ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 517.518.832

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ НА МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ[1]

Н. И. Черных

В данной работе авторская схема конструкции кратно масштабного анализа (КМА) на сфере в $\mathbb{R}^3$ относительно сферических координат, опубликованная в 2019 г., распространена на сферы в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). При этом, в отличие от других работ, используются лишь периодические всплески на оси и их тензорные произведения. Исследованы аппроксимативные свойства только всплесков, построенных на базе простейших одномерных всплесков типа Котельникова — Мейера с компактным носителем их преобразований Фурье. Реализация идеи гладкого продолжения функций со сферы до 2π-периодических в полярных координатах аналитически (без сложной геометрической интерпретации, проделанной автором ранее в $\mathbb{R}^3$) оказалась очень простой.

Ключевые слова: всплески, масштабирующие функции, аппроксимация.

N. I. Chernykh. Periodic wavelets on a multidimensional sphere and their application for function approximation.

The author's scheme for constructing a multiresolution analysis on a sphere in $\mathbb{R}^3$ with respect to the spherical coordinates, which was published in 2019, is extended to spheres in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). In contrast to other papers, only periodic wavelets on the axis and their tensor products are used. Approximation properties are studied only for the wavelets based on the simplest scalar wavelets of Kotel'nikov–Meyer type with the compact support of their Fourier transforms. The implementation of the idea of a smooth continuation of functions from a sphere to 2π-periodic functions in the polar coordinates analytically (without the complicated geometric interpretation made by the author earlier in $\mathbb{R}^3$) turned out to be very simple.

Keywords: wavelet, scaling function, approximation.

MSC: 42A10, 42B35, 65T60.

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-255-267

Введение

В данной работе, как и в [1], для представления функций на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ ($n \geq 3$) используются сферическая система координат $(\overline{\vartheta}, \varphi) = (\vartheta_1, \vartheta_1 2, \ldots, \vartheta_{n-2}, \varphi)$, соответствующая сфере при $(\overline{\vartheta}, \varphi) \in [0,\pi]^{n-1} \times [0, 2\pi)$, равномерные сетки по всем таким переменным с шагом $h = 2\pi/2^j$ ($j \in \mathbb{N}$), интерполяционные периодические всплески Мейера и интерполяционно-ортогональные всплески, представленные в работах [2; 3]. Здесь и в [1] функции $F(\overline{\vartheta}, \varphi)$ со сферы продолжаются до 2π-периодических по всем переменным, что и позволяет использовать для представления и аппроксимации функций на сфере тензорные произведения одномерных 2π-периодических всплесков.

Опубликовано много работ по построению всплесков на сфере в евклидовых пространствах и даже на многообразиях довольно общего вида. Однако сфера — многообразие особое, наверное, самое симметричное, что и привлекает большое число специалистов по всплескам к построению для нее наиболее достойной теории. Автор этой работы и [1] тоже претендует на это, считая наиболее простой и удобной для применения предлагаемую здесь конструкцию, обобщающую и даже заметно упрощающую схему, предложенную в статье [1] для[2] $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре, а также при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

[2]В [1] использовано нестандартное обозначение $\mathbb{S}^3$ вместо $\mathbb{S}^2$.

Впрочем, почти в каждой из опубликованных до [1] по-своему замечательных работ [4–14] есть аналогичное утверждение. Большинство из них отличается друг от друга либо способами параметризации сфер, либо способами конструкции масштабирующих сеток на них, либо выбором самих порождающих КМА масштабирующих функций: периодических (по φ), полиномиальных тригонометрических или алгебраических для отрезков $[0, \pi]$, всплесков “новой генерации” Свелдена и др. Конечно, равномерные сетки по угловым параметрам, применяемые здесь, становятся сильно неравномерными в декартовых координатах около полюсов и других особых точек сферы, но это не увеличивает погрешность аппроксимации функций всплесками, хотя, возможно, несколько увеличивает объем вычислений. Правда, такой недостаток присущ и некоторым другим методам, во всяком случае тем, где используются сферические координаты и равномерные сетки по ним.

1. Предварительные сведения

Далее в этом разделе для удобства читателя приводится ряд необходимых для дальнейшего сведений из опубликованных источников. Отметим, что содержание следующего абзаца о применяемых здесь одномерных всплесках компактно изложено в последних двух абзацах раздела 2 работы [1].

Для определения базисных функций подпространств V_s^j $(j \in \mathbb{Z}_+)$ трех систем $(s = 1, 2, 3)$ 2π-периодических КМА сохраним обозначения из работ [1–3]. Пусть $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ — вещественная, четная, сосредоточенная на промежутке $(-(1+\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$, $\varepsilon \in (0, 1/3]$, гладкая на $\mathbb{R}$ функция, тождественная единице при $|\omega| \le (1-\varepsilon)/2$, обладающая свойством

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega+m) \equiv 1.$$

Отсюда, в частности, видно, что $\widehat{\varphi}_\varepsilon'(\pm(1\pm\varepsilon)/2) = 0$ и что $\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$ при $(1-\varepsilon)/2 < \omega < (1+\varepsilon)/2$ обладает свойством

$$\widehat{\varphi}^2(1-\omega) - 1/2 = 1/2 - \widehat{\varphi}^2(\omega),$$

т. е. точка $(1/2, 1/2)$ — центр симметрии графика функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$ на этом промежутке. В дальнейшем будет видно, что выгоднее выбирать $\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$ выпуклой вверх при $(1-\varepsilon)/2 < \omega < 1/2$ (соответственно, выпуклой вниз при $1/2 < \omega < (1+\varepsilon)/2$). Напомним, что функция $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ — это преобразование Фурье какой либо масштабирующей функции КМА мейеровского типа с дополнительными ограничениями вещественности, гладкости, симметрии. Далее, положим

$$\beta(\omega; \widehat{\varphi}_\varepsilon) = (\operatorname{sign}\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\big(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1) + \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)\big) \tag{1.1}$$

— это нечетная функция, сосредоточенная на интервалах с $(1-\varepsilon)/2 < |\omega| < (1+\varepsilon)/2$, и четная относительно центров этих интервалов. Пусть $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}(\omega)$ — *четная* неотрицательная функция мейеровского типа

$$\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}(\omega) = \begin{cases} 0, \quad |\omega| \ge \dfrac{1+\varepsilon}{2}, \\ \sqrt{1-\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1)+\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)}, \quad \dfrac{1-\varepsilon}{2} < \omega < \dfrac{\varepsilon+1}{2}, \\ 1, \quad |\omega| \le \dfrac{1-\varepsilon}{2}, \end{cases}$$

а с помощью равенства (1.1) определим еще $\beta_1(\omega) := \beta(\omega, \widehat{\varphi}_{1,\varepsilon})$, $\beta_2(\omega) := \beta(\omega, \widehat{\varphi}_\varepsilon)$. С помощью этих функций определяются преобразования Фурье трех масштабирующих функций, порождающих три КМА на числовой прямой

$$\widehat{\varphi}_s(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega) + (1-\delta_{s,3})\, i(\operatorname{sign}\omega)\beta_s(\omega) \quad \text{при} \quad s = 2, 3, \tag{1.2}$$

а при $s=1$ в формуле (1.2) нужно $\widehat{\varphi}_\varepsilon$ заменить на $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}$. Сложность этих функций убывает с ростом s. Самая простая из них $\widehat{\varphi}_3(\omega)=\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$, которая порождает $\varphi_3(t)$ такую, что $\varphi_3(l)=\delta_{l,0}$, $(l\in\mathbb{Z})$, $\varphi(2^jt-k)\big|_{t=2^{-j}l}=\delta_{k,l}$ $(k,l\in\mathbb{Z})$. А после 2π-периодизации функций φ_3 (2^jt-k) получается интерполяционная система 2π-периодических функций мейеровского типа

$$\Phi_3^{j,k}(t)=2^{-j}\sum_{|\nu|<(1+\varepsilon)/2^{j+1}}\widehat{\varphi}_3\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{i\nu(t-\frac{2\pi k}{2^j})}$$

$$=2^{-j+1}\bigg(\frac12+\sum_{\nu=1}^{N_\varepsilon^j}\widehat{\varphi}_3\Big(\frac{\nu}{2^j}\cos\nu\Big(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Big)\bigg)\quad (k=\overline{0,2^j-1},\ j\in\mathbb{Z}_+)\tag{1.3}$$

— множества тригонометрических полиномов порядка $N_\varepsilon^j=[2^{j-1}(1+\varepsilon)]$, при каждом $j\in\mathbb{Z}_+$ состоящие из 2^j базисных функций возрастающих по включению подпространств V_3^j интерполяционного КМА пространства $C_{2\pi}$. Аналогичным образом определяются масштабирующие функции КМА при $s=2$ и 1 и $N_{j,\varepsilon}=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$

$$V_s^j=\operatorname{span}\big\{\Phi_s^{j,k}(t)\colon k=\overline{0,2^j-1}\big\},\quad j\in\mathbb{Z}_+,\quad s=1,2,3,\tag{1.4}$$

где

$$\Phi_2^{j,k}(t)=\Phi_3^{j,k}(t)-2^{-j}\sum_{N_{j,\varepsilon}<|\nu|<N_\varepsilon^j}i\operatorname{sign}\nu\,\beta_2\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{\nu(t-\frac{2\pi k}{2^j})}$$

$$=2^{-j+1}\bigg(\frac12+\sum_{\nu=1}^{N_\varepsilon^j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\cos\nu\Big(t-\frac{2\pi k}{2^j}\Big)+\sum_{\nu=N_{j,\varepsilon}}^{N_\varepsilon^j}\beta_2\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sin\nu\Big(t-\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\bigg).\tag{1.5}$$

Самые громоздкие функции $\Phi_1^{j,k}(t)$ выписывать и использовать здесь мы не станем, хотя необходимые для этого средства уже представлены — функции $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}(\omega)$ и $\beta_1(\omega)$, но любой желающий сравнить их в деле может выписать их самостоятельно.

В работе [2] указано, что система функций

$$\big\{\Phi_s^{j+1,2k+1}(t)\colon k=0,2^j-1\big\}\subset V_s^{j+1},\quad s=1,2,3,$$

при каждом $j\in\mathbb{Z}_+$ является интерполяционным базисом пространства W_s^j — прямого дополнения V_s^j до V_s^{j+1}: $V_s^{j+1}=V_s^j\boxplus W_s^j$, т. е. такого, что для любого элемента $f_{j+1}\in V_{j+1}$ найдется единственная пара элементов $f_j\in V_s^j$ и $g_j\in W_s^j$ такая, что $f_{j+1}=f_j+g_j$, в частности, при любом $j\in\mathbb{Z}_+$ $\Phi_s^{j+1,2k}(t)\equiv\Phi_s^{j,k}(t)-\sum\Phi_s^{j,k}(2\pi(2l+1)/2^{j+1})\Phi_s^{j+1,2l+1}(t)$.

Полезно еще отметить, что частные суммы разложения функций $f(t)\in C_{2\pi}$ по интерполяционным всплескам $\Phi^{j+1,2k+1}(t)$

$$S_J(t,f):=f(0)+\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}(f-S_j)\Big(\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}}\Big)\Phi_s^{j+1,2k+1}(t)\tag{1.6}$$

совпадают с интерполяционными проекциями $f(t)$ на пространства V_s^J, так что в формуле (1.6) можно заменить S_j на $P_{V_s^j}^{\rm int}f$. Это позволяет обойтись без итерационных процедур построения формул типа (1.6) и построения всего ряда (с заменой в правой части (1.6) $J-1$ на ∞, а в левой — $S_J(t,f)$ на $f(t)$).

В работе [2] также доказано, что в отличие от системы (1.3) система (1.5) при каждом $j\in\mathbb{N}$ $(\Phi_s^{00}(x)\equiv1)$ не только интерполяционная $(\Phi_s^{j,k}(2\pi l/2^j)=\delta_{k,l},\ k,l\in\overline{0,2^j-1})$, но еще и ортогональная, т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(2^{j/2}\Phi_2^{j,k}(t)\big)\big(2^{j/2}\Phi_2^{j,l}(t)\big)\,dt=\delta_{k,l}\quad (j\in\mathbb{N},\ k=\overline{0,2^j-1}).\tag{1.7}$$

Но, к сожалению, W_2^j не является ортогональным дополнением V_2^j до V_2^{j+1}, которое тоже нетрудно выписать, обозначая его через $\mathcal{W}_2^j := \operatorname{span}\{\Psi_2^{j,k}(t)\colon k = \overline{0, 2^j-1}\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Легко проверить, что функция $\widehat{\psi}_2(\omega)$, определяемая формулой $\widehat{\psi}_2(\omega) = e^{-i\pi\omega}\widehat{\psi}(\omega)$, где

$$\widehat{\psi}(\omega) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon^2\Big(\dfrac{\omega}{2}\Big) + i\beta_2\Big(\dfrac{\omega}{2}\Big), \quad -(1+\varepsilon) < \omega < -(1-\varepsilon), \\ 1, \quad -(1-\varepsilon) < \omega < -\dfrac{1+\varepsilon}{2}, \\ \varphi_\varepsilon^2(\omega+1) - i\beta_2(\omega+1), \quad -\dfrac{1+\varepsilon}{2} < \omega < -\dfrac{1-\varepsilon}{2}, \\ 0, \quad |\omega| < \dfrac{1-\varepsilon}{2}, \\ \varphi_\varepsilon^2(\omega-1) + i\beta_2(\omega-1), \quad \dfrac{1-\varepsilon}{2} < \omega < \dfrac{1+\varepsilon}{2}, \\ 1, \quad \dfrac{1+\varepsilon}{2} < \omega < 1-\varepsilon, \\ \varphi_\varepsilon^2\Big(\dfrac{\omega}{2}\Big) - i\beta\Big(\dfrac{\omega}{2}\Big), \quad 1-\varepsilon < \omega < 1+\varepsilon, \end{cases}$$

удовлетворяет хорошо известному условию $\widehat{\psi}_2(\omega) = e^{-i\pi\omega}\overline{m}_2((\omega+1)/2)\widehat{\varphi}_2(\omega/2)$, гарантирующему, что ее обратное преобразование $\psi_2(x)$ порождает ортогональные всплески на $\mathbb{R}$, соответствующие масштабирующим функциям $\varphi_2(x)$. Следовательно, по определению ортогональных всплесков пространства $\operatorname{span}\{2^{j/2}\psi_2(2^jt-k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ являются ортогональными дополнениями в $L^2(R)$ пространств $\operatorname{span}\{2^{j/2}\varphi_2(2^jx-k)\colon k = \overline{0, 2^j-1}\}$ до $\operatorname{span}\{2^{\frac{j+1}{2}}\varphi_2(2^{j+1}t-k)\colon k = \overline{0, 2^{j+1}-1}\}$. Поэтому после 2π-периодизации систем $\{2^{j/2}\psi_2(2^jx-k)\}$ получаем в явном виде ортонормированные системы

$$\Psi_2^{j,k}(t) = 2\sum_{\nu=N_{\varepsilon,j}}^{N_\varepsilon^j}\Big(\widehat{\varphi}_\varepsilon^2\Big(\frac{\nu}{2^j}-1\Big)\cos\nu\Big(t-\frac{2\pi k}{2^j}\Big) - \beta_2\Big(\frac{\nu}{2^j}-1\Big)\sin\nu\Big(t-\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Big)$$

$$+\,2\sum_{\nu=N_\varepsilon^j}^{2N_{\varepsilon,j}}\Big(\cos\nu\Big(t-\frac{2\pi k}{2^j}\Big) + 2\sum_{\nu=2N_{\varepsilon,j}}^{2N_\varepsilon^j}\widehat{\varphi}_\varepsilon^2\Big(\frac{\nu}{2^{j+1}}\Big)\cos\nu\Big(t-\frac{2\pi k}{2^j}\Big) + \beta_2\Big(\frac{\nu}{2^{j+1}}\Big)\sin\nu t\Big), \quad k = 0, 2^j-1,$$

определяющие $\mathcal{W}_2^j$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Так как базис (1.3) пространства V_2^j является также ортогональной системой, то, как и в интерполяционном случае, частная сумма порядка J разложения функций f из $L^2[0,2\pi)$

$$f(t) \overset{L^2}{=} (f,1) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}(f, \Psi_2^{j,k})\Psi_2^{j,k}(t)$$

совпадает с ортогональной проекцией f на V_2^J, где

$$P_{V_2^j}f(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1}(f, 2^{j/2}\Phi_2^{j,k})\Phi^{j,k}(t).$$

Такие суммы выписываются явно проще, чем частные суммы выписанного ряда, которые и нужны для аппроксимации функций. Поэтому в работах [1;2] всплески $\Psi_s^{j,k}$ $(s = 2,3)$ и не конструировались. Здесь они приведены, потому что для других задач, таких как сжатие информации, удаление ее искажений, в том числе информации, связанной со сферой, ортогональные всплески могут быть и полезны.

2. Сферические координаты и особые точки сферы $\mathbb{S}^{n-1}$

Обозначения для сферических координат взяты из монографии [15, гл. 11]. Точки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ далее обозначаются через $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$,

$\mathbb{R}^n = \{x\colon |x| < \infty\}$; $\mathbb{S}^{n-1} = \{\theta = x/|x|\colon x \in \mathbb{R}^n\} = \{\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)\colon |\theta| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ — $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$. В угловых координатах $\vartheta(\overline{\vartheta}, \varphi) = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2,\varphi})$ переменный единичный вектор $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ выражается по формулам

$$\begin{aligned}
&\theta_1 = \cos\vartheta_1,\\
&\theta_2 = \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2,\\
&\theta_3 = \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\theta_{n-2} = \Big(\prod_{l=1}^{n-3}\sin\vartheta_l\Big)\cos\vartheta_{n-2},\\
&\theta_{n-1} = \Big(\prod_{l=1}^{n-2}\sin\vartheta_l\Big)\cos\varphi,\\
&\theta_n = \Big(\prod_{l=1}^{n-2}\sin\vartheta_l\Big)\sin\varphi.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Видно, что это пронормированные полярные координаты

$$\{x_i = r\theta_i(\overline{\vartheta}, \varphi)\colon i = \overline{1, n-1},\ \vartheta_i \uparrow_0^{\pi},\ \varphi \uparrow_0^{2\pi}\}.$$

Здесь ϑ_1 — угол между вектором θ и осью x_1. Остальные углы геометрически выражаются более сложно (например, ϑ_2 есть угол между осью x_2 и проекцией вектора θ на подпространство $\{x = (0, x_2, \dots, x_n)\}$ и т. д.), а их геометрическая интерпретация далее не используется.

Вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n)$, представленный в угловых координатах $(\overline{\vartheta}, \varphi) = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}, \varphi)$ с помощью формул (2.1), для краткости договоримся обозначать через $\widetilde{\theta}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}, \varphi) = \widetilde{\theta}(\overline{\vartheta}, \varphi)$. В случае $\mathbb{R}^3$ есть только две особые точки на сфере S^2 (в [1] для сферы в $\mathbb{R}^3$ применялось нестандартное обозначение S^3) — полюса $\theta(\pm1, 0, 0)$ (северный $N = \widetilde{\theta}(0, 0)$ и южный $S = \widetilde{\theta}(\pi, 0)$, не зависящие от φ $(\forall\,\varphi\,(\widetilde{\theta}(0, \varphi) = N,\ \widetilde{\theta}(\pi, \varphi) = S)))$. В этих точках якобиан полярной системы координат $\mathcal{D}(x_1, x_2, x_3)/\mathcal{D}(r, \vartheta, \varphi) = r\sin\vartheta$ обращается в ноль. На многомерной сфере таких точек много: якобиан $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n)/\mathcal{D}(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}, \varphi)$ при $r = 1$ равен нулю в любой точке $\widetilde{\theta}(\overline{\vartheta}, \varphi) \in \mathbb{S}^{n-2}$, у которой хоть один $\sin\vartheta_l = 0$ $(l = \overline{0, n-2})$. Совокупность таких точек можно разбить на следующие возрастающие по включению множества:

$$\begin{gathered}
\{\widetilde{\theta}(\overline{v}, \varphi)\colon v_1 = 0 \vee \pi\} = \{\overline{\theta}(\pm1, 0, \dots, 0)\} \subset \{\widetilde{\theta}(\overline{v}, \varphi) : \sin\vartheta_2 = 0\}\\
= \{\theta(\cos\vartheta_1, \pm\sin\vartheta_1, 0, \dots, 0) : \vartheta_1 \uparrow_0^{\pi}\} \subset \dots \subset \{\widetilde{\theta}(\overline{\vartheta}, \varphi)\colon\ \sin\vartheta_{n-2} = 0\}\\
= \Big\{\theta\Big(\cos\vartheta_1, \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2, \dots, \Big(\prod_{l=1}^{n-4}\sin\vartheta_l\Big)\cos\vartheta_{n-3}, \pm\Big(\prod_{l=1}^{n-3}\sin\vartheta_l\Big), 0, 0\Big) : \vartheta_i \uparrow_0^{\pi},\ i = \overline{1, n-3}\Big\}.
\end{gathered}$$

На самом деле на сфере S^{n-1} все точки равноправны, так что это особенности выбранной декартовой и соответствующей ей сферической системы координат. Формулы (2.1) однозначно определяют точки $\theta \in \mathbb{S}^{n-2}$ по любым заданным параметрам $(\overline{\vartheta}, \varphi) \in B_{n-1} = [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi)$, но не наоборот: любые точки $\widetilde{\theta}(\overline{\vartheta}, \varphi)$ с фиксированными значениями $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{i-1}, \vartheta_i = 0$ с $i \le n-1$ и с произвольными значениями остальных параметров преобразованиями (1.2) отображаются в единственную точку

$$\theta\Big(\cos\vartheta_1, \dots, \prod_{l=1}^{i-1}\sin\vartheta_l\cos\vartheta_{i-1}, \prod_{l=1}^{i}\sin\vartheta_l, 0, \dots, 0\Big) \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Из формул (2.1) следует, что точка вида $x = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$ сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ с фиксированными ненулевыми значениями первых m координат однозначно последовательно определяет параметры $\vartheta_1^0, \vartheta_2^0, \dots, \vartheta_m^0\colon \vartheta_1^0 = \arccos\vartheta_1^0$ $(\ne 0 \vee \pi$, иначе $x_m^0 = 0)$, $\vartheta_2 = \arccos(x_2^0/\sin\vartheta_1^0)$

(тоже $\neq 0$) и т. д., ϑ_m^0 из условий $\big\{ \prod_{l=1}^{m-1} \sin\vartheta_l^0 \cos\vartheta_m = x_m^0$, с $\vartheta_m = 0$ или π (иначе не будет $x_{m+1} = 0)\big\}$, остальные ϑ_l могут быть произвольными.

Любая определенная на $\mathbb{S}$ функция $f(x)$ после замены (2.1) порождает функцию $F(\overline{\vartheta},\varphi) = f(x(\overline{\vartheta},\varphi))$ на "брусе" B_{n-1}, которая на любой его части, соответствующей описанным особым множествам сферы $\big\{(x_1^0,\dots,x_m^0,0\dots,0)\colon x_m^0 \neq 0,\ \sum_{i=1}^m (x_i^0)^2 = 1\big\}$ не зависит от переменных $\vartheta_{m+1},\vartheta_{n-2},\varphi$, вполне определяясь значениями $\vartheta_1^0,\dots,\vartheta_m^0$. Если точка x^0 не является особой на сфере, то по указанной выше процедуре однозначно определятся все компоненты $(\overline{\vartheta}^0,\varphi)$. Поскольку в отличие от параметров ϑ_i параметр φ на сфере может принимать любое значение из $[0,2\pi)$, после определения всех компонент вектора $\overline{\vartheta}^0$ параметр φ^0 однозначно определяется из двух уравнений: $\big(\prod_{l=1}^{n-2}\sin\vartheta_2^0\big)\cos\varphi^0 = x_{n-1}^0$, $\big(\prod_{l=1}^{n-2}\sin\vartheta_l^0\big)\sin\varphi^0 = x_n^0$.

3. Продолжение определенных на $\mathbb{S}^{n-1}$ функций до 2π-периодических в сферических координатах

Каждая функция $f(x_1,\dots,x_n)$ на $\mathbb{S}^{n-1}$ после замены переменных (2.1) определяет однозначную функцию

$$F(\overline{\vartheta},\varphi) = f(x(\overline{\vartheta},\varphi)) = f\Big(\cos\vartheta_1, \cos\vartheta_2\sin\vartheta_1,\dots,\cos\vartheta_{n-2}\prod_{l=1}^{n-3}\sin\vartheta_l,\ (\cos\varphi,\sin\varphi)\prod_{l=1}^{n-2}\sin\vartheta_l\Big) \tag{3.1}$$

на брусе $B_{n-1} = [0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]$, 2π-периодическую по φ. Продолжить ее до 2π-периодической можно разными способами, например, при каждом φ из $(0,2\pi)$ продолжить (с сохранением непрерывности, гладкости или других требуемых для приложений свойств) с B_{n-1} на $[-\pi/2,3\pi/2]^{n-2}$ сначала до нуля в некоторую окрестность B_{n-1}, а потом нулем на весь куб размера $(2\pi)^{n-2}$. Так выгодно поступать, если функция $F(\overline{\vartheta},\varphi)$ сама зануляется на гранях куба $[0,\pi]^{n-1}$. В общем случае это будет довольно непростая задача. Прием из [1], при котором осуществлялась правильная склейка противоположных меридианов для удвоения сферы $\mathbb{S}^2$ при $n > 3$, слишком громоздкий, особенно с учетом того, что сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ придется уже не удваивать, а размножать m-кратно с $m = 2^{n-2}$. Поэтому далее из работы [1] используется только идея продолжения функций, определенных на сфере в полярных координатах, до 2π-периодических по всем переменным ϑ_l $(l = \overline{1,n-2})$ (по φ она изначально 2π-периодическая).

Очевидно, что не только при $\vartheta_l \in [0,\pi]$, а при любых ϑ_l $(l = \overline{1,n-1})$ имеет место тождество

$$\cos^2\vartheta_1 + (\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2)^2 + \dots + \Big(\prod_{l=1}^{n-1}\sin\vartheta_l\Big)^2(\cos\vartheta_{n-2})^2 + \Big(\prod_{l=1}^{n-1}\sin\vartheta_l\Big)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1,$$

так что любому набору параметров ϑ_l из $[0,2\pi]$ соответствуют своя точка $\theta = (\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$ и свое значение функции $F(\overline{\vartheta},\varphi) = f(x(\overline{\vartheta},\varphi))$, которые при изменении $\overline{\vartheta},\varphi$ могут изменяться, но за пределами $\mathbb{T}^{n-1} = [0,2\pi]^{n-1}$ изменяются 2π-периодически. Кроме того, при малых изменениях любой точки $(\overline{\vartheta},\varphi)$, если и происходят, то малые изменения точки $x(\overline{\vartheta},\varphi)$ на сфере. Следовательно, функция $F(\overline{\vartheta},\varphi;f)$ сохраняет все локальные свойства функции f на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, которые могут меняться при переходе от точки к точке, но зависят только от самой функции, а не от системы координат. Как сказано в [4], для избавления от особенностей в некоторой области, где якобиан преобразования (2.1) обращается в ноль, поверните должным образом оси декартовой системы координат. В силу изложенного выше нам и это не нужно, так как по способу, описанному в разд. 2, для любой особой точки на $\mathbb{S}^{n-1}$ легко определить все прообразы особых точек сферы в B_{n-1} с четким указанием однозначно определяемых первых компонент $\overline{\vartheta}$. Остальные можно оставить произвольными или выбрать конкретно в интересах прикладной задачи, например, положить их нулями. На сфере любая точка $\widetilde{\theta}(\vartheta_1^0,\dots,\vartheta_m^0,\vartheta_{m+1}^0,\dots,\vartheta_{n-2}^0,\varphi)$ с $\vartheta_i^0 \in (0,\pi)$ $(i = 1,m-1)$, $\vartheta_m^0 = 0$ или π, и произвольными

$\vartheta_{m+1},\dots,\vartheta^0_{n-2},\varphi$ — это единственная точка $\theta(\theta_1(\vartheta^0_1),\dots,\theta_{m-1}(\vartheta^0_1,\dots,\theta_{m-1}),\theta_m(\vartheta^0_1,\dots,\vartheta^0_m),0,\dots,0)$, а на B_{n-1} (и тем более на $\mathbb{T}_{n-1}$) это большое множество точек (при $m=0$ — грани бруса B_{n-1}, на которых функция $F(\vartheta,\varphi;f)$ постоянная).

Вывод. Самой формулой (3.1) и значениями функции $f(\theta)$ на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ однозначно определяется на $\mathbb{R}^{n-1}=\{(\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2},\varphi)\colon \vartheta_i,\varphi\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n-1}\}$ 2π-периодическая функция по каждой $(n-1)$-одной переменной — функция $F(\overline{\vartheta},\varphi)$ (можно сказать и так: однозначно продолжается с $\mathbb{S}^{n-1}$ и B_{n-1} до 2π-периодической на $\mathbb{R}^{n-1}$).

Отметим, что это верно и для дискретных функций на $\mathbb{S}^{n-1}$, если предварительно вычислить соответствующие дискретные точки на B_{n-1} по алгоритму, приведенному в самом конце разд. 2.

4. Всплески на сфере и их аппроксимативные свойства

Наиболее простой и хорошо известный способ построения всплесков для пространств функций нескольких переменных как на $\mathbb{R}^n$, так и периодических — построение с помощью тензорного произведения одномерных всплесков. Этот процесс хорошо определен и изучен. Далее будет рассмотрен конкретный случай с использованием специальных одномерных всплесков, описанных в разд. 1. Конечно, на самом деле это будут 2π-периодические всплески на $\mathbb{R}^{n-1}$. Для конструирования проекций функций F из $C([0,2\pi]^{n-1})$ или $L^2([0,2\pi))^{n-1}$ на подпространства соответствующего КМА потребуется информация об их значениях на всем основном кубе $\mathbb{T}^{n-1}:=[0,2\pi)^{n-1}$, а не только на брусе $B_{n-1}=[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi]$, соответствующем точкам сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Но так как параметры $(\overline{\vartheta},\varphi)$ при $(\overline{\vartheta},\varphi)\in B_{n-1}$ в силу (2.1) являются параметрами сферы, а функции $f(\theta)$ можно “отождествлять” с $F(\overline{\vartheta},\varphi)=f(\widetilde{\theta}(\overline{\vartheta},\varphi))$, то такие всплески можно считать и всплесками на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, тем более что значения $F(\overline{\vartheta},\varphi)$ на $\mathbb{T}^{n-1}$ автоматически определяются значениями f на сфере. Преодоление незначительных сложностей, связанных с распространением на $\mathbb{T}^{n-1}$ сеточных значений F на $\mathbb{S}^{n-1}$ и B^{n-1}, будет объяснено далее.

Договоримся о следующих обозначениях и терминах, где использованы одномерные масштабирующие функции и всплески, определенные в разд. 1:

ε — фиксированный параметр ($0<\varepsilon\le 1/3$), входящий через $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ во все всплески (и $\Phi^{j,k}$, и $\Psi_{j,k}$), но не в их обозначения;

n — фиксированное натуральное число, $n\ge 3$;

$\overline{k},\ \overline{l},\ldots=(k_1,k_2,\dots,k_{n-1}),\ (l_1,l_2,\dots,l_{n-1})\ldots$ — индексы ($(n-1)$-мерные индексы);

j — индекс 2π-двоично-рационального масштаба на B_{n-1} и на $\mathbb{T}_{n-1}$, $j\in\mathbb{Z}_+$;

$\bigl\{\Phi^{j,\overline{k}}_s(\overline{\vartheta},\varphi)=\Phi^{j,k_1}_s(\vartheta_1)\Phi^{j,k_2}_s(\vartheta_2)\ldots\Phi^{j,k_{n-2}}_j(\vartheta_{n-2})\Phi^{j,k_{n-1}}_s(\varphi)\ :k=\overline{0,2^j-1},\ i=\overline{1,n-1}\bigr\}$ — интерполяционные масштабирующие функции, базис подпространств $V^{n-1,j}_s$ кратно масштабной аппроксимации (КМА) пространства непрерывных 2π-периодических функций $C[0,2\pi]^{n-1}$;

$\bigl\{2^{(n-1)j/2}\Phi^{j,\overline{k}}_s(\overline{\vartheta},\varphi)\colon \overline{k}\in(\overline{0,2^j-1})^{n-1}\bigr\}$ — ортонормированный базис подпространств $V^{n-1}_{s,j}$ КМА пространства $L^2([0,2\pi)^{n-1})$;

$\bigl\{\Phi^{j,2\overline{k}-\overline{1}}_s(\overline{\vartheta},\varphi)=\Phi^{j,2k_1-1}_s(\vartheta_1)\Phi^{j,2k_1-1}_s(\vartheta_2)\ldots\Phi^{j,2k_{n-1}-1}_s(\varphi)\colon \overline{k}=(\overline{0,2^j-1})^{n-1}\bigr\}$ — интерполяционный (при $s=1,2$ — также и ортогональный) базис подпространств W^j_s — прямых дополнений V^j_s до V^{j+1}_s;

$\Psi^{j,\overline{k}}_2(\vartheta,\varphi)=\bigl(\prod_{i=1}^{n-2}\Psi^{j,k_i}_2(\vartheta_i)\bigr)\Psi^{j,k_{n-1}}_2(\vartheta)$ — ортонормированный базис ортогональных дополнений $\mathcal{W}^j_s$ подпространств V^j_2 до V^{j+1}_2.

Из этих обозначений ясно, что далее, как обычно, под $V^{n-1,j}_s$ понимается конечномерное подпространство $V^{n-1,j}_s=\operatorname{span}\bigl\{\Phi^{j,\overline{k}}_s(\overline{\vartheta},\varphi)\colon \overline{k}\in(\overline{0,2^j-1})^{n-1}\bigr\}$

$$V^{n-1,j}_s=\Biggl\{\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_{n-1}}^{n-1}C_{\overline{k}}\Phi^{j,\overline{k}}_s(\overline{\vartheta},\varphi)\colon C_{\overline{k}}\in\mathbb{R}\Biggr\}=\Biggl(\bigotimes_{i=1}^{n-2}V^j_s(\vartheta_i)\Biggr)\times V^j_s(\varphi),\tag{4.1}$$

где $\bigotimes$ — символ тензорного произведения, $V_s^j(t)$ — подпространство V_s^j КМА пространства $C_{2\pi}$ функций $f(t)$. А так как из условий, наложенных в разд. 1 на $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$, следует, что $\varphi_2(x)$ — целая функция экспоненциального типа и $\varphi_2(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi}_2(\omega)))(x) = O(1/(1+x^2))$ (через двукратное интегрирование по частям), то $\varphi_2(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$, и она является масштабирующей функцией, порождающей кратно масштабную аппроксимацию как в $L^2(\mathbb{R})$, так и в $C_0(\mathbb{R})$ с одинаковыми по составу базисов подпространствами $V_2^j(\mathbb{R})$ обеих КМА. Сходимость, равномерная и в $L^2(\mathbb{R})$, рядов $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_s(2^j(t-2\pi l)-k)$, связанных с 2π-периодизацией всплесков на оси $\mathbb{R}$, определяет 2^j штук тригонометрических полиномов $\Phi_2^{j,k}(t)$ — базисов одинаковых по составу подпространств V_2^j КМА пространств $L^2(0,2\pi)$ и $C_{2\pi}$. В работе [2] это объяснялось условием на ограниченность вариации производной $\varphi_\varepsilon'(\omega)$, которое потом в работе [3] было использовано в связи с оценкой функций Лебега для частных сумм разложений периодических функций в ряды по периодическим всплескам.

Перечисленные в предыдущем абзаце свойства выписанных там систем (такие, как периодичность, интерполяционность, ортогональность, базисность) на самом деле обоснованы ранее в случае одной переменной (ортогональные периодические, приведенные в разд. 1 всплески $\Psi_2^{j,k}(t)$ на базе $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ в [2; 3] не определялись). Утверждения о системах функций $\Phi_2^{j,\overline{k}}$, $\Phi_2^{j,2\overline{k}+\overline{1}}$ и $\Psi_2^{j,\overline{k}}$ являются простыми следствиями одномерных утверждений.

Следующая лемма доказывается тоже просто, но она очень важна, поэтому выделена из текста в специальную формулировку. В одномерном случае при ее формулировке в работах [2; 3] была приведена ссылка на одну работу К. И. Осколкова и Д. Оффина.

Лемма 1. *Всякий тригонометрический полином $\mathfrak{M}_m(\overline{t}_{\overline{k}}(\overline{\vartheta},\varphi))$ от $n-1$ переменных по каждой переменной порядка не выше $\mathcal{N}_{\varepsilon,j} = [2^{j-1}(1-\varepsilon)]$ с $\varepsilon \in (0,1/3]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит пространству $V_s^{m-1,j}$, и его проекция (интерполяционная и ортогональная) совпадает с ним самим.*

Доказательство. Достаточно проверить второе утверждение, так как оно влечет первое. В комплексной форме любой такой полином $\mathfrak{M}_m(\overline{t})$ представляет собой линейную комбинацию полиномов $\tau_{\overline{k}}(\overline{t}) = e^{ik_1t_1}e^{ik_2t_2}\ldots e^{ik_{n-1}\varphi}$. Из формулы (4.1) следует, что лемму достаточно доказать для каждого отдельного сомножителя полинома $\tau_{\overline{k}}(\tau)$. А так как они равноправны, то все сводится к доказательству леммы в одномерном случае. Тут при $k < N_{\varepsilon,j}$ имеем $\widehat{\varphi}_s(k/2^j) = 1$, и потому

$$\Big(P^{\rm int}_{r_{V_s^j}} e^{ikt}\Big)(t) = \sum_{l=0}^{2^j-1} e^{ikl2\pi/2^j}\Phi_s^{j,l}(t) = \sum_{l=0}^{2^j-1} 2^{-j} \sum_{|\nu|<\mathcal{N}_\varepsilon^j} \widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{i\nu t}e^{i(k-\nu)2\pi l/2^j}$$

$$= 2^{-j}\sum_{\nu} \widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{i\nu t}\frac{1-e^{i2\pi(k-\nu)}}{1-e^{i2\pi(k-\nu)/2^j}} = 2^{-j}\sum_{\nu} \widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{i\nu t}2^j\delta_{\nu,k} = e^{ikt}.$$

В случае ортогональной проекции на V_s^j это утверждение доказано в цитируемой выше работе К. И. Осколкова и Д. Оффина. □

Из формулы (4.1) следует, что интерполяционную проекцию непрерывной 2π-периодической функции $F(\overline{v},\varphi)$ на пространстве $V_s^{(n-1),j}$ по ее значениям на сетке с шагом $2\pi/2^j$ по каждой переменной, определяемую по формуле

$$\Big(P^{\rm int}_{V_s^{(n-1),j}} F\Big)(\overline{\vartheta},\varphi) := \sum_{k_1=0}^{2^j-1}\sum_{k_2=0}^{2^j-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{2^j-1} F\Big(\frac{2\pi k_1}{2^j},\cdots,\frac{2\pi k_{n-2}}{2^j},\frac{2\delta k_{n-1}}{2^j}\Big)\Phi_s^{j,k_1}(\vartheta_1)$$

$$\ldots\Phi_s^{j,k_{n-2}}(\vartheta_{n-2})\Phi_s^{j,k_{n-1}}(\varphi) =: \sum_{\overline{k}} F\big(\overline{\vartheta}_{\overline{k}},\varphi_{k_{n-1}}\big)\Phi^{j,\overline{k}}(\overline{\vartheta},\varphi),$$

можно получить, последовательно выполняя проектирование F сначала как функции первой переменной ϑ_1 на пространство $V_s^j\big|_{t=\vartheta_1}$, потом полученный результат как функцию ϑ_2 — на $V_s^j\big|_{t=\vartheta_2}$ и т.д., и наконец, результат, полученный на $(n-2)$-м шаге — на $V_s^j\big|_{t=\varphi}$. Отсюда следует, что норму оператора $P^{\mathrm{int}}_{V_s^{(n-2),j}}$ можно вычислять как $(n-1)$-кратное произведение норм одномерных операторов, т.е. как степень $\|P^{\mathrm{int}}_{V_s^j}\|^{n-1}_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}}$. Ясно, что по той же причине аналогичная формула верна и для операторов ортогонального проектирования

$$\Big(P^{\perp}_{V_s^{n-1,j}}f\Big)(\overline{\vartheta},\varphi)=\sum_{\overline{k}\in\overline{(0,2^j-1)}^{n-1}}\big(F,2^{(n-1)j/2}\Phi_s^{j,\overline{k}}\big)2^{(n-1)j/2}\Phi_s^{j,\overline{k}}(\overline{\vartheta},\varphi).$$

Отсюда с помощью леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любой непрерывной 2π-периодической на $\mathbb{R}^{n-1}$ функции $F(\overline{\vartheta},\varphi)$ справедлива оценка*

$$\big\|F(\overline{\vartheta},\varphi)-\big(P^{\mathrm{int}}_{V_s^{n-1,j}}F\big)(\overline{\vartheta},\varphi)\big\|_{C(\mathbb{T}^{n-1})}\le\big(1+\|P^{\mathrm{int}}_{V_s^j}\|^{n-1}\big)E_{N_{\varepsilon,j}}(F)_{C(\mathbb{T}^{n-1})},\quad s=1,2,3.\tag{4.2}$$

Аналогично, для любой 2π-периодической функции $G(\overline{\vartheta},\varphi)\in L^2([0,2\pi]^{n-1})$ справедлива оценка

$$\big\|G(\overline{\vartheta},\varphi)-\big(P^{\perp}_{V_s^{n-1,j}}G\big)(\overline{\vartheta},\varphi)\big\|_{L^2([0,2\pi]^{n-1})}\le\big(1+\|P^{\perp}_{V_s^j}\|^{n-1}\big)E_N(G)_{L^2(\mathbb{T}^{n-1})},\quad s=2,3.\tag{4.3}$$

Здесь самая последняя величина в правой части оценки (4.2) — это величина наилучшего приближения в равномерной метрике функции F тригонометрическими полиномами $\mathfrak{M}_{N_{\varepsilon,j}}(\overline{\vartheta},\varphi)$ порядка $N_{\varepsilon,j}$ по каждой переменной ϑ_i $(i=\overline{1,n-2})$ и φ. А в правой части (4.3) — величина наилучшего приближения F множеством таких же полиномов в метрике $L^2(\mathbb{T}^{n-1})$.

Обозначим ортогональное дополнение пространства $V_s^{n-1,j}$ до $V_s^{n-1,j+1}$ $(s=1,2)$ через $W_{s,\perp}^{n-1,j}$ $(j\in\mathbb{Z}_+)$. Здесь, как и всегда,

$$L^2(\mathbb{T}^{n-1})=V_s^{n-1,0}\times\bigoplus_{j=0}^{\infty}W_{s,\perp}^{n-1,j},\quad V_s^{n-1,j+1}=V_s^{n-1,0}\times\bigoplus_{i_{k_i}=0}^{j}W_{s,\perp}^{n-1,i}.$$

Поэтому частная сумма порядка $j-1$ разложения суммируемой с квадратом функции F на полном периоде $\mathbb{T}^{n-1}$ совпадает с проекцией $P^{\perp}_{V_{s,j}^{n-1},F}$, определенной перед леммой 2 (просто они будут выражены через разные ортогональные системы). Формула для проекции на $V_s^{n-1,j}$ проще и компактнее частных сумм ортогональных разложений и потому выгоднее, если всплески используются для задачи аппроксимации функций, особенно, если в оценках (4.2) и (4.3) константы перед наилучшими приближениями заменить на эффективные. Это будет сделано в следующем утверждении, которое также просто вытекает из леммы 2 и результатов работы [3] в одномерном случае. В связи с важностью отмеченной в предыдущем предложении проблемы это утверждение названо теоремой.

Теорема. *Для 2π-периодических по всем $n-1$ переменным функций $F(\overline{\vartheta},\varphi)\in C([0,2\pi]^{n-1})$ и функций $G(\overline{\vartheta},\varphi)\in L^2([0,2\pi]^{n-1})$ справедливы оценки*

$$\|F-(P^{\mathrm{int}}_{V_s^{n-1,j}}F)\|_{C([0,2\pi]^{n-1})}\le\big(1+(C_s(\widehat{\varphi}_\varepsilon))\big)^{n-1}E_{N_{\varepsilon,j}}(F)_{C([0,2\pi]^{n-1})},\quad s=2,3,\tag{4.4}$$

$$\|G-(P^{\perp}_{V_s^{n-1,j}}G)\|_{L^2([0,2\pi]^{n-1})}\le 2E_{N_{\varepsilon,j}}(G)_{L^2([0,2\pi]^{n-1})},\quad s=2,\tag{4.5}$$

где

$$C_s(\widehat{\varphi}_\varepsilon)=(1+\varepsilon)\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{d}{d\omega}\big[\widehat{\varphi}_2^2(\omega)+\delta_{3,s}\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\widehat{\varphi}_2(\omega-1)\big].\tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [3] получены оценки типа (1.4) нормы операторов проектирования $P^{\rm int}_{V_s^j}$ на пространства V_s^j при $s=3$ и 2 множителем немного меньшим, чем (4.6), но более громоздкой формы. Огрубляя ту оценку и используя лемму 2, получаем (4.4). Так как $V_2^{n-1,j}+W_2^{n-1,j}+\ldots=L^2([0,2\pi)^{n-1})$, то

$$\|F\|^2=\sum_{\overline{k}\in(\overline{0,2^j-1})^{n-1}}\big|\big(F,2^{(n-1)j/2}\Phi_2^{j,\overline{k}}\big)\big|^2+\sum_{l=j}^{+\infty}\sum_{\overline{k}\in(\overline{0,2^j-1})^{n-1}}\big|\big(F,\Psi_2^{j,\overline{k}}\big)\big|^2$$

$$\geq\sum_{\overline{k}\in(\overline{0,2^j-1})^{n-1}}\big|\big(F,2^{(n-1)j/2}\Phi_2^{j,\overline{k}}\big)\big|^2=\|P^{\perp}_{V_s^{n-1,j}}F\|^2,$$

и, следовательно,

$$\|P^{\perp}_{V_s^{n-1,j}}F\|\leq 1. \qquad \square$$

Последнее замечание к проблеме аппроксимации функций всплесками: зная требуемую точность приближения функции и характеристики ее гладкости, применяя оценку (4.4), можно оценить достаточную для этого величину параметра j и, не прибегая к помощи дискретных всплеск-преобразований, выписать аппроксимант $\big(P^{\rm int}_{V_s^{n-1,j}}F\big)$.

Вернемся к проблеме аппроксимации всплесками функций на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Здесь не будет дополнительных проблем по сравнению с описанным случаем для 2π-периодических функций на $\mathbb{R}^{n-1}$, если функция $f(x)$ в декартовых координатах x или $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ задана явной формулой. Тогда функцию $F(\overline{\vartheta},\varphi;f)$ после замены $\theta(\overline{x})$ на $\widetilde{\theta}(\overline{\vartheta},\varphi)$ по формулам (2.1), считая в них $(\overline{\vartheta},\varphi)\in[0,2\pi)^{n-1}$, получим тоже в явном виде, а также, как объяснялось ранее, наследующую на всем периоде локальные свойства функцию f. Далее, взяв нужный параметр j равномерной сетки и $(n-1)$-мерную матрицу значений F на соответствующей сетке, строим интерполяционную проекцию на пространство $V_s^{n-1,j}$, ограничиваясь значениями результата на $B_{n-1}\subset[0,2\pi]^{n-1}$. В случае $g\in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ также поступаем с ортогональной проекцией $G(\overline{\vartheta},\varphi)$ на $V_s^{n-1,j}$.

Следствие. *Для любой непрерывной функции $f(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ при ее аппроксимации через представление $F(\overline{\vartheta},\varphi)=f(\overline{\theta}(\overline{\vartheta},\varphi))$ в сферических координатах с помощью интерполяционной проекции на пространства V_s^{n-1} масштабирующих функций*

$$\{\Phi_s^{j,k}(\overline{\vartheta},\varphi)\colon k=\overline{0,2^j-1}\},\quad j\in\mathbb{N},$$

гарантирована точность аппроксимации оценкой (4.4). *Аппроксимации функции*

$$G(\overline{\vartheta},\varphi)=g(\overline{\theta}(\overline{\vartheta},\varphi),\varphi)\quad c\quad g\in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$$

соответствует оценка (4.5) *с заменой в ней* $L^2([0,2\pi]^{n-1})$ *на* $L^2((0,\pi)^{n-2}\times(0,2\pi))$ *и с добавлением множителя* $1/2^{n-1}$ *в ее правой части.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение первой части следствия тривиально. Утверждение второй части вытекает из представления куба $(0,2\pi)^{n-1}$ в виде объединения 2^{n-1} непересекающихся брусьев вида $(l_1\pi,(l_1+1)\pi)\times\cdots\times(l_{n-2}\pi,(l_{n-2}+1)\pi)\times(0,2\pi)$, $l_i\in\mathbb{Z}_+$, каждый из которых преобразованием (2.1) однозначно отображается на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$. А так как каждый из этих брусьев, включая $B_{n-1}=(0,\pi)^{n-2}\times(0,2\pi)$ составляет 2^{n-1}-ю часть куба $(0,2\pi)^{n-1}$, то

$$\|G-P^{\perp}_{V_2^{n-1,j}}\|_{L^2(B_{n-1})}=(1/2^{n-1})\|G-P^{\perp}_{V_2^{n-1,j}}\|_{L_2((0,2\pi)^{n-1})}. \qquad \square$$

Поскольку в особых точках сферы, описанных в разд. 2, якобиан $D(\overline{\theta}(\overline{\vartheta},\varphi))/D(\overline{\vartheta},\varphi)$ обращается в ноль, то уклонение $G(\overline{\vartheta},\varphi)=g(\overline{\theta}(\overline{\vartheta},\varphi),\varphi)$ от $P^{\perp}_{r,V_2^{n-1,j}}G$ в $L^2((0,\pi)^{n-2}\times(0,2\pi))$ будет соответствовать аппроксимации $f(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ в L^2 вне особых точек сферы.

Если же функция f известна только на некоторой сетке точек сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, по алгоритму, изложенному в конце разд. 2, однозначно восстанавливаем соответствующую сетку на брусе B_{n-1} и значения функции F на ней. Если полученная сетка на B_{n-1} равномерная, то, продолжив ее на $[0,2\pi]^{n-1}$, продолжим значения F на дополненную часть сетки по правилу: для каждой новой точки ищем точку в B_{n-1}, у которой значения косинусов компонент $\overline{\vartheta}$ либо совпадают, либо отличаются только знаком от косинусов тех же компонент новой точки, и, если общее число не совпадающих по знаку компонент четное, то продолжаем функцию F в эту новую точку сетки, повторяя ее значение в соответствующей точке из B_{n-1}, или заменяем это значение на противоположное по знаку в противном случае. Далее, используя все значения исходной и продолженной сеточной функции F, строим ее интерполяционную проекцию на пространство $V_s^{n-1,j}$ периодического КМА. Если после переноса сетки с $\mathbb{S}^{n-1}$ на B_{n-1} получается нерегулярная сетка, то применять всплески для приближенного восстановления функции на всей сфере (на всем брусе B_{n-1}) можно только в том случае, если есть возможность с достаточной точностью экстраполировать заданные значения F на регулярную сетку. Кстати, необязательно с шагом, кратным $(2\pi/2^j)$. Но это тема уже другой статьи.

Имея построенные здесь интерполяционные 2π-периодические базисы

$$\{1, \Phi_s^{j+1,2\overline{k}+\overline{1}}(\overline{\vartheta},\varphi)\colon \overline{k}\in\{0,1,\ldots,2^j-1\}^{n-1}\}$$

пространств интерполяционных всплесков $W_s^{n-1,j}$ $(s=1,2,3)$ и ортогональные 2π-периодические базисы

$$\{1, \Psi_2^{j,\overline{k}}\colon \overline{k}\in\{0,1,\ldots,2^j-1\}^{n-1}\} \quad (j\in\mathbb{Z}_+)$$

пространств ортогональных всплесков $W_{2,\perp}^{n-1,j}$ — ортогональных дополнений $V_2^{n-1,j+1} \overset{\perp}{-} V_2^{n-1,j}$, легко для функции из соответствующих пространств периодических непрерывных или интегрируемых с квадратом функций по хорошо известным правилам построить их разложения в ряды по указанным всплескам. Важно, что в обоих случаях частичные суммы этих рядов будут совпадать с более простыми по форме проекциями (соответственно, интерполяционными или ортогональными) этих функций на пространства $V_s^{n-1,j}$. Отметим, что при $s=2$ базис

$$\{\Phi_2^{j,\overline{k}}(\overline{\vartheta},\varphi)\colon k_i=\overline{0,2^j-1},\ i=\overline{1,n-1}\}$$

пространства $V_2^{n-1,j}$ является одновременно интерполяционным и ортогональным и значительно проще ортонормированной системы всплесков

$$\{1, \Psi_2^{l,\overline{k}_l}(\overline{\vartheta},\varphi)\colon l=\overline{0,j-1},\ \overline{k}_l\in(\overline{0,2^j-1})^{n-1}\}.$$

Заключение. Для решения проблемы, соответствующей заголовку статьи, пришлось построить и исследовать свойства кратно масштабных аппроксимаций периодических функций нескольких переменных с интерполяционными и интерполяционно-ортогональными системами функций (масштабирующих и всплесков). Хочу поблагодарить моих коллег В. В. Арестова, М. В. Дейкалову и А. Г. Бабенко, уже опубликовавших ряд глубоких результатов [16–18] по теории функций на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ $(n-1\in\mathbb{N})$ и привлекших мое внимание к теме этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chernykh N.I.** Interpolating wavelets on the sphere // Ural Math. J. 2019. Vol. 5, no. 2. P. 3–12. doi: 10.15826/umj.2019.2.001 .
2. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.
3. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Интерполяционные всплески в краевых задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 257–268.

4. **Dahlke S., Dahmen W., Weinreich I., Schmitt E.** Multiresolution analysis and wavelets on $\mathbb{S}^2$ and $\mathbb{S}^3$ // Numer. Funct. Anal. Optim. 1995. Vol. 16, no. 1–2. P. 19–41. doi: 10.1080/01630569508816605 .
5. **Potts D., Tasche M.** Interpolatory wavelets on the sphere // Approximation Theory. 1995. Vol. 8. P. 335–342. doi: 10.1142/9789814532600 .
6. **Schröder P., Sweldens W.** Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere // Wavelets in the Geosciences. Lect. Notes in Earth Sci. 1995. Vol. 90. P. 158–188. doi: 10.1007/BFb0011096 .
7. **Narcowich F.J., Ward J.D.** Nonstationary wavelets on the m-sphere for scattered data // Appl Appl. Comput. Harmon. Anal. 1996. Vol. 3. P. 324–336. doi: 10.1006/acha.1996.0025 .
8. **Freeden W., Schreiner M.** Orthogonal and nonorthogonal multiresolution analysis, scale discrete and exact fully discrete wavelet transform on the sphere // Constr. Approx. 1998. Vol. 14, no. 4. P. 493–515. doi: 10.1007/s003659900087 .
9. **Farkov Yu.** B-spline wavelets on the sphere // Proc. of the Intern. Workshop “Self-Similar Systems”. 1999. Vol. 30. P. 79–82.
10. **Skopina M.A.** Polynomial expansions of continuous functions on the sphere and on the disk: IMI Research Reports / Department of Mathematics, University of South Carolina. 2001. Vol. 5. 13 p.
11. **Weinreich I.** A construction of C^1-wavelets on the two-dimensional sphere // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2001. Vol. 10. P. 1–26. doi: 10.1006/acha.2000.0330 .
12. **Askari-Hemmat A., Dehghan M.A., Skopina M.A.** Polynomial wavelet-type expansions on the sphere // Math. Notes. 2003. Vol. 74, no. 2. P. 278–285. doi: 10.1023/A:1025016510773 .
13. **Narcowich F.J., Petrushev P., Ward J.D.** Localized tight frames on spheres // SIAM J. Math. Anal. 2006. Vol. 38. P. 574–594. doi: 10.1137/040614359 .
14. **Dai F.** Characterizations of function spaces on the sphere using frames // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 359, no. 2. P. 567–589. doi: 10.1090/S0002-9947-06-04030-X .
15. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
16. **Арестов В.В., Дейкалова М.В.** Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 34–47. doi: 10.1134/S0081543814020023 .
17. **Дейкалова М.В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
18. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Мат. заметки. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 333–355.

Поступила 28.09.2020
После доработки 4.11.2020
Принята к публикации 16.11.2020

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Chernykh N.I. Interpolating wavelets on the sphere. *Ural Math. J.*, 2019, vol. 5, no. 2, pp. 3–12. doi: 10.15826/umj.2019.2.001 .
2. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Interpolating-orthogonal wavelet system. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 264, suppl. 1, pp. 107–115. doi: 10.1134/S0081543809050083 .
3. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Interpolation wavelets in boundary value problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 300, suppl. 1, pp. 172–183. doi: 10.1134/S0081543818020177 .
4. Dahlke S., Dahmen W., Weinreich I., Schmitt E. Multiresolution analysis and wavelets on $\mathbb{S}^2$ and $\mathbb{S}^3$. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1995. vol. 16, no. 1–2. pp. 19–41. doi: 10.1080/01630569508816605 .
5. Potts D., Tasche M. Interpolatory wavelets on the sphere. *Approximation Theory*, 1995, vol. 8, pp. 335–342. doi: 10.1142/9789814532600 .

6. Schröder P., Sweldens W. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. *Wavelets in the Geosciences. Lect. Notes in Earth Sci.*, 1995, vol. 90, pp. 158–188. doi: 10.1007/BFb0011096 .
7. Narcowich F.J., Ward J.D. Nonstationary wavelets on the m-sphere for scattered data. *Appl Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1996, vol. 3, pp. 324–336. doi: 10.1006/acha.1996.0025 .
8. Freeden W., Schreiner M. Orthogonal and nonorthogonal multiresolution analysis, scale discrete and exact fully discrete wavelet transform on the sphere. *Constr. Approx.*, 1998, vol. 14, no. 4. pp. 493–515. doi: 10.1007/s003659900087 .
9. Farkov Yu. B-spline wavelets on the sphere. In: *Proc. of the Intern. Workshop "Self-Similar Systems"*, Dubna: Joint Inst. for Nuclear Research Publ., 1999, vol. 30, pp. 79–82. , ISBN: 5-85165-525-9 .
10. Skopina M. Polynomial expansions of continuous functions on the sphere and on the disk. *IMI Research Reports, Department of Mathematics, University of South Carolina*, 2001, vol. 5. 13 p.
11. Weinreich I. A construction of C^1-wavelets on the two-dimensional sphere. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2001, vol. 10, pp. 1–26. doi: 10.1006/acha.2000.0330 .
12. Askari-Hemmat A., Dehghan M.A., Skopina M. Polynomial wavelet-type expansions on the sphere. *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 2. pp. 278–285. doi: 10.1023/A:1025016510773 .
13. Narcowich F.J., Petrushev P., Ward J.D. Localized tight frames on spheres. *SIAM J. Math. Anal.*, 2006, vol. 38, pp. 574–594. doi: 10.1137/040614359 .
14. Dai F. Characterizations of function spaces on the sphere using frames. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 2. pp. 567–589. doi: 10.1090/S0002-9947-06-04030-X .
15. Sobolev S.L. *Cubature formulas and modern analysis: An Introduction.* Montreux: Gordon and Breach Sci. Publ., 1992, 379 p. ISBN: 9782881248412 . Original Russian text published in Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnyh formul.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 808 p.
16. Arestov V.V., Deikalova M.V. Nikolskii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. 9–23. doi: 10.1134/S0081543814020023 .
17. Deikalova M.V. The Taikov functional in the space of algebraic polynomials on the multidimensional Euclidean sphere. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, no. 4. pp. 498–514. doi: 10.1134/S0001434608090228 .
18. Babenko A.G. Sharp Jackson–Stechkin inequality in L^2 for functions on multidimensional spheres. *Math. Notes*, 1996, vol. 60, no. 3, pp. 248–263. doi: 10.1007/BF02320361 .

Received September 28, 2020
Revised November 4, 2020
Accepted November 16, 2020

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Nikolai Ivanovich Chernykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: chernykh@imm.uran.ru .

Cite this article as: N. I. Chernykh. Periodic wavelets on a multidimensional sphere and their application for function approximation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 255–267 .