке кривой  $\mathcal{T}$ .  $\square$*

**З а м е ч а н и е 1.** В момент  $\tau_0$  миниобъект достигает точки  $s$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Информация о кривой  $\mathcal{T}$  и минимальной угловой скорости вращения луча  $L_+^\tau$  позволяет построить функцию скорости  $v_t$  движения объекта.

**З а м е ч а н и е 3.** Теорема верна для кусочно-гладкой кривой  $\mathcal{T}$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Если коридор имеет сложную форму, то в качестве кривой  $\mathcal{T}$  можно взять кратчайшую кривую, соединяющую точку  $t_s$  и отрезок  $L(f_{\tau_0}) \cap Y$ , либо график функции

$$\min\{\varphi_\tau(\rho), \widehat{\varphi}(\rho), 0 \leq \rho \leq \mathcal{R}\}.$$

**4. Пример.** Приведем пример двух наблюдателей  $f^i$  ( $i = 1, 2$ ), расположенных по разные стороны коридора  $Y$ , которые держат коридор под наблюдением, но существуют траектории  $\mathcal{T} \subset Y$ , двигаясь по которым, объект  $t$  находится вне зоны видимости наблюдателей  $f^i$  ( $i = 1, 2$ ). Пусть  $s_1 = a$  — угловая точка на  $\partial G$ ,  $\rho(a, \partial_l Y) < \rho(a, \partial_r Y)$ , точка  $f_1^\tau$  движется по траектории  $\mathcal{T}_a$  от  $f_0^1$  к  $f_{\tau_0^a}^1$  против стрелки часов;  $s_2 = c$  — точка на выпуклой дуге  $C \subset \partial G$ ,  $\rho(c, \partial_r Y) < \rho(c, \partial_l Y)$ , точка  $f_2^\tau$  движется по траектории  $\mathcal{T}_c$  от  $f_0^2$  к  $f_{\tau_0^c}^2$  по стрелке часов. Точка  $\widehat{t} = t_{s_1, s_2} \in Y$  такова, что  $\|a - \widehat{t}\| = \|c - \widehat{t}\| = \mathcal{R}$ , и для некоторых  $\widehat{\tau}^a \in [0, \tau_0^a]$ ,  $\widehat{\tau}^c \in [0, \tau_0^c]$  имеем  $\widehat{t} \in L_+(\widehat{f}^1)$ ,  $\widehat{t} \in L_+(\widehat{f}^2)$ , где  $\widehat{f}^1 = f_{\widehat{\tau}^a}^1$ ,  $\widehat{f}^2 = f_{\widehat{\tau}^c}^2$ . Движение наблюдателей по своим траекториям  $\mathcal{T}_{s_1}$ ,  $\mathcal{T}_{s_2}$  порождает однопараметрические свойства лучей: для  $i = 1$  — это лучи  $L_+(f_\tau^1)$ ,  $\tau \in [0, \tau_0^a]$ , исходящие из точки  $a$ , для  $i = 2$  — лучи  $L_+(f_\tau^2)$ ,  $\tau \in [0, \tau_0^c]$ , касательные к дуге  $C$ , исходящие из точек касания. Обозначим  $\beta_1 = \widehat{\tau}^a$ ,  $\alpha_1 = \tau_0^a$ ,  $\beta_2 = \widehat{\tau}^c$ ,  $\alpha_2 = \tau_0^c$ ,  $\mathcal{L}^i = \{L_+(f_\tau^i), \tau \in [\beta_i, \alpha_i]\}$  — множество лучей  $L_+^\tau(f_\tau^i)$ , расположенных между лучами  $L_+(f_{\tau_{s_i}}^i)$  и  $L_+(f_{\tau_0^i}^i)$ . Определим кривую (см. рис. 4)

$$\widehat{\mathcal{T}} = \left\{ \widehat{t}(\lambda) = L_+(f_{\beta_1 + \lambda(\alpha_1 - \beta_1)}^1) \cap L_+(f_{\beta_2 + \lambda(\alpha_2 - \beta_2)}^2) : 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Наблюдатель  $f^i$  ( $i = 1, 2$ ), обнаружив на луче  $L_+(f_{\widehat{\tau}^i}^i)$  объект  $\widehat{t}$ ,  $|\widehat{t} - s_i| \leq \mathcal{R}$ , опасаясь миниобъекта, начинает двигаться со скоростью  $v_f > 0$  по траектории  $\mathcal{T}_{s_i}$  в “укрытие”. Объект за

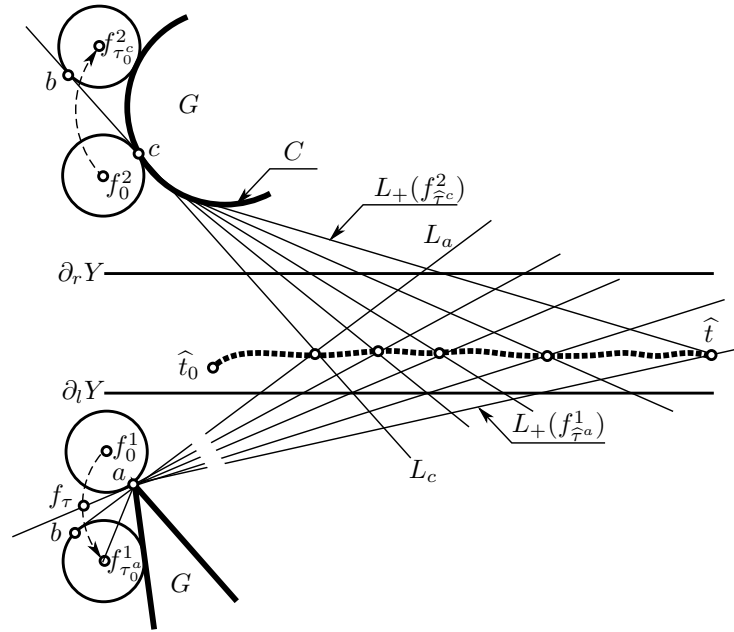


Рис. 4

время  $\tau_0$ , двигаясь по траектории  $\hat{T}$  с малым запаздыванием от точки  $\hat{t}(\lambda)$ , достигнет пункта  $\hat{t}_0 = L_+(f_{\tau_0}^1) \cap L_+(f_{\tau_0}^2)$  и далее следует по маршруту в отсутствие наблюдения. Некоторые участки кривой  $\hat{T}$  могут оказаться вне коридора  $Y$ , тогда объект обходит их по соответствующему участку границы коридора.

**5. Возможные позиции наблюдателя.** Из приведенных результатов следует, что возможность уклонения движущегося объекта от наблюдения зависит от позиции наблюдателя. Позиции наблюдателя в окрестности угловой точки и в окрестности выпуклой дуги с этой точки зрения эквивалентны. Направление движения объекта  $t$  по траектории  $\mathcal{T} \subset Y$  задается назначением левой  $\partial_l Y$  и правой  $\partial_r Y$  границ коридора  $Y$ . Далее будем различать позиции двух видов: *I* и *II*. Позиции определяются по расположению наблюдателя слева или справа от  $Y$ , по направлению движения (по или против часовой стрелки) наблюдателя по траектории  $\mathcal{T}_s$  с целью укрыться от миниобъекта (см. рис. 5):

- I*)  $\rho(s, \partial_l Y) < \rho(s, \partial_r Y)$  — движение против часовой стрелки;  
 $\rho(s, \partial_l Y) > \rho(s, \partial_r Y)$  — движение по часовой стрелке;
- II*)  $\rho(s, \partial_l Y) < \rho(s, \partial_r Y)$  — движение по часовой стрелке;  
 $\rho(s, \partial_l Y) > \rho(s, \partial_r Y)$  — движение против часовой стрелки.

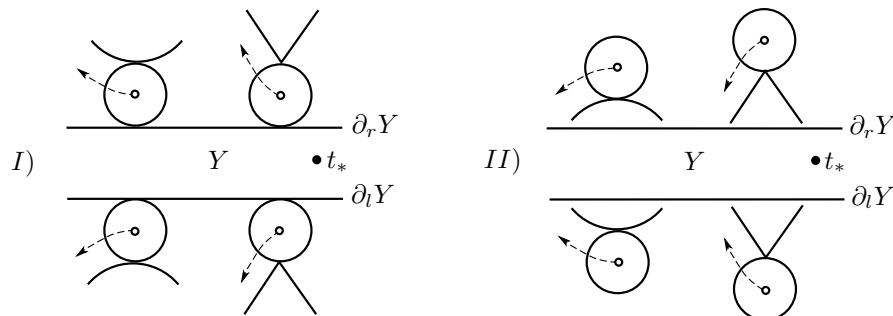


Рис. 5

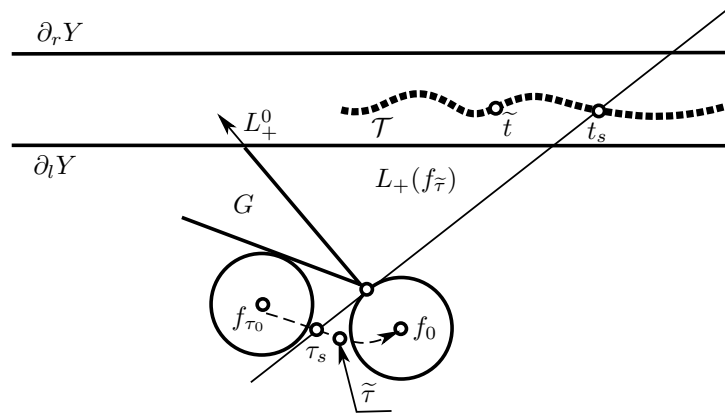


Рис. 6

Результаты п. 3, 4 касались наблюдателей в позиции вида  $I$ . Покажем, что в случае, когда наблюдатель занимает позицию  $II$ , ему удастся контролировать часть любой траектории  $\mathcal{T} \subset Y$ . Пусть наблюдатель  $f$  расположен в окрестности угловой точки  $s = a \in \partial G$ , находящейся в позиции  $II$  так, что

$$\rho(a, \partial_l Y) < \rho(a, \partial_r Y), \quad \text{и пусть } t_s \in \mathcal{T} \cap T(s), \quad \|s - t_s\| = \mathcal{R},$$

луч  $L_+^0 = \{a + \lambda(a - f_0) : \lambda \geq 0\}$  является касательным в вершине  $a$  к той стороне угла, для которой прямая  $L^0$  разделяет множество  $G \cap V_\delta(a)$  и точку  $t_s$  при малом  $\delta > 0$ . Кроме того, для некоторого  $\tau = \tau_s \in [0, \tau_0]$  точка  $t_s$  лежит на луче  $L_+(f_{\tau_s})$ .

В положении  $f_\tau \in \mathcal{T}_a$  наблюдаемая им область ограничена прямой  $L(f_\tau)$  и покрывает начальную часть траектории, включая точку  $t_s$ . При движении наблюдателя по траектории  $\mathcal{T}_a$  по стрелке часов эта область сокращается (см. рис. 6), и, соответственно, укорачивается наблюдаемая часть траектории  $\mathcal{T}$ . В начальный момент времени одновременно начинают движение наблюдатель  $f$  по траектории  $\mathcal{T}_a$ , а значит, и луч  $L_+(f_\tau)$  из положения  $L_+^0$  по часовой стрелке, и объект  $t$  по траектории  $\mathcal{T}$  из точки  $t_s$ . Пусть  $\tilde{\tau}$  — момент встречи объекта  $t$  с движущимся навстречу лучом  $L_+(f_\tau)$ ,  $0 \leq \tilde{\tau} \leq \tau_0$ , и  $\tilde{t} \in \mathcal{T} \cap L_+(f_{\tilde{\tau}})$  — ближайшая к  $t_s$  точка траектории. Дальнейшее движение объекта по траектории  $\mathcal{T}$  от точки  $\tilde{t}$  происходит вне зоны наблюдения. Аналогично рассматривается случай, когда наблюдатель расположен в окрестности выпуклой дуги. Установлена

**Теорема 2.** Пусть  $s \in A \cup C$  находится в позиции  $II$ ,  $\mathcal{T} \subset Y$  — траектория объекта  $t$ ,  $t_s \in \mathcal{T} \cap T(s)$ ,  $\|s - t_s\| = \mathcal{R}$ . Объект, миниобъект  $t$  и наблюдатель одновременно начинают движение:  $t$  — по траектории  $\mathcal{T}$  из точки  $t_s$ , миниобъект — в сторону  $s$ ,  $f$  — по траектории  $\mathcal{T}_s$  из положения  $f_0$ . Существует точка  $\tilde{t} = \tilde{t}(v_t, v_f)$  такая, что участок траектории  $\mathcal{T}$  от  $t_s$  до  $\tilde{t}$  находится в зоне видимости наблюдателя, а остальная часть траектории — вне ее.  $\square$

**З а м е ч а н и е 5.** Для слежения за объектом на оставшейся части траектории потребуется увеличить число наблюдателей  $II$ -й позиции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердышев В.И. Наблюдатели и движущийся объект в  $R^3$  // Докл. АН. 2017. Т. 476, № 5. С. 506–508. doi: 10.7868/S0869565217290059.
2. Бердышев В.И. Класс траекторий  $\mathbb{R}^3$ , наиболее удаленных от наблюдателей // Докл. АН. 2018. Т. 483, № 1. С. 22–24. doi: 10.31857/S086956520003403-6.

3. Попов А.А., Костоусов В.Б., Бердышев В.И. Траектория объекта, наиболее удаленная от наблюдателей // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1894: Proc. of the 48th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications” (Yekaterinburg, Russia, February 5 – February 11, 2017). 2017. С. 129–136. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1894>.

Поступила 25.08.2020

После доработки 23.10.2020

Принята к публикации 26.10.2020

Бердышев Виталий Иванович

академик РАН

научный руководитель

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г.Екатеринбург

e-mail: [bvi@imm.uran.ru](mailto:bvi@imm.uran.ru)

#### REFERENCES

1. Berdyshev V.I. Observers and moving object in  $\mathbb{R}^3$  space *Dokl. Math.*, 2017, vol. 96, no. 2, pp. 538–540. doi: 10.1134/S1064562417050246.
2. Berdyshev V.I. Class of trajectories in  $\mathbb{R}^3$  the most distant from observers *Dokl. Math.*, 2018, vol. 98, no. 3, pp. 652–654. doi: 10.1134/S1064562418070025.
3. Popov A.A., Kostousov V.B., Berdyshev V.I. The farthest from observers trajectory. CEUR Workshop Proceedings, vol. 1894. Proc. of the 48th International Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, February 5 – February 11, 2017, pp. 129–136. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1894> (in Russian) .

Received August 25, 2020

Revised October 23, 2020

Accepted October 26, 2020

**Funding Agency:** This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center.

*Vitalii Ivanovich Berdyshev*, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,  
e-mail: [bvi@imm.uran.ru](mailto:bvi@imm.uran.ru) .

Cite this article as: V. I. Berdyshev. An object moving in  $\mathbb{R}^2$  with a high-speed destructive miniobject and an unfriendly solid observer, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 76–82 .