ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 512. 544

О СВЯЗИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ 3-ТРАНСПОЗИЦИЯМИ, С ГРУППАМИ КОКСТЕРА[1]

В. М. Синицин, А. И. Созутов

Группы Кокстера, более известные как группы, порожденные отражениями, имеют многочисленные приложения в различных областях математики и за ее пределами. Группы с 3-транспозициями Фишера также связаны со многими структурами: конечные простые группы, тройные графы, геометрии различных пространств, алгебры Ли и др. Пересечение этих классов групп состоит из конечных групп Вейля $W(A_n)\simeq S_{n+1}$, $W(D_n)$, $W(E_n)$ $(n=6,7,8)$ простых конечномерных алгебр и групп Ли. В работе продолжается исследование связи между конечными группами $Sp_{2l}(2)$ и $O_{2l}^{\pm}(2)$ из пп. (ii)–(iii) теоремы Фишера и бесконечными группами Кокстера. Организующей основой исследуемой связи являются общие графы-деревья Кокстера Γ_n с вершинами $1,\ldots,n$. Каждой вершине i графа Γ_n ставятся в соответствие порождающая инволюция (отражение) s_i группы Кокстера G_n, базисный вектор e_i пространства V_n над полем F_2 из двух элементов и порождающая трансвекция w_i подгруппы $W_n=\langle w_1,\ldots,w_n\rangle$ из $SL(V_n)=SL_n(2)$. Графу Γ_n соответствует точно одна группа Кокстера ранга n: $G_n=\langle s_1,\ldots,s_n \mid (s_is_j)^{m_{ij}},\, m_{ij}\le 3\rangle$, где $m_{ii}=1$, $1\le i<j\le n$ и $m_{ij}=3$ или $m_{ij}=2$ в зависимости от того, есть в Γ_n ребро (i,j) или такого ребра нет. Определенная по графу Γ_n форма превращает V_n в ортогональное пространство, группа изометрий W_n которого порождается указанными выше трансвекциями (3-транспозциями) $w_1,\ldots,w_n$; при этом в W_n выполняются соотношения $(w_iw_j)^{m_{ij}}=1$, и, значит, отображение $s_i\to w_i$ $(i=1,\ldots,n)$ продолжается до сюрьективного гомоморфима $G_n\to W_n$. В предыдущей работе авторов для всех групп $W_n=O_{2l}^{\pm}(2)$ $(n=2l\ge 6)$ и $W_n=Sp_{2l}(2)$ $(n=2l+1\ge 7)$ был указан алгоритм перечисления соответствующих им графов-деревьев Γ_n с помощью группировки их по E-сериям вложенных друг в друга графов. В настоящей работе установлена самая тесная генетическая связь между группами $O_{2l}^{\pm}(2)$, $Sp_{2l}(2)\times\mathbb{Z}_2$ $(3\le l\le 10)$ и соответствующими (бесконечными) группами Кокстера G_n с разницей в генетических кодах точно на один ген (соотношение). Для групп W_n с графами Γ_n из E-серий $\{E_n\}$, $\{I_n\}$, $\{J_n\}$ и $\{K_n\}$ дополнительные слова-соотношения выписаны в явном виде.

Ключевые слова: группы с 3-транспозициями, графы и группы Кокстера, генетические коды.

V. M. Sinitsin, A. I. Sozutov. On the connection of some groups generated by 3-transpositions with Coxeter groups.

Coxeter groups, more commonly known as reflection-generated groups, have numerous applications in various fields of mathematics and beyond. Groups with Fischer's 3-transpositions are also related to many structures: finite simple groups, triple graphs, geometries of various spaces, Lie algebras, etc. The intersection of these classes of groups consists of finite Weyl groups $W(A_n)\simeq S_{n+1}$, $W(D_n)$, and $W(E_n)$ $(n=6,7,8)$ of simple finite-dimensional algebras and Lie groups. The paper continues the study of the connection between the finite groups $Sp_{2l}(2)$ and $O_{2l}^{\pm}(2)$ from clauses (ii)–(iii) of Fischer's theorem and infinite Coxeter groups. The organizing basis of the connection under study is general Coxeter tree graphs Γ_n with vertices $1,\ldots,n$. To each vertex i of the graph Γ_n, we assign the generating involution (reflection) s_i of the Coxeter group G_n, the basis vector e_i of the space V_n over the field F_2 of two elements, and the generating transvection w_i of the subgroup $W_n=\langle w_1,\ldots,w_n\rangle$ of $SL(V_n)=SL_n(2)$. The graph Γ_n corresponds to exactly one Coxeter group of rank n: $G_n=\langle s_1,\ldots,s_n \mid (s_is_j)^{m_{ij}},\, m_{ij}\le 3\rangle$, where $m_{ii}=1$, $1\le i<j\le n$, and $m_{ij}=3$ or $m_{ij}=2$ depending on whether Γ_n contains the edge (i,j). The form defined by the graph Γ_n turns V_n into an orthogonal space whose isometry group W_n is generated by the mentioned transvections (3-transpositions) $w_1,\ldots,w_n$; in this case, the relations $(w_iw_j)^{m_{ij}}=1$ hold in W_n and, therefore, the mapping $s_i\to w_i$ $(i=1,\ldots,n)$ is continued to the surjective homomorphism $G_n\to W_n$. In the authors' previous paper, for all groups $W_n=O_{2l}^{\pm}(2)$ $(n=2l\ge 6)$ and $W_n=Sp_{2l}(2)$ $(n=2l+1\ge 7)$, an algorithm was given for enumerating the corresponding tree graphs Γ_n by grouping them according to E-series of nested graphs. In the present paper, a close genetic connection is established between the groups $O_{2l}^{\pm}(2)$ and $Sp_{2l}(2)\times\mathbb{Z}_2$ $(3\le l\le 10)$ and the corresponding (infinite) Coxeter groups G_n with the difference in their genetic codes by exactly one gene (relation). For the groups W_n with the graphs Γ_n from the E-series $\{E_n\}$, $\{I_n\}$, $\{J_n\}$, and $\{K_n\}$, additional word relations are written explicitly.

Keywords: groups with 3-transpositions, Coxeter graphs and groups, genetic codes.

MSC: 20C40

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-234-243

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

Введение

Множество $D = a^G$ инволюций группы G называется классом 3-*транспозиций*, если $|ab| \leq 3$ для любых $a, b \in D$ [1; 2]; подгруппы $H = \langle D \cap H \rangle$ из G называются D-*подгруппами* [1]. Если в G нет D-подгрупп порядков 18 и 54, то G называется группой *с симплектическими 3-транспозициями* [3] (в работе [4] G называлась группой *типа* Σ_4.) В известной теореме Б. Фишера [1; 2, теорема 2.58] группами с симплектическими 3-транспозициями являются симметрические группы S_n, симплектические группы $Sp_{2l}(2)$ и ортогональные группы $O^{\pm}_{2l}(2)$. Б. Фишер в [1] использует описание этих групп из [5].

Группы с 3-транспозициями связаны со многими математическими структурами; это конечные простые группы [2; 6], тройные графы [2, с.125], геометрии пространств Фишера, геометрии ортогональных, симплектических, унитарных и др. пространств [3;5;7;8], алгебры Ли [9; 10], алгебры вершинных операторов и др. (см., например, [11; 12]).

В данной статье установлена тесная “генетическая связь” групп $Sp_{2l}(2)$ и $O^{\pm}_{2l}(2)$ с некоторыми группами (системами) Кокстера, известными во многих областях математики как группы, порожденные отражениями [13, с. 286–293; 14, гл. 9]. *Генетическим кодом* или просто *кодом* группы G называется перечень ее порождающих элементов S и определяющих соотношений R (см. [14, с. 10]). Группа Кокстера G (система Кокстера (G, S)) задается кодом, однозначно определяемым матрицей и графом Кокстера [13, с. 24-25].

В работе доказано, что конечные группы

$$O^{\pm}_{2l}(2)(5 \leq l \leq 10) \ \text{ и } \ Sp_{2l}(2) \times \mathbb{Z}_2 \quad (4 \leq l \leq 9)$$

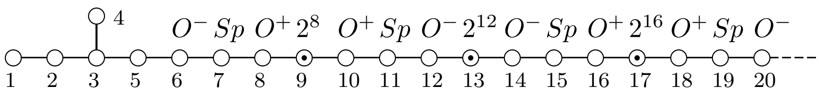
(см. пояснения в замечании 3) могут быть получены из подходящих бесконечных групп Кокстера

$$G_n = \langle s_1, \ldots, s_n \mid R_n \rangle \quad (n = 2l \ \text{ и } \ n = 2l+1 \ \text{ соответственно})$$

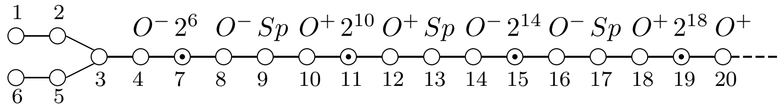
с помощью точно одного дополнительного соотношения.

Системы порождающих 3-транспозиций групп $O^{\pm}_{2l}(2)$ и $Sp_{2l}(2)$ с графами-деревьями Кокстера Γ_n, в которых проявляется указанная связь с группами Кокстера G_n, были частично описаны в [8], а в общем случае — в предыдущей работе авторов (*Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2016. Т. 22, № 3. С. 251–258). Там же графы Γ_n были снабжены разметкой, указывающей, для каких групп $W_n \leq SL_n(2)$ граф Γ_n является графом Кокстера (подробнее см. предложение 1). Мы рассматриваем четыре серии графов Γ_n и групп W_n, детально исследованных в [8]:

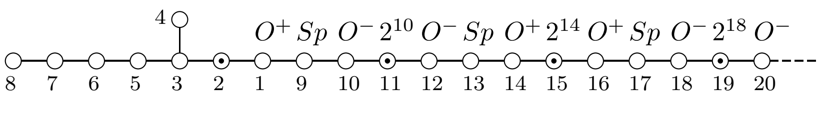
$W(E_n),\ n \geq 6:$



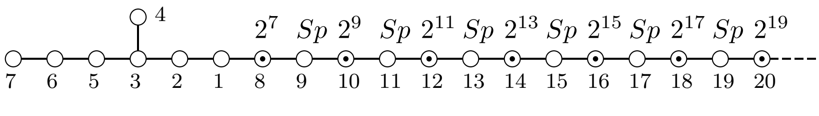
$W(I_n),\ n \geq 7:$



$W(J_n),\ n \geq 9:$



$W(K_n),\ n \geq 9:$



Смысл разметки поясняется в предложении 1.

Каждому графу-дереву Γ_n соответствует группа Кокстера $G_n = G(\Gamma_n)$:

$$G_n = \langle s_1, \ldots, s_n \,|\, s_i^2,\ (s_k s_j)^2,\ (s_i s_j)^3, \text{ где } 1 \le i, j, k \le n,\ (k, j) \notin E(\Gamma_n),\ (i, j) \in E(\Gamma_n)\rangle. \tag{1}$$

Через $X_n = X_n(\Gamma_n)$ обозначим группу

$$X_n = \langle s_1, \ldots, s_n \mid R_n,\ w^2\rangle, \tag{2}$$

где R_n — соотношения Кокстера из (1), а слово $w = w(\Gamma_n)$ определено в (3)–(6):

$$\Gamma_n = E_n\colon w = s_4^v s_9,\ v = s_3s_2s_1s_5s_6s_7s_8s_3s_2s_5s_3s_4s_6s_5s_3s_2s_7s_6s_5s_3s_4s_1s_2s_3s_5s_6s_7s_8; \tag{3}$$

$$\Gamma_n = I_n\colon w = s_4^v s_7,\ v = s_3s_2s_1s_5s_6s_3s_2s_5s_3s_4; \tag{4}$$

$$\Gamma_n = J_n\colon w = s_4^v s_9,\ \text{где } v = s_3s_2s_1s_5s_6s_7s_3s_2s_5s_6s_3s_5s_4s_3s_2s_1 \ \text{ или} \tag{5}$$

$$v = s_3s_2s_1s_5s_6s_7s_8s_3s_2s_5s_3s_4s_6s_5s_3s_2s_7s_6s_5s_3s_4s_1s_2s_3s_5s_6s_7s_8;$$

$$\Gamma_n = K_n\colon w = s_4^v s_8, \quad v = s_3s_2s_1s_5s_6s_7s_3s_5s_6s_2s_3s_5s_4s_3s_2s_1. \tag{6}$$

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема. *При $7 \le n \le 20$ группы X_n, заданные копредставлениями (2) и словами w из (3)–(6), конечны, и для них справедливы следующие утверждения.*

1. *Для групп $X_n = X(E_n)$, определенных в (2) и (3), имеют место изоморфизмы*

i) $X_{4k} \simeq O_{4k}^-(2)$ *при нечетном k и* $X_{4k} \simeq O_{4k}^+(2)$ *при четном k;*

ii) $X_{4k+2} \simeq O_{4k+2}^-(2)$ *при нечетном k и* $X_{4k+2} \simeq O_{4k+2}^+(2)$ *при четном k;*

iii) $X_{4k+3} \simeq Sp_{4k+2}(2) \times \mathbb{Z}_2$.

2. *Для групп $X_n = X(I_n)$, определенных в (2) и (4), имеют место изоморфизмы*

i) $X_{4k} \simeq O_{4k}^-(2)$ *при четном k и* $X_{4k} \simeq O_{4k}^+(2)$ *при нечетном k;*

ii) $X_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2) \times \mathbb{Z}_2$;

iii) $X_{4k+2} \simeq O_{4k+2}^-(2)$ *при нечетном k и* $X_{4k+2} \simeq O_{4k+2}^+(2)$ *при четном k.*

3. *Для групп $X_n = X(J_n)$, определенных в (2) и (5), имеют место изоморфизмы*

i) $X_{4k} \simeq O_{4k}^-(2)$ *при нечетном k и* $X_{4k} \simeq O_{4k}^+(2)$ *при четном k;*

ii) $X_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2) \times \mathbb{Z}_2$;

iii) $X_{4k+2} \simeq O_{4k+2}^+(2)$ *при нечетном k и* $X_{4k+2} \simeq O_{4k+2}^-(2)$ *при четном k.*

4. *Группа $X_{2k+1} = X(K_{2k+1})$, определенная в (2) и (6), изоморфна группе $Sp_{2k}(2) \times \mathbb{Z}_2$.*

З а м е ч а н и е 1. Для групп $O_{2l}^{\pm}(2)$, $Sp_{2l}(2) \times \mathbb{Z}_2$ из теоремы число найденных кодов различно. Так, например, группы $O_8^-(2)$ и $O_{12}^+(2)$ получили по одному коду, $O_{14}^{\pm}(2)$ — по два кода (графы J_n с “двойной кодировкой”), $O_{16}^+(2)$ — три кода, а $Sp_8(2) \times \mathbb{Z}_2$ — четыре кода.

1. Предварительные результаты

Поясним подробнее смысл меток над вершинами рассматриваемых графов Γ_n.

Предложение 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Γ_n *— граф Кокстера группы* $W_n = W(\Gamma_n)$ *изометрий квадратичной формы* F *пространства* V_n *над полем* F_2 *порядка* 2 *с базисом* $(e_1, \ldots, e_n)$.
2. *Если метка вершины* n *равна* $O^{\pm}$, *то* $W_n \simeq O^{\pm}_n(2)$, *при этом* n *— четное число.*
3. *Если над вершиной* n *стоит метка* Sp, *то* $W_n \simeq Sp_{n-1}(2)$ *и* n *— нечетное число.*
4. *Если метка вершины* n *равна* 2^{n-1}, *то группа* W_n *обладает нормальной элементарной абелевой* 2*-подгруппой порядка* 2^{n-1}, n *— нечетное число,* $W_n \simeq 2^{n-1}.O^{\pm}_{n-1}(2)$ *и метки вершин* $n-1$ *и* $n+1$ *совпадают.*
5. *Последовательность меток* $O^{\pm}$ *и* Sp *в* E*-сериях* $\{E_n\}$, $\{I_n\}$, $\{J_n\}$ *имеет период* 8, *т. е. группы* W_n *и* W_{n+8} *одного типа, а в серии* $\{K_n\}$ *— период* 2.

Доказательство. Докажем сначала утверждение 1. По лемме 20 из [8] $W_n = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ — группа изометрий квадратичной формы F_n линейного пространства V_n над полем F_2 с базисом $(e_1, \ldots, e_n)$, где

$$F_n(x) = \sum_{i \in \Gamma_n} x_i^2 + \sum_{(i,j) \in \Gamma_n} x_i x_j \ \text{ для произвольного вектора } \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ из } V_n. \tag{7}$$

Стандартно определяется симплектическая форма f_n на V_n:

$$f_n(x, y) = F_n(x + y) + F_n(x) + F_n(y). \tag{8}$$

Трансвекции $w_i \colon x \to x + f_n(e_i, x) \cdot e_i$, где $i = 1, \ldots, n$, являются 3-транспозициями группы W_n [8, лемма 20], при этом выполняются соотношения

$$w_i^2 = (w_k w_j)^2 = (w_i w_j)^3 = 1, \quad \text{где } 1 \le i, j, k \le n, \quad (k, j) \notin E(\Gamma_n), \quad (i, j) \in E(\Gamma_n). \tag{9}$$

Следовательно, Γ_n — граф Кокстера группы W_n в системе порождающих 3-транспозиций $\{w_1, \ldots, w_n\}$, и утверждение 1 предложения доказано.

Доказательства утверждений 2–4 дословно повторяют доказательство соответствующей части предложения 1 из работы первого автора (*Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2019. Т. 25, № 4. С. 184–188). Утверждение 5 для рассматриваемых в работе графов допускает непосредственную проверку.

Предложение доказано.

Нам понадобятся некоторые свойства групп $O^{\pm}_{2l}(2)$ и $Sp_{2l}(2)$ из [15, теоремы 6.1.1, 6.3.4, табл. 6.4.1] и [16, пп. 3.1.5., 3.2.1, 3.4.1]. Приведем их в виде предложений.

Предложение 2. *При* $l \ge 4$ *группа* $O^{\pm}_{2l}(2)$ *порождена трансвекциями, сохраняющими соответствующую квадратичную форму, ее коммутант* $\Omega^{\pm}_{2l}(2)$ *имеет индекс* 2 *и является простой группой Шевалле:* $\Omega^{+}_{2l}(2) = D_l(2)$, $\Omega^{-}_{2l}(2) = {}^2D_l(2)$.

Предложение 3. *Группа* $Sp_{2l}(2)$ *порождена* 3*-транспозициями (симплектическими трансвекциями), при* $l \ge 3$ *проста (совпадает с группой* $PSp_{2l}(2)$*), не имеет внешних автоморфизмов и является группой Шевалле* $C_l(2)$.

Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ образы порождающих элементов $s_1, \ldots, s_n$ в копредставлениях групп X_n из (2).

Лемма 1. *Отображения $s_1 \to x_i$, $x_i \to w_i$ и $s_i \to w_i$ продолжаются до сюръективных гомоморфизмов $\varphi_1\colon G_n \to X_n$, $\varphi_2\colon X_n \to W_n$ и $\varphi_0\colon G_n \to W_n$ соответственно так, что $\varphi_0 = \varphi_2\varphi_1$ и соответствующая диаграмма коммутативна.*

Доказательство. В силу теоремы Дика [15, теорема 12.2.1], заданий групп G_n (1), X_n (2) и выполнимости в W_n соотношений (9) отображения $s_1 \to x_i$ и $s_i \to w_i$ продолжаются до сюрьективных гомоморфизмов φ_1 и φ_0 соответственно. Для обоснования гомоморфизма φ_2 нужно показать, что $\varphi_0(w^2) = 1$ в группе W_n для соответствующего слова w из (3)–(6).

Рассмотрим случай $\Gamma_n = E_n$, для которого $w = s_4^v s_9$ из (3). Группа $G_8 = G(E_8)$ изоморфна группе Вейля $W(E_8)$ [13] и содержится во всех группах $G_n = G(E_n)$ при $n \geq 8$. Инволюция $s = s_4^v$ в группе $W(E_8)$ является симметрией w_r, определенной максимальным положительным корнем $r = 2p_1 + 4p_2 + 6p_3 + 3p_4 + 5p_5 + 4p_6 + 3p_7 + 2p_8$ в корневой системе типа E_8 с фундаментальной системой корней $\{p_1, \ldots, p_8\}$ (см. [13, с. 314]). Ввиду [8, лемма 3] $\varphi_0(s_r) = w_{r'}$, где $r' = e_4 + e_5 + e_7 \in V_n$. В пространстве V_n векторы r' и e_9 ортогональны относительно формы f_n, и потому $\varphi_0(w^2) = (w_{r'}w_9)^2 = 1$.

Далее, серия графов I_n начинается с графа E_6, а слово $w = s_4^v s_7$ берется из соотношения (4). Как и выше, $W(E_6) \leq G_n = G(I_n)$ при $n \geq 6$, и инволюция s_4^v является симметрией w_r, определенной максимальным положительным корнем $r = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6$ корневой системы типа E_6 [13, с. 310]. В пространстве $V(I_7)$ векторы $r' = e_1 + e_3 + e_6$ и e_7 ортогональны относительно формы f_n, и $\varphi_0(w^2) = (w_{r'}w_7)^2 = 1$.

Для групп $W_n = W(J_n)$ в (5) дано два значения слова w. Как и в случае $\Gamma_n = E_n$, используем вложения $W(E_8) \leq G_n$ при $n \geq 9$. Для второго значения слова w доказательство равенства $\varphi_0(w^2) = 1$ дословно повторяет доказательство для случая $\Gamma_n = E_n$. При первом значении слова w инволюция s_4^v является симметрией w_r, определенной максимальным положительным корнем $r = 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 2p_4 + 3p_5 + 2p_6 + p_7$ корневой системы типа E_7 (см. [13, с. 312]). Для “проекции” $r' = e_2 + e_5 + e_7$ в $V(E_9)$ выполняются равенства $f_9(r', e_9) = 0$ и $\varphi_0(w^2) = (w_{r'}w_9)^2 = 1$.

Наконец, для $\Gamma_n = K_n$ аналогично получаем $W(E_7) \leq G_n$, $s_4^v = w_r$ — симметрия из $W(E_7)$ для $r = 2p_1+3p_2+4p_3+2p_4+3p_5+2p_6+p_7$, $r' = e_2+e_5+e_7$, $f_8(w_{r'}, e_8) = 0$ и $\varphi_0(w^2) = (w_{r'}w_8)^2 = 1$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Используя геометрическое представление групп Кокстера [13, §4], можно показать, что порядки элементов $w(s_1, \ldots, s_m)$ из (3)–(6) в группах G_m бесконечны.

Согласно заданию (2) групп X_n (генетический) код группы X_n содержится в коде группы X_{n+1}. Следовательно, группа X_n вкладывается в X_{n+1} либо изоморфно, либо как некоторая фактор-группа $\overline{X}_n$ группы X_n. С помощью системы GAP для $n \leq 20$ были найдены индексы $[X_{n+1} : X_n]$ и порядки групп X_n, они оказались конечными. Результат сформулируем в виде утверждения.

Предложение 4. *В предположении изоморфной вложимости $X_n < X_{n+1}$ для $6 \leq n \leq 20$ порядки групп $X_n = X(E_n)$ следующие:*

$|X(E_6)| = 51840 = |W(E_6)| = |O_6^-(2)|$;
$|X(E_7)| = 2903040 = |W(E_7)| = 2 \cdot |Sp_6(2)|$;
$|X(E_8)| = 240 \cdot |W(E_7)| = |W(E_8)| = 2 \cdot |O_8^+(2)|$;
$|X(E_9)| = 256 \cdot |W(E_8)| = 2^9 \cdot |O_8^+(2)|$;
$|X(E_{10})| = 527 \cdot |X(E_9)| = 2 \cdot |O_{10}^+(2)|$;
$|X(E_{11})| = 1056 \cdot |X(E_{10})| = 2^2 \cdot |Sp_{10}(2)|$;
$|X(E_{12})| = 2080 \cdot |X(E_{11})| = 2 \cdot |O_{12}^-(2)|$;
$|X(E_{13})| = 4096 \cdot |X(E_{12})| = 2^{13} \cdot |O_{12}^-(2)|$;
$|X(E_{14})| = 8127 \cdot |X(E_{13})| = 2 \cdot |O_{14}^-(2)|$;
$|X(E_{15})| = 16256 \cdot |X(E_{14})| = 2^2 \cdot |Sp_{14}(2)|$;
$|X(E_{16})| = 32640 \cdot |X(E_{15})| = 2 \cdot |O_{16}^+(2)|$;

$|X(E_{17})| = 65536 \cdot |X(E_{16})| = 2^{17} \cdot |O_{16}^{+}(2)|$;
$|X(E_{18})| = 131327 \cdot |X(E_{17})| = 2 \cdot |O_{18}^{+}(2)|$;
$|X(E_{19})| = 262656 \cdot |X(E_{18})| = 2^{2} \cdot |Sp_{18}(2)|$;
$|X(E_{20})| = 524800 \cdot |X(E_{19})| = 2 \cdot |O_{20}^{-}(2)|$.

В силу леммы 1 порядок группы X_n делится на порядок группы W_n (ее тип определяется по предложению 1). Поэтому если предположение $X_n < X_{n+1}$ нарушается при некотором $n = m$, для всех $n \geq m$ порядки X_n будут точно в два раза меньше порядков, приведенных в предложении 4. Отметим, что равенства $|X_{4k+3}| = |Sp_{4k+2}|$ невозможны, поскольку иначе $|X_{4k+4}| = \dfrac{1}{2}|O_{4k+4}^{-}(2)|$ — при четном k и $|X_{4k+4}| = \dfrac{1}{2}|O_{4k+4}^{+}(2)|$ — при нечетном k, что противоречит лемме 1. Итак, порядки интересующих нас групп либо перечислены в предложении 4, либо в два раза меньше порядков, в нем приведенных. Та же ситуация возникает для групп $X(J_n)$ и $X(K_n)$. Для групп $X(I_n)$, рассмотренных в работе первого автора 2019 г., отмеченной выше, такой дихотомии не возникало.

Результаты проведенных расчетов на компьютере сформулируем в следующем виде.

Предложение 5. *Пусть $X_n \in \{X(E_n), X(J_n)\}$. Тогда $|X_n| \in \{2|W_n|, 4|W_n|\}$ при $W_n \simeq Sp_{n-1}(2)$ и $|X_n| \in \{|W_n|, 2|W_n|\}$ при $W_n \simeq O_n^{\pm}(2)$. Если $X_n = X(K_n)$ при $n = 2l + 1$, то $W_n \simeq Sp_{2l}(2)$ и $|X_n| \in \{|W_n|, 2|W_n|\}$.*

Заметим, что во всех случаях $|X_{20}| > 2 \cdot 10^{57}$, а порядок спорадической группы F_1 ("монстра" или "дружественного гиганта") примерно равен $8 \cdot 10^{53}$ [15, с. 6].

2. Доказательство теоремы

Обозначим через H_n коммутант группы G_n. Как следует из [14, с. 180], $[G_n : H_n] = 2$ и $G_n = H_n \leftthreetimes \langle s_1 \rangle$. В леммах 2–5, предусматривая возможность других заданий групп X_n, будем предполагать, что $X_n = \langle s_1, \dots, s_n \mid R_n \cup T_n \rangle$, где $\langle s_1, \dots, s_n \mid R_n \rangle = G_n$, $T_n \subseteq H_n$, и для всех слов $w(s_1, \dots, s_m) \in T_n$ их значения $w(w_1, \dots, w_m)$ в группах W_n равны 1 (по лемме 1).

Лемма 2. *Коммутант Y_n группы X_n порожден элементами $x_i x_j$, где $(i,j) \in E(\Gamma_n)$, состоит из всех элементов группы X_n четной длины в алфавите $\{x_1, \dots, x_n\}$, $[X_n : Y_n] = 2$ и $X_n = Y_n \leftthreetimes \langle x_1 \rangle$. Ограничение гомоморфизма $\varphi_1 \colon G_n \to X_n$ на H_n совпадает с сюръективным гомоморфизмом $\varphi \colon H_n \to Y_n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторим рассуждения из [14, с. 180] для групп Y_n. При $(i,j) \in E(\Gamma_n)$ имеем $(x_i x_j)^3 = 1$ и $x_i x_j = x_j x_i x_j x_i = [x_j, x_i] \in Y_n$. Граф Γ_n связен, и для любых его различных вершин i, k существует соединяющий их путь $i = i_1, i_2, \dots, i_m = k$. Отсюда $x_i x_k = x_i x_{i_2} \cdot x_{i_2} x_{i_3} \cdot \ldots \cdot x_{i_{m-1}} x_{i_m}$, поэтому $x_i x_k \in Y_n$ и Y_n содержит все элементы четной длины из X_n. Определяющие соотношения группы Кокстера G_n и дополнительные соотношения из T_n как элементы подгруппы H_n имеют четную длину в алфавите S_n. Поэтому каждый элемент группы X_n либо четен, либо нечетен, и элементы четной длины составляют в X_n подгруппу Y_n индекса 2 и, очевидно, $X_n = Y_n \leftthreetimes \langle x_1 \rangle$. Наконец, сюръективность гомоморфизма $\varphi : H_n \to Y_n$ следует из включения $\operatorname{Ker} \varphi_1 \leq H_n$.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. По теореме Фишера класс 3-транспозиций D группы $Sp_{2l}(2)$ совпадает с множеством ее симплектических трансвекций [2, теорема 2.58]. В прямом произведении $G = Sp_{2l}(2) \times \mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2 = \langle z \rangle$ — группа порядка 2, множество Dz является классом сопряженных 3-транспозиций, поскольку $|az \cdot bz| = |ab|$ для любых $a, b \in D$. Далее, группа $Sp_{2l}(2)$ проста (предложение 2), и ввиду леммы 2 $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2k+1} = 1$ для некоторых $a_1, \dots, a_{2k+1} \in D$ и $a_1 z \cdot \ldots \cdot a_{2k+1} z = z$. Следовательно, $G = \langle Dz \rangle = Sp_{2l}(2) \times \mathbb{Z}_2$ — группа, порожденная классом сопряженных 3-транспозиций.

Лемма 3. *Если $n = 2l + 1 \geq 9$, $W_n \simeq Sp_{2l}(2)$ и $|X_n| = 2|Sp_{2l}(2)|$, то $X_n \simeq Sp_{2l}(2) \times \mathbb{Z}_2$. Если $n = 2l \geq 6$ и $|X_n| = |O^{\pm}_{2l}(2)|$, то $X_n \simeq O^{\pm}_{2l}(2)$.*

Доказательство. По лемме 1 существует сюрьективный гомоморфизм

$$\varphi_2\colon X_{2l+1} \to Sp_{2l}(2),$$

и ввиду предложения 3 $\mathrm{Ker}\varphi_2 = Z(X_n)$. С другой стороны, по лемме 2 $[X_n : Y_n] = 2$, что ввиду предложения 3 влечет изоморфизмы $Y_n \simeq Sp_{2l}(2)$ и $X_n = Y_n \times \mathbb{Z}_2 \simeq Sp_{2l}(2) \times \mathbb{Z}_2$. Второе утверждение очевидно.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $n = 2l + 1 \geq 9$ и $W_n \simeq Sp_{2l}(2)$, то $|X_n| = 2|Sp_{2l}(2)|$.*

Доказательство. Предположим, что $|X_n| \neq 2|Sp_{2l}(2)|$. Тогда по предложению 5 $|X_n| = 4|Sp_{2l}(2)|$. Пусть $\varphi_2\colon X_n \to Sp_{2l}(2)$ — сюрьективный гомоморфизм из леммы 1. Так как группа $Sp_{2l}(2)$ проста (предложение 3) и $[X_n : Y_n] = 2$ (лемма 2), то $\varphi_2(Y_n) = \varphi_2(X_n)$. Обозначим через Z ядро индуцированного φ_2 гомоморфизма $Y_n \to Sp_{2l}(2)$. Тогда $|Z| = 2$ и, следовательно, $Z = Z(Y_n)$. По лемме 2 $Y_n' = Y_n$, значит, Y_n — нерасщепляемое расширение группы порядка 2 при помощи группы $Sp_{2l}(2)$. Поэтому ввиду [2, с. 53] 2 делит порядок мультипликатора Шура группы $Sp_{2l}(2)$. Однако мультипликатор Шура группы $Sp_{2l}(2)$ при $l > 3$ тривиален [2, табл. 4.1; 17]. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 5. *Если $n = 2l \geq 10$ и $W_n \simeq O^{\pm}_{2l}(2)$, то $X_n \simeq O^{\pm}_{2l}(2)$ и $Y_n \simeq \Omega^{\pm}_{2l}(2)$.*

Доказательство. В силу предложения 5 либо $|X_n| = |O^{\pm}_{2l}(2)|$, либо $|X_n| = 2|O^{\pm}_{2l}(2)|$. Допустим, что $|X_n| = 2|O^{\pm}_{2l}(2)|$. Пусть $\varphi_2\colon X_n \to O^{\pm}_{2l}(2)$ — сюрьективный гомоморфизм из леммы 1. В силу леммы 2 $Y_n = X_n'$ и $[X_n : Y_n] = 2$. Поэтому ввиду предложения 2 $\varphi_2(Y_n) = W_n' \simeq \Omega^{\pm}_{2l}(2)$ и, следовательно, Y_n — нерасщепляемое расширение группы порядка 2 при помощи группы $O^{\pm}_{2l}(2)$. Поэтому ввиду [2, с. 53] 2 делит порядок мультипликатора Шура группы $O^{\pm}_{2l}(2)$. Однако мультипликатор Шура группы $O^{\pm}_{2l}(2)$ при $l > 4$ тривиален [2, табл. 4.1; 17]. Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Заметим, что в силу лемм 4, 5 все группы X_n, определенные в соотношениях (2)–(6), удовлетворяют условиям леммы 3. Для групп $X_n = X(K_n)$ теорема следует из предложений 1, 5 и леммы 3, а для групп $X_n = X(I_n)$ утверждение теоремы доказано в работе первого автора 2019 г., отмеченной выше.

Для групп X_n с графами $\Gamma_n = E_n$ теорема следует из лемм 3, 5 и предложения 1 о разметке графов E_n. Согласно лемме 3 и разметке (предложение 1)

$$X_{4k+3} \simeq Sp_{4k+2}(2) \times \mathbb{Z}_2, \quad Y_{4k+3} \simeq Sp_{4k+2}(2) \ \text{ и } \ X_{4k+\delta} \simeq O^{\pm}_{4k+\delta}(2), \quad Y_{4k+\delta} \simeq \Omega^{\pm}_{4k+\delta}(2),$$

где $\delta = 0, 2$. Знак $\pm$ определяется по разметке графов E_n.

Аналогично, группы $X_n = X(J_n)$ удовлетворяют условиям леммы 3, по которой $Y_n \simeq Sp_{2l}(2)$ и $X_n \simeq Sp_{2l}(2) \times \mathbb{Z}_2$ при $W_n \simeq Sp_{2l}(2)$ и $X_n \simeq O^{\pm}_{2l}(2)$ и $Y_n \simeq \Omega^{\pm}_{2l}(2)$ при $n = 2l$. Согласно разметке графа J_n имеем $X_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2) \times Z_2$ и $X_n \simeq O^{\pm}_{2l}(2)$ для $n = 2l$. Знак $\pm$, как и выше, определяется по разметке графов J_n.

Теорема доказана.

Подведем итоги. Для групп $W_n \in \{Sp_{2l}(2),\ O^{\pm}_{2l}(2)\}$ указаны системы $\{w_1, \ldots, w_n\}$ порождающих их симплектических трансвекций (3-транспозиций), порядки попарных произведений которых заданы графами-деревьями Кокстера Γ_n:

$$w_i^2 = 1,\ (w_k w_j)^2 = 1,\ (w_i w_j)^3 = 1,\ \text{где } 1 \leq i, j, k \leq n,\ (k, j) \notin E(\Gamma_n),\ (i, j) \in E(\Gamma_n). \qquad (10)$$

Каждый граф Γ_n однозначно определяет группу Кокстера G_n:

$$G_n = \langle s_1, \ldots, s_n \,|\, s_i^2 = (s_k s_j)^2 = (s_i s_j)^3 = 1, \text{ где } 1 \leq i, j, k \leq n, \ (k, j) \notin E(\Gamma_n), \ (i, j) \in E(\Gamma_n) \rangle. \tag{11}$$

По теореме Дика группа W_n изоморфна фактор-группе группы G_n (в этом нет ничего особенного, поскольку каждая порожденная инволюциями группа изоморфна фактор-группу подходящей группы Кокстера). Особенность заключается в “близком генетическом родстве” групп W_n и G_n, несмотря на рост рангов: *генетические коды групп* $O^{\pm}_{2l}(2)\}$ $(n = 2l)$ *и групп* $Sp_{2l}(2) \times \mathbb{Z}_2$ $(n = 2l + 1)$ *состоят из кодов групп* G_n *и точно одного дополнительного гена-соотношения* w^2. При этом w есть произведение двух инволюций, одна из которых — s_{m+1} $(6 \leq m \leq 8)$ — принадлежит порождающему множеству, а вторая является симметрией w_r, определенной максимальным положительным корнем корневой системы типа E_m с конечной группой Вейля $G_m = W(E_m)$. Сериям графов E_n, I_n, J_n соответствуют цепи $G_m < G_{m+1} < \ldots < G_n < \ldots$ вложенных друг в друга групп Кокстера. В работе для $n \leq 20$ подтверждена гипотеза о превращении такой цепи в цепь $W_m < W_{m+1} < \ldots < W_n < \ldots$ конечных групп W_n с 3-транспозициями всего одним дополнительным словом-соотношением w^2, принадлежащим группе G_{m+1}. Расположение в цепи интересующих нас групп тройками, разделенными группами с “большими” нормальными 2-подгруппами, и существование тройки спорадических простых групп $M(22)$, $M(23)$ и $M(24)'$ (п. (vi) теоремы Фишера), также интригуют. Возникает вопрос, не является ли такая деталь проявлением некой общей закономерности?

Наконец, полученные результаты позволяют выдвинуть следующую гипотезу о более тесной связи групп $W_n \in \{Sp_{2l}(2), \ O^{\pm}_{2l}(2)\}$ с группами Кокстера G_n.

Г и п о т е з а. Группа W_n — это единственная конечная фактор-группа группы G_n, обладающая тривиальным центром и простым неабелевым коммутантом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fischer B.** Finite groups generated by 3-transpositions // WMI Preprints. Coventry (UK): University of Warwick, 1969.
2. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. М.: Мир, 1985. 352 p.
3. **Hall J.I.** Graphs, geometry, 3-transposition, and symplectic F_2-transvection groups // Proc. London Math. Soc. 1989. Vol. 58. P. 89–111.
4. **Созутов А.И.** О группах типа Σ_4, порожденных 3-транспозициями // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 140–149.
5. **McLaughlin J.** Some subgroups of $SL_n(F_2)$ // Ill. J. Math. 1969. Vol. 13, no. 1. P. 108–115.
6. **Aschbacher M.** 3-transposition groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 260 p.
7. **Matsuo A.** 3-transposition groups of symplectic type and vertex operator algebras // J. Math. Soc. Japan. 2005. Vol 57, № 3. P. 639–649.
8. **Созутов А.И., Кузнецов А.А., Синицин В.М.** О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. мат. электрон. изв. 2013. Т. 10. С. 285–301. doi: 10.17377/semi.2013.10.022 .
9. **Созутов А.И.** Об алгебрах Ли с мономиальным базисом // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 5. С. 188–201.
10. **Hall J.I., Shpectorov S.** The spectra of finite 3-transpositions groups [e-resource]. 2018. 35 p. URL: arXiv:1809.03696 .
11. **Griess R.L. Jr.** A vertex operator algebra related to E_8 with avtomorphism group $O^+(10, 2)$ // Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Vol. 7. Berlin: Publ. de Gruyter, 1998. P. 43–58 .
12. **Cuypers H., Horn M., J. in 't panhuis, Shpectorov S.** Lie algebras and 3-transpositions // J. Algebra. 2012. Vol. 368. P. 21–39. doi: 10.1016/j.jalgebra.2012.06.010 .
13. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Группы, порожденные отражениями. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972. 334 с.
14. **Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж.** Порождающие элементы и определяющие элементы дискретных групп. М.: Наука, 1980. 240 с.
15. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. 310 с.

16. **О'Мира О.** Лекции о симплектических группах. М.: Мир, 1979. 167 с.
17. **Conway J.H. , Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** An atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.

Поступила 19.05.2020
После доработки 4.11.2020
Принята к публикации 16.11.2020

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Синицин Владимир Михайлович
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: sinkoro@yandex.ru

REFERENCES

1. Fischer B. Finite groups generated by 3-transpositions. *WMI Preprints*, Coventry (UK): University of Warwick, 1969.
2. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification.* University Series in Mathematics, N Y: Plenum Publishing Corp., 1982, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu.* Moscow: Mir Publ., 1985, 352 p.
3. Hall J.I. Graphs, geometry, 3-transposition, and symplectic F_2-transvection groups. *Proc. London Math. Soc.*, 1989, vol. 58, no. 1, pp. 89–111. doi: 10.1112/plms/s3-58.1.89 .
4. Sozutov A.I. Groups of type Σ_4 generated by 3-transpositions. *Siberian Math. J.*, 1992, vol. 33, no. 1, pp. 117–124. doi: 10.1007/BF00972943 .
5. McLaughlin J. Some subgroups of $SL_n(F_2)$. *Ill. J. Math.*, 1969, vol. 13, no. 1, pp. 108–115. doi: 10.1215/ijm/1256053741 .
6. Aschbacher M. *3-transposition groups.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997, 260 p. ISBN: 0-521-57196-0 .
7. Matsuo A. 3-transposition groups of symplectic type and vertex operator algebras. *J. Math. Soc. Japan*, 2005, vol. 57, no. 3, pp. 639–649. doi: 10.2969/jmsj/1158241926 .
8. Sozutov A.I., Kuznetsov A.A., Sinitsin V.M. Systems of generators of some groups with 3-transpositions. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2013, vol. 10, pp. 285–301 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2013.10.022 .
9. Sozutov A.I. On Lie algebras with monomial basis. *Siberian Math. J.*, 1993, vol. 34, no. 5, pp. 959–971. doi: 10.1007/BF00971409 .
10. Hall J.I., Shpectorov S. *The spectra of finite 3-transpositions groups* [e-resource]. 2018. 35 p. Available at: arXiv:1809.03696 .
11. Griess R.L., Jr. A vertex operator algebra related to E_8 with avtomorphism group $O^+(10,2)$. In: *The Monster and Lie algebras.* Ohio State Univ. Math. Res. Inst., vol. 7. Berlin: Publ. de Gruyter, 1998, pp. 43–58. ISBN: 9783110161847 .
12. Cuypers H., Horn M., in 't panhuis, Shpectorov S. *Lie algebras and 3-transpositions J. Algebra*, 2012, vol. 368, pp. 21–39. doi: 10.1016/j.jalgebra.2012.06.010 .
13. Bourbaki N. *Groupes et algebres de Lie* (Chapt. IV–VI). Paris: Hermann, 1968, 282 p. doi: 10.1007/978-3-540-34491-9 . Translated to Russian under the title *Gruppy i algebry Li* (glavy IV–VI), Moscow: Mir Publ., 1972, 334 p.
14. Coxeter H.S.M., Moser W.O.J *Generators and Relations for Discrete Groups.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 164 p. doi: 10.1007/978-3-662-21946-1 . Translated to Russian under the title *Porozhdayushchie elementy i opredelyayushchie elementy diskretnykh grupp,* Moscow: Nauka Publ., 1980, 240 p.

15. Kondrat'ev A.S. *Gruppy i algebry Li* [Groups and Lie algebras]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2009, 310 p. ISBN: 978-5-7691-2111-1 .
16. O'Meara O.T. *Symplectic groups.* Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1978, 125 p. ISBN: 0-8218-1516-4 . Translated to Russian under the title *Lektsii o simplekticheskikh gruppakh,* Moscow: Mir Publ., 1979, 167 p.
17. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990 .

Received May 19, 2020
Revised November 4, 2020
Accepted November 16, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00566 A.)

Sozutov Anatoly Ilich, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: sozutov_ai@mail.ru .

Vladimir Mihaylovich Sinitsin, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: sinkoro@yandex.ru .

Cite this article as: V. M. Sinitsin, A. I. Sozutov. On the connection of some groups generated by 3-transpositions with Coxeter groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 234–243 .