ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ФУРЬЕ — ЧЕБЫШЕВА

М. Ш. Шабозов, О. А. Джурахонов

В пространстве $L_{2,\rho}$ функций двух переменных, суммируемых с квадратом на множестве $Q=[-1,1]^2$ с весом $\rho(x,y)=1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, получены точные неравенства типа Джексона — Стечкина, в которых величины наилучших полиномиальных приближений оцениваются сверху через $\mathcal{K}$-функционал Петре. Вычислены точные значения различных поперечников классов функций, задаваемых обобщенными модулями непрерывности и $\mathcal{K}$-функционалами. Также вычислены верхние грани модулей коэффициентов Фурье — Чебышева на рассматриваемых классах функций.

Ключевые слова: приближения, обобщенный модуль непрерывности, двойной ряд Фурье — Чебышева, оператор обобщенного сдвига.

M. Sh. Shabozov, O. A. Dzhurakhonov. Upper estimates for best mean-square approximations for some classes of bivariate functions by Fourier–Chebyshev sums.

In space $L_{2,\rho}$ of bivariate functions summable with square on set $Q=[-1,1]^2$ with weight $\rho(x,y)=1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ the sharp inequalities of Jackson–Stechkin type in which the best polynomial approximation estimated above by Peetre $\mathcal{K}$-functional were obtained. We also find the exact values of various widths of classes of functions defined by generalized modulus of continuity and $\mathcal{K}$-functionals. Also the exact upper bounds for modules of coefficients of Fourier — Tchebychev on considered classes of functions were calculated.

Keywords: mean-squared approximation, generalized modulus of continuity, Fourier — Tchebychev double series, translated operator.

MSC: 42A10, 41A17, 41A44

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-268-278

1. Введение

Вопрос о приближении данной функции ортогональными системами функций является одной из наиболее важных задач вычислительной математики и прикладного анализа. Хорошо известно, что при решении задач математической физики применяются спектральные методы, которые базируются на разложении в ряды Фурье по различным ортогональным системам. Известны многочисленные применения классических ортогональных многочленов в анализе, квантовой механике и математической статистике. Указанные вопросы наиболее полно изучены для функций одной переменной. Что же касается разложения функций двух (и более) переменных по ортогональным многочленам двух переменных, то кроме известных работ [1–5], укажем еще на монографию [6], где излагаются основные свойства ортогональных многочленов по двум переменным и свойства их рядов Фурье по этим многочленам. В [7] рассматривается вопрос о разложении функций двух переменных в двойные ряды Фурье по многочленам Чебышева, изучаются их скорости сходимости. В [8] вычислены точные верхние грани приближения функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье — Чебышева на некоторых классах функций.

В настоящей статье продолжим исследование в этом направлении, пользуясь точными результатами из [8], решим ряд экстремальных задач и вычислим значение поперечников некоторых классов функций двух переменных.

2. Основные понятия и обозначения

Приведем основные понятия и предварительные результаты, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Обозначим через $L_{2,\rho}$ пространство суммируемых с квадратом функций f двух переменных на множестве $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x, y \le 1\}$ с весом $\rho := \rho(x, y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, наделенное нормой

$$\|f\|_{2,\rho} := \|f\|_{L_{2,\rho}} = \left(\iint\limits_{(Q)} \rho(x,y) f^2(x,y)\,dxdy\right)^{1/2} < \infty.$$

В этом пространстве введем в рассмотрение оператор

$$\begin{aligned} F_h f(x,y) = \frac{1}{4}\Big[& f\big(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h,\ y\cos h + \sqrt{1-y^2}\sin h\big) \\ & + f\big(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h,\ y\cos h - \sqrt{1-y^2}\sin h\big) \\ & + f\big(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h,\ y\cos h + \sqrt{1-y^2}\sin h\big) \\ & + f\big(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h,\ y\cos h - \sqrt{1-y^2}\sin h\big)\Big], \end{aligned}$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига с шагом h. Следуя [7], определим разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h(f) := \Delta_h(f; x, y) = F_h f(x,y) - f(x,y) = (F_h - E) f(x,y),$$

$$\begin{aligned} \Delta_h^k(f) &:= \Delta\big(\Delta_h^{k-1}(f)\big) = \Delta_h\big(\Delta_h^{k-1}(f;\cdot,\cdot), x, y\big) \\ &= (F_h - E)^k f(x,y) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} F_h^i f(x,y), \end{aligned}$$

где

$$F_h^0 f(x,y) = f(x,y), \quad F_h^i f(x,y) = F_h\big(F_h^{i-1} f(x,y)\big) \quad (i = \overline{1,k},\ k \in \mathbb{N},\ 0 < h < 1)$$

и E — единичный оператор в $L_{2,\rho}$. Величину

$$\Omega_m(f,t)_{2,\rho} := \sup\big\{\|\Delta_h^m(f)\|_{2,\rho} \colon 0 < h \le t\big\}, \quad 0 < t < 1,$$

будем называть *обобщенным модулем непрерывности* m-го *порядка функции* $f \in L_{2,\rho}$. Далее мы предположим, что функция $f \in L_{2,\rho}$ имеет обобщенные частные производные в смысле Леви [9, с. 172]. Введем операторы

$$D_x := (1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y := (1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

и положим

$$D := (1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} := D_x + D_y$$

— дифференциальный оператор Чебышева второго порядка по переменным x и y. Рассмотрим следующий класс $L_{2,\rho}^{(r)}$ функций $f \in L_{2,\rho}$, имеющих обобщенные частные производные

$$\frac{\partial^k}{\partial x^{k-i}\partial y^i} f(x,y), \quad i = 0, 1, \dots, k; \quad k = 1, 2, \dots, 2r, \quad r \in \mathbb{N},$$

в смысле Леви, принадлежащих пространству $L_{2,\rho}$, для которых $\|D^r f\|_{2,\rho} < \infty$, где, как обычно, $D^0 f \equiv f$, $D^r f \equiv D(D^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x), \quad n = 1, 2, \dots ,$$

— система многочленов Чебышева первого рода, ортонормированная на $[-1, 1]$ с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Разложим функцию $f \in L_{2,\rho}$ в двойной ряд Фурье — Чебышева

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y), \tag{2.1}$$

где

$$c_{kl}(f) = \iint\limits_{(Q)} \rho(x, y) f(x, y) T_k(x) T_l(y)\, dxdy$$

— коэффициенты Фурье — Чебышева функции f, а равенство в (2.1) понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$ “круговых” частичных сумм

$$S_R(f; x, y) = \sum_{0 \le k^2 + l^2 < R^2} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y)$$

ряда (2.1) при $R \to \infty$. Пусть $E_R(f)_{2,\rho} := E_R(f)_{L_{2,\rho}} = \inf\big\{\|f - p_R\|_{2,\rho} : p_R \in \mathcal{P}_R\big\}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\rho}$ множеством $\mathcal{P}_R$ алгебраических полиномов вида

$$p_R(x, y) = \sum_{0 \le k^2 + l^2 < R^2} a_{kl} x^k y^l, \quad R > 0, \tag{2.2}$$

в пространстве $L_{2,\rho}$. Хорошо известно, что

$$E_R(f)_{2,\rho} := \inf\big\{\|f - p_R\|_{2,\rho} \colon p_R(x, y) \in \mathcal{P}_R\big\} = \|f - S_R(f)\|_{2,\rho} = \Bigg\{\sum_{k^2 + l^2 \ge R^2} c_{kl}^2(f)\Bigg\}^{1/2}. \tag{2.3}$$

В [7] доказано, что для произвольной $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ в указанном выше смысле сходимости в $L_{2,\rho}$ имеет место равенство

$$\|\Delta_h^m(D^r f)\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \cos kh \cos lh)^{2m} (k^2 + l^2)^{2r} c_{kl}^2(f). \tag{2.4}$$

Везде далее будем рассматривать лишь такие функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, для которых $D^r f \not\equiv 0$.

В [8] доказано, что

$$E_R^2(D^r f)_{2,\rho} = \sum_{k^2 + l^2 \ge R^2} c_{kl}^2(D^r f) = \sum_{k^2 + l^2 \ge R^2} (k^2 + l^2)^{2r} c_{kl}^2(f),$$

и при любом $r \in \mathbb{Z}_+$, в предположении что $D^r f \notin \mathcal{P}_R$, справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_R(f)_{2,\rho}}{E_R(D^r f)_{2,\rho}} = \frac{1}{R^{2r}}. \tag{2.5}$$

При вычислении точного значения поперечников далее нам понадобится следующая

Теорема A [8, теорема 5]. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $R \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le \pi/R$, $q(t)$ — произвольная неотрицательная суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r} E_R(f)_{2,\rho}}{\left(\displaystyle\int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\rho}\, q(t)\, dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\displaystyle\int_0^h (1 - \cos Rt)^{pm} q(t)\, dt\right)^{1/p}}. \tag{2.6}$$

3. Применение $\mathcal{K}$-функционала

Теория аппроксимации функций основана на одной из фундаментальных идей математики — замене сложных математических формул более простыми и удобными в приложениях. Эта идея стимулирует развитие математики в целом и часто приводит к неожиданным результатам. Одна из наиболее ярких реализаций указанной идеи основана на $\mathcal{K}$-функционале Петре, нашедшем применение при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций; см., например, [10; 11] и работу одного из авторов (Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона — Стечкина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 292–308). Определим в рассматриваемом нами случае $\mathcal{K}$-функционал

$$\mathcal{K}(f,t^m)_{2,\rho} := \mathcal{K}\big(f,t^m;L_{2,\rho};L_{2,\rho}^{(m)}\big) = \inf\big\{\|f-g\|_{2,\rho} + t^m\|D^m g\|_{2,\rho}\colon g\in L_{2,\rho}^{(m)}\big\}, \tag{3.1}$$

где $m\in\mathbb{N}$, $0<t<1$. Представляет определенный интерес вычисление точных значений экстремальных величин, содержащих $\mathcal{K}$-функционал (3.1).

Теорема 1. *Пусть $m,r\in\mathbb{N}$, $R\in\mathbb{R}_+$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r}E_R(f)_{2,\rho}}{\mathcal{K}(D^r f, R^{-2m})_{2,\rho}} = 1. \tag{3.2}$$

Доказательство. При доказательстве леммы 1 из [8] мы установили, что для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}$ имеет место неравенство

$$E_R(f)_{2,\rho} \le \frac{1}{R^{2r}} E_R(D^r f)_{2,\rho}.$$

Отсюда получаем

$$E_R(f)_{2,\rho} \le \frac{1}{R^{2r}}\|D^r f - S_R(g)\|_{2,\rho}, \tag{3.3}$$

где

$$S_R(g) := S_R(g;x,y) = \sum_{0<k^2+l^2<R^2} c_{kl}(g)T_k(x)T_l(y)$$

— “круговые” частичные суммы R-го порядка ряда Фурье — Чебышева произвольной функции $g\in L_{2,\rho}^{(m)}$ по ортонормированной в области Q с весом ρ системе полиномов $\{T_k(x)T_l(y)\}_{k,l\in\mathbb{Z}_+}$.

В силу равенства (2.5) для произвольной функции $g\in L_{2,\rho}^{(m)}$ имеем

$$\|g-S_R(g)\|_{2,\rho} = E_R(g)_{2,\rho} \le \frac{1}{R^{2m}}E_R(D^m g)_{2,\rho} \le \frac{1}{R^{2m}}\|D^m g\|_{2,\rho}. \tag{3.4}$$

Из неравенства (3.3), учитывая (3.4), получаем

$$E_R(f)_{2,\rho} \le \frac{1}{R^{2r}}\|D^r f - S_R(g)\|_{2,\rho} \le \frac{1}{R^{2r}}\big(\|D^r f - g\|_{2,\rho} + \|g-S_R(g)\|_{2,\rho}\big)$$

$$\le \frac{1}{R^{2r}}\Big(\|D^r f - g\|_{2,\rho} + \frac{1}{R^{2m}}\|D^m g\|_{2,\rho}\Big). \tag{3.5}$$

Так как левая часть неравенства (3.5) не зависит от $g\in L_{2,\rho}^{(m)}$, то, переходя в правой части (3.5) к нижней грани по всем функциям $g\in L_{2,\rho}^{(m)}$ и используя определение $\mathcal{K}$-функционала (3.1), имеем

$$E_R(f)_{2,\rho} \le R^{-2r}\mathcal{K}(D^r f, R^{-2m})_{2,\rho}.$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r}E_R(f)_{2,\rho}}{\mathcal{K}(D^r f, R^{-2m})_{2,\rho}} \le 1. \tag{3.6}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, стоящей в левой части неравенства (3.6), вводим в рассмотрение произвольный полином вида

$$P_R(x,y) = \sum_{0\le k^2+l^2\le R^2} c_{kl}(P_R)T_k(x)T_l(y). \tag{3.7}$$

Применяя к полиному (3.7) оператор D^r, в силу линейности этого оператора и формул [7]

$$DT_k(x)T_l(y) = -(k^2+l^2)T_k(x)T_l(y), D^rT_k(x)T_l(y) = (-1)^r(k^2+l^2)^rT_k(x)T_l(y), r\in\mathbb{N},$$

запишем

$$D^rP_R(x,y) = \sum_{k^2+l^2\le R^2} c_{kl}(P_R)D^rT_k(x)T_l(y) = \sum_{k^2+l^2\le R^2}(-1)^r(k^2+l^2)^r c_{kl}(P_R)T_k(x)T_l(y). \tag{3.8}$$

Применяя к соотношению (3.8) равенство Парсеваля и имея ввиду, что последовательность натуральных чисел $\{(k^2+l^2)^{2r}\}$ монотонно возрастает, запишем

$$\|D^rP_R\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k^2+l^2\le R^2}(k^2+l^2)^{2r}c_{kl}^2(P_R) \le R^{4r}\|P_R\|_{2,\rho}^2. \tag{3.9}$$

Полагая в формуле (3.1) для $\mathcal{K}$-функционала сперва $g\equiv 0$, а затем $g = P_R$ для $\mathcal{K}$-функционала $\mathcal{K}(P_R, t^m)_{2,\rho}$, получаем оценки

$$\mathcal{K}(P_R, t^m)_{2,\rho} \le \begin{cases} \|P_R\|_{2,\rho}, \\ t^m\|D^m(P_R)\|_{2,\rho}, \quad 0<t<1. \end{cases} \tag{3.10}$$

Заметим, что для функции $f_1(x,y) = T_R(x)T_0(y)$ имеем

$$D^{r+m}f_1(x,y) = (-1)^{r+m}R^{2(r+m)}T_R(x)T_0(y). \tag{3.11}$$

Пользуясь равенством (3.11) и вторым из неравенств (3.10), получаем

$$\mathcal{K}\big(D^rf_1, R^{-2m}\big)_{2,\rho} \le R^{-2m}\|D^{r+m}f_1\|_{2,\rho} = R^{-2m}R^{2(r+m)} = R^{2r}.$$

Используя полученное неравенство и тот факт, что $E_R(f_1)_{2,\rho} = 1$, запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{R^{2r}E_R(f)_{2,\rho}}{\mathcal{K}\left(D^rf, R^{-2m}\right)_{2,\rho}} \ge \frac{R^{2r}E_R(f_1)_{2,\rho}}{\mathcal{K}\left(D^rf_1, R^{-2m}\right)_{2,\rho}} = \frac{R^{2r}}{\mathcal{K}\left(D^rf_1, R^{-2m}\right)_{2,\rho}} \ge 1. \tag{3.12}$$

Сопоставляя оценку сверху (3.6) и оценку снизу (3.12), получаем равенство (3.2).

Теорема доказана. □

4. Точные значения N-поперечников некоторых классов функций

Для изложения дальнейших результатов нам понадобится ряд определений и обозначений. Пусть S — единичный шар в $L_{2,\rho}$; $\Lambda_N \subset L_{2,\rho}$ — N-мерное подпространство; $\Lambda^N \subset L_{2,\rho}$ — подпространство коразмерности N; Λ: $L_{2,\rho} \to \Lambda_N$ — непрерывный линейный оператор;

$\Lambda^{\perp}\colon L_{2,\rho}\to\Lambda_N$ — непрерывный оператор линейного проектирования, $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\rho}$. Величины

$$b_N(\mathfrak{M},L_{2,\rho})=\sup\big\{\sup\{\varepsilon>0;\ \varepsilon S\cap\Lambda_{N+1}\subset\mathfrak{M}\}:\Lambda_{N+1}\subset L_{2,\rho}\big\},$$

$$d^N(\mathfrak{M},L_{2,\rho})=\inf\big\{\sup\{\|f\|_{2,\rho}\colon f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^N\}:\Lambda^N\subset L_{2,\rho}\big\},$$

$$d_N(\mathfrak{M},L_{2,\rho})=\inf\big\{\sup\{\inf\{\|f-g\|_{2,\rho}\colon g\in\Lambda_N\}:f\in\mathfrak{M}\}:\Lambda_N\subset L_{2,\rho}\big\},$$

$$\delta_N(\mathfrak{M},L_{2,\rho})=\inf\big\{\inf\{\sup\{\|f-\Lambda f\|_{2,\rho}\colon f\in\mathfrak{M}\}:\Lambda L_{2,\rho}\subset\Lambda_N\}:\Lambda_N\subset L_{2,\rho}\big\},$$

$$\Pi_N(\mathfrak{M},L_{2,\rho})=\inf\big\{\inf\{\sup\{\|f-\Lambda^{\perp}f\|_{2,\rho}\colon f\in\mathfrak{M}\}\colon\Lambda^{\perp}L_{2,\rho}\subset\Lambda_N\}\colon\Lambda_N\subset L_{2,\rho}\big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным N-поперечниками* множества $\mathfrak{M}$ в пространстве $L_{2,\rho}$.

Мы будем пользоваться монотонностью указанных поперечников по N, а также тем фактом, что в гильбертовом пространстве для них выполняются соотношения [12; 13]

$$b_N(\mathfrak{M};L_{2,\rho})\le d^N(\mathfrak{M};L_{2,\rho})\le d_N(\mathfrak{M};L_{2,\rho})=\delta_N(\mathfrak{M};H_2)=\Pi_N(\mathfrak{M};L_{2,\rho}).\qquad(4.1)$$

Приведем определение классов функций, для которых вычислим значения приведенных выше N-поперечников. Пусть $m,r\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$, $0<H<1$, $q\ge 0$ — суммируемая на интервале $(0,H)$ не эквивалентная нулю измеримая функция. Через $HW^r_{2,p}(\Omega_m,q)$ обозначим класс, состоящий из функций $f\in L^{(r)}_{2,\rho}$, у которых D^rf удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^H\Omega^p_m(D^rf,t)q(t)\,dt\le 1.$$

В формулировках далее излагаемых теорем, следуя [7], полагаем

$$\overline{m}(R)=\operatorname{card}\big\{(k,l)\colon k+1,l+1\in\mathbb{N},\ 0\le k^2+l^2\le R^2\big\},$$

$$m(R)=\operatorname{card}\big\{(k,l)\colon k+1,l+1\in\mathbb{N},\ 0\le k^2+l^2<R^2\big\},$$

где $k,l\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема 2. *Пусть $R,m,N\in\mathbb{N}$, $r\in Z_+$, $\lambda=0,1,2,\dots,\overline{m}(R)-m(R)-1$; $0<p\le 2$, $0<HR\le\pi$, $q\ge 0$ — суммируемая на интервале $(0,H)$ не эквивалентная нулю измеримая функция. Тогда справедливы равенства*

$$\gamma_{m(R)+\lambda}\big(HW^r_{2,p}(\Omega_m,q);L_{2,\rho}\big)=E_R\big(HW^r_{2,p}(\Omega_m,q)\big)_{2,\rho}=R^{-2r}\left(\int\limits_0^H(1-\cos Rt)^{pm}q(t)\,dt\right)^{-1/p},\qquad(4.2)$$

где $\gamma_\nu(\cdot)$ — любой из перечисленных выше ν-поперечников, а

$$E_R\big(HW^r_{2,p}(\Omega_m,q)\big)_{L_{2,\rho}}:=\sup\big\{E_R(f)_{L_{2,\rho}}:f\in HW^r_{2,p}(\Omega_m,q)\big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как круговая частичная сумма R-го порядка

$$S_R(f;x,y):=\sum_{k^2+l^2<R^2}c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y)$$

ряда Фурье — Чебышева функции $f\in L_{2,\rho}$ содержит $m(R)$ линейно независимых элементов, то, пользуясь неравенством

$$E_R(f)_{2,\rho}\le R^{-2r}\left(\int\limits_0^H(1-\cos Rt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1/p},$$

вытекающим из (2.6) и верным для любой функции $f \in HW^r_{2,p}(\Omega_m, q)$, а также соотношениями (4.1) и определением класса $HW^r_{2,p}(\Omega_m, q)$, для любого $\lambda = 0, 1, 2, \dots, \overline{m}(R) - m(R) - 1$ получаем оценку сверху

$$\gamma_{m(R)+\lambda}\big(HW^r_{2,p}(\Omega_m, q); L_{2,\rho}\big) \le d_{m(R)+\lambda}\big(HW^r_{2,p}(\Omega_m, q); L_{2,\rho}\big)$$

$$\le E_R\big(HW^r_{2,p}(\Omega_m, q)\big)_{L_{2,\rho}} \le R^{-2r}\left(\int_0^H (1 - \cos Rt)^{pm} q(t)\, dt\right)^{-1/p}. \tag{4.3}$$

Для получения оценки снизу указанных выше N-поперечников в подпространстве $\mathcal{P}_{m(R)+\lambda}$ алгебраических многочленов вида (2.2) рассмотрим многочлен

$$P_R(x, y) = \sum_{k^2+l^2 \le R^2} a_{kl}(P_R) T_k(x) T_l(y) \tag{4.4}$$

и покажем, что шар

$$S_{\overline{m}(R)} := \left\{ P_R \in \mathcal{P}_{\overline{m}(R)} :\ \|P_R\|_{2,\rho} \le R^{-2r}\left(\int_0^H (1 - \cos Rt)^{pm} q(t)\, dt\right)^{-1/p} \right\}$$

принадлежит классу $HW^r_{2,p}(\Omega_m, q)$. Учитывая формулу (3.8), из равенства (2.4) получаем

$$\Omega_m(D^r P_R, t)_{2,\rho} = \left\{ \sum_{0 \le k^2+l^2 \le R^2} (1 - \cos kt \cos lt)^{2m} \left(k^2 + l^2\right)^{2r} c^2_{kl}(P_R) \right\}^{1/2}$$

$$\le R^{2r}(1 - \cos Rt)^m \|P_R\|_{2,\rho}. \tag{4.5}$$

Левую и правую часть неравенства (4.5), возведя в степень p $(0 \le p \le 2)$, умножим на функцию q и интегрируем обе части полученного неравенства по переменной t в пределах от 0 до H. В итоге будем иметь

$$\int_0^H \Omega^p_m(D^r P_R, t)_{2,\rho} q(t)\, dt \le R^{2pr} \|P_R\|^p_{2,\rho} \int_0^H (1 - \cos Rt)^{pm} q(t)\, dt \le 1.$$

Этим включение $S_{\overline{m}(R)} \subset HW^r_{2,p}(\Omega_m, q)$ доказано. Имея в виду, что

$$\overline{m}(R) \le m(R) + 2, m(R) + \lambda \le \overline{m}(R) - 1, \lambda = 0, 1, 2, \dots, \overline{m}(R) - m(R) - 1,$$

и учитывая соотношения (4.1) и определение бернштейновского N-поперечника, получаем

$$\gamma_{m(R)+\lambda}\big(HW^r_{2,p}(\Omega_m, q); L_{2,\rho}\big) \ge \gamma_{\overline{m}(R)-1}\big(HW^r_{2,p}(\Omega_m, q); L_{2,\rho}\big)$$

$$\ge b_{\overline{m}(R)-1}\big(HW^r_{2,p}(\Omega_m, q); L_{2,\rho}\big) \ge b_{\overline{m}(R)-1}\big(S_{\overline{m}(R)}; L_{2,\rho}\big)$$

$$\ge R^{-2r}\left(\int_0^H (1 - \cos Rt)^{pm} q(t)\, dt\right)^{-1/p}. \tag{4.6}$$

Сопоставляя оценку сверху (4.3) и оценку снизу (4.6), получаем требуемые равенства (4.2). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $R \in \mathbb{N}$, $k+l = 1, 2, \dots, \overline{m}(R) - m(R) - 1$; $r \in \mathbb{Z}_+$, $H \in (0, 1)$, $0 < p \le 2$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup\big\{|c_{kl}(f)| : f \in HW^r_{2,p}(\Omega_m, q)\big\} = R^{-2r}\left(\int_0^H (1 - \cos Rt)^{pm} q(t)\, dt\right)^{-1/p}. \tag{4.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}$ и $R \in \mathbb{N}$ имеем

$$c_{kl}(f) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \rho(x,y) f(x,y) T_k(x) T_l(y)\, dxdy$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \rho(x,y)\big(f(x,y) - S_R(f;x,y)\big) T_k(x) T_l(y)\, dxdy$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \big\{\rho(x,y)^{1/2}\big(f(x,y) - S_R(f;x,y)\big)\big\}\big\{\rho(x,y)^{1/2} T_k(x) T_l(y)\big\}\, dxdy, \tag{4.8}$$

где $S_R(f)$ — частичная круговая сумма R-го порядка функции $f \in L_{2,\rho}^{(m)}$. Используя неравенство Коши — Буняковского и формулу (2.3), из равенства (4.8) получаем

$$|c_{kl}(f)| \le \|f(x,y) - S_R(f)\|_{2,\rho} = E_R(f)_{2,\rho}. \tag{4.9}$$

Из неравенства (4.9), учитывая (4.2), получаем оценку сверху

$$\sup\big\{|c_{kl}(f)|:\ f \in HW_{2,p}^r(\Omega_m, q)\big\} \le E_R\big(HW_{2,p}^r(\Omega_m, q)\big)$$

$$= R^{-2r}\left(\int\limits_0^H (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\, dt\right)^{-1/p}. \tag{4.10}$$

Легко показать, что функция

$$\widetilde{f}(x,y) := R^{-2r}\left(\int\limits_0^H (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\, dt\right)^{-1/p} T_R(x) T_0(y)$$

принадлежит шару $S_{\overline{m}(R)} \subset HW_{2,p}^r(\Omega_m, q)$, а потому функция $\widetilde{f} \in HW_{2,p}^r(\Omega_m, q)$. Следовательно,

$$\sup\big\{|c_{kl}(f)|: f \in HW_{2,p}^r(\Omega_m, q)\big\} \ge |c_{kl}(\widetilde{f})| = R^{-2r}\left(\int\limits_0^H (1-\cos Rt)^{pm} q(t)\, dt\right)^{-1/p}. \tag{4.11}$$

Равенство (4.7) является следствием неравенств (4.10) и (4.11).

Следствие доказано. □

Неубывающая на $(0,\infty)$ функция Φ называется *k-мажорантой* [14, с. 25], если функция $t^{-k}\Phi(t)$ не возрастает на $(0,\infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \to 0$ при $t \to 0$. При $k = 1$ функцию Φ называют *мажорантой*.

Через $W_{2,\rho}^r(\mathcal{K}_m, \Phi)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N})$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}^r$, у которых $D^r f$ удовлетворяет условию $\mathcal{K}(D^r f, t^m) \le \Phi(t^m)$ для любого $t \in (0,1]$. В этом определении класса Φ — некоторая мажоранта и $L_{2,\rho}^0 \equiv L_{2,\rho}$, $W_{2,\rho}^0(\mathcal{K}_m, \Phi) \equiv W_{2,\rho}(\mathcal{K}_m, \Phi)$.

Теорема 3. *Пусть Φ — некоторая мажоранта, определяющая класс функций $W_{2,\rho}^r(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольного $R \in \mathbb{N}$ и $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \overline{m}(R) - m(R) - 1$, справедливы равенства*

$$\gamma_{m(R)+\lambda}\big(W_{2,\rho}^r(\mathcal{K}_m; \Phi); L_{2,\rho}\big) = E_R\big(W_{2,\rho}^r(\mathcal{K}_m; \Phi)\big)_{2,\rho} = R^{-2r}\Phi(R^{-2m}),$$

где $\gamma_\nu(\cdot)$ — любой из перечисленных выше ν-поперечников.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (3.6) и соотношения (4.1) между всеми рассматриваемыми нами поперечниками вытекает оценка сверху

$$\gamma_{m(R)+\lambda}\big(W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi);L_{2,\rho}\big)\le d_{m(R)+\lambda}\big(W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi);L_{2,\rho}\big)$$
$$\le E_R\big(W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi)\big)_{2,\rho}=R^{-2r}\Phi(R^{-2m}).$$

Для нахождения оценок снизу перечисленных выше N-поперечников в соответствии с соотношениями (4.1) достаточно найти оценку снизу бернштейновского N-поперечника класса $W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi)$ в $L_{2,\rho}$. С этой целью в подпространстве $\mathcal{P}_{\overline{m}(R)}$ многочленов вида (4.4) введем в рассмотрение шар

$$\sigma_{\overline{m}(R)}:=\big\{P_R\in\mathcal{P}_{\overline{m}(R)}:\ \|P_R\|_{2,\rho}\le R^{-2r}\Phi(R^{-2m})\big\}$$

и, как и в теореме 2, докажем включение $\sigma_{\overline{m}(R)}\subset W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi)$.

Поскольку функция Φ является мажорантой, при любых $0<\tau_1\le\tau_2\le 1$ имеем

$$\Phi(\tau_1)\tau_2\ge\Phi(\tau_2)\tau_1. \tag{4.12}$$

В неравенстве (4.12), полагая $\tau_1=t_1^m,\ \tau_2=t_2^m$, где $0<t_1\le t_2\le 1$, получаем

$$\Phi(t_1^m)t_2^m\ge\Phi(t_2^m)t_1^m. \tag{4.13}$$

Чтобы установить справедливость включения $\sigma_{\overline{m}(R)}\subset W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi)$, где $0<t\le 1$, нужно доказать, что для любого $P_R\in\sigma_{\overline{m}(R)}$ выполняется неравенство

$$\mathcal{K}(D^rP_R,t^m)\le\Phi(t^m),\quad 0<t\le 1.$$

Пусть сначала $0<t\le 1/R^2$. Используя неравенство (4.13), где $t_1:=t$ и $t_2:=1/R^2$, а также применяя неравенство (3.10) с учетом (3.9), получаем

$$\mathcal{K}\left(D^rP_R,t^m\right)_{2,\rho}\le t^m\|D^{r+m}P_R\|_{2,\rho}\le t^mR^{2(r+m)}\|P_R\|_{2,\rho}$$
$$\le t^mR^{2(r+m)}R^{-2r}\Phi(R^{-2m})=t^mR^{2m}\Phi(R^{-2m})\le\Phi(t^m). \tag{4.14}$$

Пусть теперь $1/R^2\le t\le 1$. Тогда, используя неравенства (3.10), (3.9), а также учитывая, что Φ является неубывающей, имеем

$$\mathcal{K}\big(D^rP_R,t^m\big)_{2,\rho}\le\|D^rP_R\|_{2,\rho}\le R^{2r}\|P_R\|_{2,\rho}\le\Phi(R^{-2m})\le\Phi(t^m). \tag{4.15}$$

Таким образом, из определения класса $W^r_{2,\rho}(K_m,\Phi)$ и неравенств (4.14) и (4.15) вытекает, что $\sigma_{\overline{m}(R)}\subset W^r_{2,\rho}(K;\Phi)$. Но тогда согласно соотношениям (4.1) и определению бернштейновского N-поперечника, получим оценку снизу

$$\gamma_{\overline{m}(R)}\big(W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi);L_{2,\rho}\big)\ge\gamma_{m(R)+\lambda}\big(W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi);L_{2,\rho}\big)$$
$$\ge b_{m(R)+\lambda}\big(W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi);L_{2,\rho}\big)\ge b_{m(R)+\lambda}(\sigma_{\overline{m}};L_{2,\rho})\ge R^{-2r}\Phi(R^{-2m}). \tag{4.16}$$

Сравнивая оценку сверху (4.15) и оценку снизу (4.16), завершаем доказательство теоремы. □

В качестве следствия из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $R\in\mathbb{N}$, $k+l=0,1,2,\ldots,\overline{m}(R)-m(R)-1$; *и* Φ *— заданная мажоранта, определяющая класс функций* $W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi)$, *где* $r\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{N}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup\big\{|c_{kl}(f)|\colon f\in(W^r_{2,\rho}(\mathcal{K}_m;\Phi))\big\}=R^{-2r}\Phi(R^{-2m}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о данного следствия повторяет схему доказательства следствия 1, а потому здесь не приводится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Физматгиз, 1983. 384 р.
2. **Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Шкерстена А.Я.** Применение полиномов Чебышева в численном анализе. Рига: Зинатне, 1984 . 240 с.
3. **Beerends R.I.** Chebyshev polynomials in several variables and the radial part of the Laplace–Beltrami operator // Trans. Amer. Math. Sec., 1991. Vol. 328, no. 2. P. 1951–1961. doi: 10.1090/S0002-9947-1991-1019520-3 .
4. **Lidl R.** Tschebyscheff polynome in mehreren Variablen // J. reine und angew. Math. 1975. Bd. 273. S. 178–198. doi: 10.1515/crll.1975.273.178 .
5. **Ricci P.E.** I polynomi di Tchbycheff in piu variabli // Rend. Math. Appl. 1978. Vol. 11, no. 2. P. 295–327.
6. **Суетин П.К.** Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988. 384 с.
7. **Абилов В.А., Керимов М.К.** Об оценках остаточных членов кратных рядов Фурье — Чебышева и кубатурных формул чебышевского типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 5. С. 643–663.
8. **Джурахонов О. А.** Приближение функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье — Чебышева в $L_{2,\rho}$ // Владикавказ. мат. журн. 2020. Т. 22, вып 2. С. 5–17.
9. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теории вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
10. **Вакарчук С.Б., Швачко А.В.** О наилучшей аппроксимации в среднем а алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. мат. журн. 2013. Т. 65, № 12. С. 1604–1621.
11. **Вакарчук С.Б.** Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева—Эрмита и поперечники функциональных классов // Мат. заметки. 2014. Т. 95, вып. 5. С. 666–684.
12. **Pinkus A.** n-Widths in approximation theory. Berlin: Springer–Verlag, 1985. 294 p.
13. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
14. **Шевчук И.А.** Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка, 1992. 225 с.

Поступила 08.08.2020
После доработки 16.11.2020
Принята к публикации 23.11.2020

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
академик НАН Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет
г. Душанбе,
e-mail: shabozov@mail.ru

Джурахонов Олимджон Акмалович
зав. кафедрой функционального анализа и дифференциальных уравнений
Таджикский национальный университет
г. Душанбе
e-mail: olim1974@mail.ru

REFERENCES

1. Paszkowski S. *Vychislitel'nye primenenija mnogochlenov i rjadov Chebyshjova* [Numerical applications of Chebyshev polynomials and series], translation from Polish to Russian, Moscow: Nauka Publ., 1983, 384 p.
2. Vasil'ev N.I., Klokov Yu.A., Shkerstena A.Ya. *Primenenie polinomov Chebysheva v chislennom analize* [The application of Chebyshev polynomials in numerical analysis]. Riga: Zinatne Publ., 1984. 240 p.

3. Beerends R.I. Chebyshev polynomials in several variables and the radial part of the Laplace — Beltrami operator. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1991, vol. 328, no. 2, pp. 1951–1961. doi: 10.1090/S0002-9947-1991-1019520-3 .
4. Lidl R. Tschebyscheff polynome in mehreren Variablen. *J. reine und angew. Math.,* 1975, vol. 273, pp. 178–198. doi: 10.1515/crll.1975.273.178 .
5. Ricci P.E. I polynomi di Tchbycheff in piu variabli. *Rend. Math. Appl.*, 1978, vol. 11, no. 2, pp. 295–327.
6. Suetin P.K. *Ortogonalnye mnogochleny po dvum peremennym* [Orthogonal polynomials in two variables]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 384 p.
7. Abilov V.A., Kerimov M.K. Estimates of residual terms of multiple Fourier–Chebyshev series and the Chebyshev type cubature formulas. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003, vol. 43, no. 5, pp. 613–632.
8. Jurakhonov O.A. Approximation of bivariate functions by Fourier–Tchebychev “circular” sums in $L_{2,\rho}$. *Vladikavkaz. Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 5–17. doi: 10.46698/n6807-7263-4866-r .
9. Nikol’skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems.* Berlin; N Y: Springer-Verlag, 1975, 420 p. doi: 10.1007/978-3-642-65711-5 . Original Russian text (2nd ed.) published in Nikol’skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Moscow: Nauka Publ., 1977, 480 p.
10. Vakarchuk S.V., Shvachko A.V. On the approximation in the mean with the Chebyshev — Hermite weight by algebraic polynomials on the real axis. *Ukrainian Math. J.*, 2013, vol. 65, no. 12, pp. 1774–1792. doi: 10.1007/s11253-014-0897-8 .
11. Vakarchuk S.V. Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev — Hermite weight and widths of function classes. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, no. 5, pp. 599–614. doi: 10.1134/S0001434614050046 .
12. Pinkus A. *n-Widths in approximation theory.* Berlin: Springer–Verlag, 1985, 294 p. doi: 10.1007/978-3-642-69894-1 .
13. Tichomirov V.M. *Nekotorye voprosy teorii priblizhenii* [Some questions in approximation theory]. Moscow: Izdat. Moskov. Univ., 1976, 304 p.
14. Shevchuk I.A. *Priblizhenie mnogochlenami i sledy nepreryvnykh na otrezke funktsii* [Approximation by Polynomials and Traces of the Functions Continuous on an Interval]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1992, 225 p.

Received August 08, 2020
Revised November 16, 2020
Accepted November 23, 2020

Mirgand Shabozovich Shabozov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., member of Academy of NAN Tajikistan, Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan,
e-mail: shabozov@mail.ru .

Olimjon Akmalovich Jurakhonov, Tajik National University, Dushanbe, Associate Professor of the Department of Functional Analysis and Differential Equations, 734025 Republic of Tajikistan,
e-mail: olim1974@mail.ru .

Cite this article as: M. Sh. Shabozov, O. A. Dzhurakhonov. Approximation in the mean of some classes of bivariate functions by Fourier–Chebyshev sums, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 268–278 .