ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 519.65

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА ПОЛУОСИ С НАИМЕНЬШИМ ЗНАЧЕНИЕМ НОРМЫ ТРЕТЬЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

С. И. Новиков, В. Т. Шевалдин

В работе рассмотрена следующая задача. Для класса интерполируемых последовательностей $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ действительных чисел, у которых разделенные разности третьего порядка, построенные по произвольным узлам $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, ограничены по модулю фиксированным положительным числом, на классе функций, имеющих почти всюду третью производную, требуется найти функцию f такую, что $f(x_k) = y_k$ $(k \in \mathbb{Z})$, и третья производная которой имеет наименьшую L_∞-норму. В работе получено решение этой задачи на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ для геометрических сеток, последовательность шагов которых $h_k = x_{k+1} - x_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем p $(p > 1)$, т. е. $h_{k+1}/h_k = p$. В случае равномерной сетки $x_k = kh$ $(h > 0, k \in \mathbb{Z})$ на всей оси $\mathbb{R}$ (т. е. при $p = 1$) эта задача была решена Ю. Н. Субботиным в 1965 году и известна как задача Яненко — Стечкина — Субботина экстремальной функциональной интерполяции.

Ключевые слова: интерполяция, разделенная разность, сплайны, разностное уравнение.

S. I. Novikov, V. T. Shevaldin. Extremal interpolation on the semiaxis with the smallest norm of the third derivative.

The following problem is considered. For a class of interpolated sequences $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ of real numbers such that their third-order divided difference constructed for arbitrary knots $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ are bounded in absolute value by a fixed positive number, it is required to find a function f having the third derivative almost everywhere and such that $f(x_k) = y_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ and the third derivative has the smallest L_∞-norm. The problem is solved on the positive semiaxis $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ for geometric grids in which the sequence of steps $h_k = x_{k+1} - x_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ is a geometric progression with ratio p $(p > 1)$; i.e., $h_{k+1}/h_k = p$. In the case of a uniform grid $x_k = kh$ $(h > 0, k \in \mathbb{Z})$ on the whole axis $\mathbb{R}$ (i.e., for $p = 1$), this problem was solved by Yu. N. Subbotin in 1965 and is known as the Yanenko–Stechkin–Subbotin problem of extremal function interpolation.

Keywords: interpolation, divided difference, splines, difference equation.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-210-223

1. Введение

Пусть n — произвольное натуральное число и на числовой оси $\mathbb{R}$ задана сетка узлов $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ вида

$$\mathfrak{a} < \cdots < x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < \cdots < \mathfrak{b}, \tag{1.1}$$

где $\mathfrak{a} = \inf_k x_k$, $\mathfrak{b} = \sup_k x_k$. Здесь $\mathfrak{a}$ — число или $\mathfrak{a} = -\infty$ и аналогично $\mathfrak{b}$ — число или $\mathfrak{b} = +\infty$. Величины $h_k = x_{k+1} - x_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ будем называть шагами сетки (1.1).

Для функции $f : (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathbb{R}$ полагаем $f(x_k) = y_k$ $(k \in \mathbb{Z})$, где $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Как известно (см., например, [1, гл. 1]), разделенные разности произвольного порядка n от функции f на сетке (1.1) определяются рекуррентно при помощи равенств

$$f[x_{k+1}, x_k] = [y_{k+1}, y_k] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k},$$

$$f[x_{k+2}, x_{k+1}, x_k] = [y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{[y_{k+2}, y_{k+1}] - [y_{k+1}, y_k]}{x_{k+2} - x_k},$$

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$f[x_{k+n},\dots,x_k]=[y_{k+n},\dots,y_k]=\frac{[y_{k+n},\dots,y_{k+1}]-[y_{k+n-1},\dots,y_k]}{x_{k+n}-x_k}.$$

В [1] отмечены основные свойства разделенных разностей (в частности, обращение в нуль на многочленах степени $\le n-1$) и приведены другие формы их представления. Если сетка точек интерполяции (1.1) является равномерной, то разделенная разность n-го порядка совпадает с точностью до постоянного положительного множителя с конечной разностью порядка n $\Delta_h^n y_k=\sum_{\nu=0}^n(-1)^{n-\nu}C_n^\nu y_{k+\nu}$, а именно, имеет место равенство

$$f[x_{k+n},\dots,x_k]=\frac{1}{h^n n!}\Delta_h^n f(x_k). \tag{1.2}$$

Класс интерполируемых последовательностей, который мы рассматриваем в настоящей работе, задается следующим образом:

$$Y_n=\Big\{y=\{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}:\ \sup_{k\in\mathbb{Z}}\big|[y_{k+n},y_{k+n-1},\dots,y_k]\big|\le 1\Big\}.$$

Для любой последовательности $y\in Y_n$ рассмотрим класс функций

$$F_n(y)=\big\{f:\ f^{(n-1)}\in AC,\ f^{(n)}\in L_\infty(\mathfrak{a};\mathfrak{b}),\ f(x_k)=y_k\quad(k\in\mathbb{Z})\big\}.$$

Здесь, как обычно, AC — множество локально абсолютно непрерывных функций, а $L_\infty(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ — класс функций, существенно ограниченных на интервале $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ с обычным определением равномерной нормы

$$\|f\|_\infty=\|f\|_{L_\infty(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}|f(x)|.$$

Задача *экстремальной функциональной интерполяции* заключается в точном вычислении (или получении эффективных оценок сверху и снизу) величины

$$A_n(\Delta)=\sup_{y\in Y_n}\inf_{f\in F_n(y)}\|f^{(n)}\|_\infty. \tag{1.3}$$

Другими словами, задача (1.3) состоит в том, чтобы найти наименьшую норму n-й производной интерполирующей функции из класса $F_n(y)$ для "наихудшей" интерполируемой последовательности $y\in Y_n$.

Хорошо известно (см., например, [1, с. 40]) следующее свойство разделенных разностей: если n-я производная некоторой действительной функции $f(x)$ ограничена сверху по модулю некоторой положительной константой M для всех $x\in(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, то абсолютная величина разделенной разности порядка n на любой сетке узлов Δ из промежутка $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ не превосходит числа $M/n!$. Задачу (1.3) можно считать обратной к этому свойству разделенных разностей.

Задача (1.3) по постановке близка к известной интерполяционной проблеме Фавара [2], в которой на последовательность разделенных разностей накладывалось лишь конечное число ограничений.

Для равномерной сетки точек интерполяции (т. е. для конечных разностей n-го порядка) постановка задачи (1.3) принадлежит С. Б. Стечкину (а обратил его внимание на эту задачу Н. Н. Яненко, занимавшийся разностными методами решения дифференциальных уравнений). Ю. Н. Субботин в работе [3] нашел точное решение этой задачи. В дальнейшем подобные задачи были рассмотрены им в пространствах L_q при $1\le q<\infty$ (см. [4]), а также возникли другие многочисленные обобщения и применения теории, развитой в работах Ю. Н. Субботина. Подробный обзор результатов этих исследований содержится в работе авторов 2018 г. (Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225). На указанную работу будем ссылаться ниже как на *обзор.*

Для сеток, не являющихся равномерными, задача (1.3) является более трудной. Случай $n = 1$ сводится к локальной интерполяции ломаными и потому не представляет интереса. Случай $n = 2$ рассмотрен в недавней статье авторов (Новиков С. И., Шевалдин В. Т. О связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 216–224). Отметим также, что оценки производных интерполирующих функций через разделенные разности интерполируемых значений можно найти в работе [5] и приведенной там литературе.

В настоящей работе мы рассматриваем случай $n = 3$ и ограничиваемся интерполяцией на геометрических сетках узлов Δ_p. Это сетки вида (1.1), последовательность шагов $\{h_k\}$ которых образует геометрическую прогрессию со знаменателем $p > 1$, т. е.

$$\frac{h_{k+1}}{h_k} = p \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

При $p = 1$ геометрическая прогрессия переходит в арифметическую, и мы имеем дело с равномерной сеткой.

Цель настоящей работы — найти точное значение величины $A_3(\Delta_p)$ при $p > 1$. Основным результатом является следующая

Теорема 1. *При $p \geq 1$ справедливо равенство*

$$A_3(\Delta_p) = \frac{6(p^2+p+1)}{(p^2-p+1)} \; \frac{(p^2+1)^2}{(p-1)^3(p+1) + 4p\sqrt{p\ (p^2-p+1)}} \; .$$

Для равномерной сетки узлов интерполяции на всей вещественной оси Ю. Н. Субботин [3] доказал, что $A_3(\Delta_1) = (3!) \cdot 3 = 18$ (см. (1.2) при $n = 3$). Это число совпадает с правой частью равенства в теореме 1 при $p = 1$.

Наше доказательство теоремы 1 базируется на подходе Ю. Н. Субботина [3], однако реализация этого подхода с учетом специфики неравномерной геометрической сетки узлов интерполяции на полуоси требует дополнительных исследований.

В первом разделе настоящей работы получено представление разделенной разности третьего порядка функции f, заданной своими значениями в точках геометрической сетки, в виде суммы интегралов, и с его помощью найдена оценка снизу L_∞-нормы третьей производной произвольного интерполянта из класса $F_3(y^*)$ для некоторой, выбранной специальным образом последовательности интерполируемых данных $y^* \in Y_3$. Во втором разделе для произвольной последовательности интерполируемых данных $y \in Y_3$ получена оценка сверху L_∞-нормы третьей производной интерполирующей функции и доказана теорема 1.

При этом экстремальными функциями для величины $A_3(\Delta_p)$ являются интерполирующие на исходной сетке кубические сплайны с неравномерными узлами “склейки” в найденных нами точках $\{t_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, которые расположены между узлами интерполяции, а экстремальной последовательностью $y^* = \{y_k^*\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in Y_3$ интерполируемых данных — та, разделенные разности которой равны по модулю единице и чередуют знаки, т. е. $[y_{k+3}^*, y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*] = (-1)^k,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Представление разделенной разности третьего порядка и оценка снизу нормы интерполирующей функции

Пусть $p > 1$. Для геометрической сетки Δ_p можно, не ограничивая общности, считать, что ее узлы имеют вид

$$x_k = p^k h, \tag{2.1}$$

где $h > 0$ — некоторая константа, $k \in \mathbb{Z}$. Действительно, условия $h_{k+1}/h_k = p$ равносильны разностному уравнению $x_{k+2} - (p+1)x_{k+1} + p\, x_k = 0$, решая которое, получаем $x_k = p^k h + \gamma$ $(k \in \mathbb{Z})$ и замечаем, что величина γ (не зависящая от k) не влияет на значения разделенных разностей.

Поэтому полагаем $\gamma = 0$. Вид узлов (2.1) означает, что они расположены на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, т. е. в определении сетки (1.1) имеем $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{b} = +\infty$.

Получим интегральное представление разделенной разности третьего порядка в удобной для нас форме.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in F_3(y)$ при $p > 1$ справедливо представление*

$$f[x_{k+3}, x_{k+2}, x_{k+1}, x_k] = \frac{1}{2p^{3(k+1)}(p-1)(p^2-1)(p^3-1)h^3}$$

$$\times\Bigg(\int_{x_k}^{x_{k+3}} (x_{k+3}-t)^2 f'''(t)\,dt - (1+p+p^2)\int_{x_k}^{x_{k+2}} (x_{k+2}-t)^2 f'''(t)\,dt$$

$$+p(1+p+p^2)\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1}-t)^2 f'''(t)\,dt\Bigg). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки (2.1) подставляем в формулы, последовательно определяющие разделенные разности третьего порядка. В результате имеем

$$[y_{k+1}, y_k] = \frac{y_{k+1} - y_k}{p^k(p-1)h}\ , \quad [y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{y_{k+2} - (p+1)y_{k+1} + py_k}{p^{2k+1}(p-1)(p^2-1)h^2}\ ,$$

$$[y_{k+3}, y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{y_{k+3} - (1+p+p^2)y_{k+2} + (p^3+p^2+p)y_{k+1} - p^3 y_k}{p^{3(k+1)}(p-1)(p^2-1)(p^3-1)h^3}\ .$$

Функцию $f \in F_3(y)$ записываем с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x-x_k)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x} (x-t)^2 f'''(t)\,dt.$$

Поскольку все внеинтегральные слагаемые уничтожаются в силу того, что разделенная разность третьего порядка обращается в нуль на квадратичных функциях, отсюда получаем представление (2.2). Лемма 1 доказана. $\square$

Утверждение 1. *Для последовательности $y^* = \{y_k^*\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in Y_3$, удовлетворяющей условию*

$$[y_{k+3}^*, y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*] = (-1)^k \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{2.3}$$

и любой функции $f \in F_3(y^*)$ при всех $p > 1$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f'''(x)| \geq \frac{6(p^2+p+1)}{(p^2-p+1)}\ \frac{(p^2+1)^2}{(p-1)^3(p+1) + 4p\sqrt{p\ (p^2-p+1)}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность y^* удовлетворяет условию (2.3) и $f \in F_3(y^*)$. Из леммы 1 после преобразования интегралов имеем

$$f[x_{k+3}, x_{k+2}, x_{k+1}, x_k] = \frac{1}{2p^{3(k+1)}(p-1)(p^2-1)(p^3-1)h^3}$$

$$\times\Bigg(\int_{x_{k+2}}^{x_{k+3}} (x_{k+3}-t)^2 f'''(t)\,dt + \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} [(x_{k+3}-t)^2 - (1+p+p^2)(x_{k+2}-t)^2] f'''(t)\,dt$$

$$+\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}[(x_{k+3}-t)^2-(1+p+p^2)(x_{k+2}-t)^2+p(1+p+p^2)(x_{k+1}-t)^2]f'''(t)\,dt\Bigg).$$

В первом интеграле делаем замену переменной интегрирования, полагая $t = zh^{-1}(x_{k+3} - x_{k+2}) + x_{k+2}$, во втором — $t = zh^{-1}(x_{k+2}-x_{k+1})+x_{k+1}$ и в третьем — $t = zh^{-1}(x_{k+1}-x_k)+x_k$. Тем самым каждый из них сводится к интегралу по промежутку $[0, h]$ и после выполнения элементарных преобразований получаем

$$[y^*_{k+3}, y^*_{k+2}, y^*_{k+1}, y^*_k] = \frac{1}{2h^3(p+1)(p^2+p+1)}\Bigg(p^3\int\limits_0^h(h-z)^2f'''((p^{k+3}-p^{k+2})z+p^{k+2}h)\,dz$$

$$+\,p\int\limits_0^h(h^2+2phz-(1+p)z^2)f'''((p^{k+2}-p^{k+1})z+p^{k+1}h)\,dz+\int\limits_0^h z^2f'''((p^{k+1}-p^k)z+p^kh)\,dz\Bigg). \quad (2.4)$$

Пусть N — натуральное число, $N \geq 3$. Из (2.4) и (2.3) имеем

$$2N+1=\sum_{k=-N}^{N}(-1)^k[y^*_{k+3}, y^*_{k+2}, y^*_{k+1}, y^*_k]$$

$$=\mu\sum_{k=-N}^{N}(-1)^k\Bigg(p^3\int\limits_0^h(h-z)^2f'''((p^{k+3}-p^{k+2})z+p^{k+2}h)\,dz$$

$$+\,p\int\limits_0^h(h^2+2phz-(1+p)z^2)f'''((p^{k+2}-p^{k+1})z+p^{k+1}h)\,dz+\int\limits_0^h z^2f'''((p^{k+1}-p^k)z+p^kh)\,dz\Bigg)=S_1+S_2,$$

где $\mu = \big(2h^3(p+1)(p^2+p+1)\big)^{-1}$ и

$$S_1=\mu\Bigg(p^3(-1)^N\int\limits_0^h(h-z)^2f'''((p^{N+3}-p^{N+2})z+p^{N+2}h)\,dz$$

$$+\,p(-1)^N\int\limits_0^h(h^2+2phz-(1+p)z^2)f'''((p^{N+2}-p^{N+1})z+p^{N+1}h)\,dz$$

$$+\,(-1)^{N-1}p^3\int\limits_0^h(h-z)^2f'''((p^{N+2}-p^{N+1})z+p^{N+1}h)\,dz$$

$$+\,(-1)^{-N+1}\int\limits_0^h z^2f'''((p^{-N+2}-p^{-N+1})z+p^{-N+1}h)\,dz$$

$$+\,p(-1)^{-N}\int\limits_0^h(h^2+2phz-(1+p)z^2)f'''((p^{-N+2}-p^{-N+1})z+p^{-N+1}h)\,dz$$

$$+\,(-1)^{-N}\int\limits_0^h z^2f'''((p^{-N+1}-p^{-N})z+p^{-N}h)\,dz\Bigg),$$

$$S_2 = \mu(p+1)\int\limits_0^h \left(z^2(p^2+1) - 2hp^2z + ph^2(p-1)\right)\sum_{k=-N+2}^{N}(-1)^k f'''((p^{k+1}-p^k)z + p^k h)\,dz.$$

Теперь оцениваем сверху величины $|S_1|$ и $|S_2|$.

$$|S_1| \le 2\mu\left(p^3\int\limits_0^h (h-z)^2dz + p\int\limits_0^h \left|h^2+2phz-(1+p)z^2\right|dz + \int\limits_0^h z^2\,dz\right)\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f'''(x)|$$

$$= \frac{2\mu}{3}h^3(p+1)(p^2+p+1)\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f'''(x)|\Big) = \frac{1}{3}\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f'''(x)|.$$

Для того чтобы получить оценку величины $|S_2|$, определяем функцию

$$g(z) = z^2(p^2+1) - 2hp^2z + ph^2(p-1), \quad z\in[0,h].$$

Относительно z эта функция является квадратным трехчленом и имеет единственный нуль на $[0,h)$ в точке

$$z_0 = z_0(p) = h\Big(\frac{p^2-\sqrt{p(p^2-p+1)}}{1+p^2}\Big).$$

Замечаем, что $z_0(1)=0$, а при $p>1$ имеем $z_0(p)\in(0,h)$, и функция $g(z)$ при переходе через точку $z_0(p)$ меняет знак с плюса на минус. Поэтому

$$|S_2| \le \mu(2N-1)(p+1)\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f'''(x)|\Big)\int\limits_0^h |g(z)|dz$$

$$= \mu(2N-1)(p+1)\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f'''(x)|\Big)\left(\int\limits_0^{z_0} g(z)dz - \int\limits_{z_0}^h g(z)dz\right).$$

Таким образом, из неравенства $2N+1\le|S_1|+|S_2|$ получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f'''(x)| \ge \frac{2N+1}{1/3 + \mu(2N-1)(p+1)\Big(\int_0^{z_0} g(z)\,dz - \int_{z_0}^h g(z)\,dz\Big)}.$$

В этом неравенстве переходим к пределу при $N\to\infty$ и с учетом определения функции $g(z)$ и выражений для μ и z_0 после вычисления интегралов и выполнения элементарных преобразований приходим к оценке

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f'''(x)| \ge \frac{6(p^2+p+1)}{(p^2-p+1)}\,\frac{(p^2+1)^2}{(p-1)^3(p+1)+4p\sqrt{p\,(p^2-p+1)}}\,.$$

Утверждение 1 доказано. □

3. Оценка нормы третьей производной интерполирующей функции и доказательство теоремы 1

Построим функцию $\tilde f(x)$, интерполирующую в точках сетки Δ_p произвольную последовательность $y\in Y_3$. Для этого наряду с исходной сеткой (2.1) рассмотрим еще одну сетку узлов $\tilde\Delta_p = \{t_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, где $t_k = (x_{k+1}-x_k)r + x_k,\ r = (p^2-\sqrt{p(p^2-p+1)})(p^2+1)^{-1}$.

Нетрудно видеть, что при всех $p>1$ имеет место неравенство $0<r<1$, и потому $x_k<t_k<x_{k+1}$ для всех $k\in\mathbb{Z}$, т. е. узлы этих сеток строго чередуются. При $p=1$ имеем $r=0$ и $t_k=x_k$ $(k\in\mathbb{Z})$, что согласуется с выбором узлов интерполяционных сплайнов нечетной степени (см., например, [6, гл. 2]).

Следуя подходу Ю. Н. Субботина [3], полагаем

$$\tilde f'''(x)=\begin{cases} Z_k, & x_k\le x<t_k,\\ Z_{k+1}, & t_k\le x<t_{k+1},\\ Z_{k+2}, & t_{k+1}\le x<t_{k+2},\\ Z_{k+3}, & t_{k+2}\le x<x_{k+3},\end{cases} \tag{3.1}$$

где $\{Z_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ — неизвестные действительные числа.

Поскольку $\tilde f(x_k)=y_k$ $(k\in\mathbb{Z})$, то из (3.1) с помощью леммы 1 получаем

$$Z_{k+3}\int\limits_{t_{k+2}}^{x_{k+3}}(x_{k+3}-t)^2\,dt$$

$$+\,Z_{k+2}\Biggl(\int\limits_{x_{k+2}}^{t_{k+2}}(x_{k+3}-t)^2\,dt\int\limits_{t_{k+1}}^{x_{k+2}}\bigl((x_{k+3}-t)^2-(1+p+p^2)(x_{k+2}-t)^2\bigr)\,dt\Biggr)$$

$$+\,Z_{k+1}\Biggl(\int\limits_{x_{k+1}}^{t_{k+1}}\bigl((x_{k+3}-t)^2-(1+p+p^2)(x_{k+2}-t)^2\bigr)\,dt$$

$$+\int\limits_{t_k}^{x_{k+1}}\bigl((x_{k+3}-t)^2-(1+p+p^2)(x_{k+2}-t)^2+p(1+p+p^2)(x_{k+1}-t)^2\bigr)\,dt\Biggr)$$

$$+\,Z_k\int\limits_{x_k}^{t_k}\bigl((x_{k+3}-t)^2-(1+p+p^2)(x_{k+2}-t)^2+p(1+p+p^2)(x_{k+1}-t)^2\bigr)\,dt$$

$$=2[y_{k+3},y_{k+2},y_{k+1},y_k]\;p^{3(k+1)}(p-1)(p^2-1)(p^3-1)h^3.$$

Вычислив интегралы и воспользовавшись формулами для x_k и t_k, приходим к разностному уравнению относительно неизвестных чисел $\{Z_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$:

$$aZ_{k+3}+bZ_{k+2}+cZ_{k+1}+dZ_k=6p^3(p+1)(1+p+p^2)[y_{k+3},y_{k+2},y_{k+1},y_k]\quad(k\in\mathbb{Z}), \tag{3.2}$$

в котором не зависящие от k коэффициенты a,b,c,d имеют вид

$$a=a(p)=p^6(1-r)^3,$$

$$b=b(p)=p^3[(p+1-r)^3-(1+p+p^2+p^3)(1-r)^3],$$

$$c=c(p)=(p^2+p+1-r)^3-(p^3+p^2+p+1)(p+1-r)^3+(p^5+p^4+2p^3+p^2+p)(1-r)^3,$$

$$d=d(p)=p^3(p+1)(1+p+p^2)-(p^2+p+1-r)^3+(1+p+p^2)(p+1-r)^3-(p+p^2+p^3)(1-r)^3. \tag{3.3}$$

Для исследования разностного уравнения (3.2), (3.3) нам потребуются

Теорема A. *Если все корни полинома с действительными коэффициентами*

$$P_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu z^\nu\ \ (c_n\ne 0)$$

являются отрицательными, простыми и $P_n(-1) \neq 0$, *то разностное уравнение*

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu Z_{k+\nu} = M_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

где $M = \{M_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l_q$ $(1 \le q \le \infty)$, *имеет единственное решение* $Z^0 = \{Z_k^0\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l_q$,

$$Z_k^0 = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_{-s-k} M_s, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s z^s = (P_n(z))^{-1},$$

и для решения справедлива оценка

$$\| Z^0 \|_{l_q} \le \frac{\| M \|_{l_q}}{|P_n(-1)|}.$$

В теореме A существование и единственность решения были доказаны М. Г. Крейном [7], а оценка для $\|Z^0\|_{l_q}$ получена Ю. Н. Субботиным [8, с. 124, 125] (см. также с. 203 в обзоре авторов 2018 г.)

Обозначим правую часть уравнения (3.2) через M_k, т. е.

$$M_k = 6p^3(p+1)(1+p+p^2)[y_{k+3}, y_{k+2}, y_{k+1}, y_k].$$

Замечаем, что последовательность $\{M_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ ограничена, поскольку согласно определению класса Y_3 для любого целого числа k имеет место неравенство $|[y_{k+3}, y_{k+2}, y_{k+1}, y_k]| \le 1$.

Через $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ всюду далее будем обозначать характеристический полином уравнения (3.2). Для того чтобы применить теорему A к разностному уравнению (3.2), (3.3), нужно исследовать полином $P(z)$, доказать, что все его корни отрицательные и простые, вычислить $P(-1)$ и убедиться в том, что $P(-1) \neq 0$. Это будет сделано далее в леммах 2–5.

Полагаем $\lambda = 1 - r$ и переписываем выражения для коэффициентов (3.3) в терминах параметра λ. После выполнения элементарных преобразований имеем

$$a = p^6\lambda^3, \quad b = p^4\big(-\lambda^3(1+p+p^2) + 3\lambda^2 + 3p\lambda + p^2\big),$$

$$c = p^3\big[(1+p+p^2)\lambda^3 - 3(p+1)\lambda^2 - 3(p^2-1)\lambda + 2p(p+1)\big], \quad d = p^3(1-\lambda)^3. \tag{3.4}$$

Лемма 2. *При всех* $p > 1$ *справедливы неравенства* $a = a(p) > 0$, $b = b(p) > 0$, $c = c(p) > 0$, $d = d(p) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$\lambda = 1 - r = \frac{1 + \sqrt{p(p^2-p+1)}}{1+p^2}, \tag{3.5}$$

то $0 < \lambda < 1$ при всех $p > 1$. Отсюда сразу же получаем, что $a(p) > 0$, $d(p) > 0$.

Подставив λ в выражение для $b(p)$, после выполнения несложных преобразований имеем

$$b(p) = \frac{p^4}{(1+p^2)^3}\big[p^8 + 3p^6 + 3p^5 + 9p^3 + 2p + 2 + \sqrt{p(p^2-p+1)}(p+1)(2p^4 - 2p^3 + 7p^2 - 4p + 3)\big].$$

Так как $2p^4 - 2p^3 + 7p^2 - 4p + 3 = 2p^3(p-1) + (7p^2 - 4p + 3)$ и дискриминант квадратного трехчлена $7p^2 - 4p + 3$ отрицателен, то $b(p) > 0$.

Подставив λ в выражение для $c(p)$, получаем

$$c(p) = \frac{p^3}{(1+p^2)^3}\big[2p^8 + 2p^7 + 9p^5 + 3p^3 + 3p^2 + 1 - p(p+1)\sqrt{p(p^2-p+1)}\; q(p)\big],$$

где $q(p) = 3p^4 - 4p^3 + 7p^2 - 2p + 2$.

Исследуем знак полинома $q(p)$. Так как

$$q'(p) = 12p^3 - 12p^2 + 14p - 2 = (12p^2 + 2)(p - 1) + 12p > 0,$$

то полином $q(p)$ возрастает при $p \geq 1$. Поскольку $q(1) > 0$, отсюда заключаем, что $q(p) > 0$.

Теперь в неравенстве $\sqrt{\alpha\beta} \leq (\alpha + \beta)/2$, $(\alpha, \beta \geq 0)$ полагаем $\alpha = p^3$, $\beta = p^2 - p + 1$ и в результате имеем $p\sqrt{p(p^2 - p + 1)} \leq (p^3 + p^2 - p + 1)/2$. Воспользовавшись этим неравенством, после выполнения элементарных преобразований получаем

$$c(p) \geq \frac{p^3}{(1 + p^2)^3}\Big[1 + 3p^2 + 3p^3 + 9p^5 + 2p^7 + 2p^8 - (p+1)(3p^4 - 4p^3 + 7p^2 - 2p - 2)\Big(\frac{p^3 + p^2 - p + 1}{2}\Big)\Big]$$

$$= \frac{p^3\Big(p^8 + 2p^7 + p^6 + 6p^5 - p^4 + 6p^3 - p^2 + 2p\Big)}{2(1 + p^2)^3} = \frac{p^4\Big(p^5(p + 1)^2 + p(p^2 + 1)(6p - 1) + 2\Big)}{2(1 + p^2)^3} > 0.$$

Лемма 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 1. При $p = 1$ имеем $a = a(1) > 0$, $b = b(1) > 0$, $c = c(1) > 0$, $d = d(1) = 0$.

Лемма 3. *Справедливы равенства*

$$P(-1) = -a + b - c + d = \frac{p^3(p + 1)(p^2 - p + 1)}{(1 + p^2)^2}\big[(p - 1)^3(p + 1) + 4p\sqrt{p(p^2 - p + 1)}\big].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначаем $S = -a + b - c + d$. Из (3.4) и (3.5) после выполнения элементарных преобразований приходим к выражению

$$S = -\frac{\big(1 + \sqrt{p(p^2 - p + 1)}\big)^3}{(1 + p^2)^3}\big(2p^6 + 2p^5 + 2p^4 + 4p^3 + 2p^2 + 2p\big)$$

$$+\ 2(p^3 + p^2 + p + 1)\frac{\big(p^3 + p + 1 + \sqrt{p(p^2 - p + 1)}\big)^3}{(1 + p^2)^3}$$

$$-\ 2\frac{\big(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 + \sqrt{p(p^2 - p + 1)}\big)^3}{(1 + p^2)^3} + p^3(p^2 + p + 1)(p + 1).$$

Обозначив $v = \sqrt{p(p^2 - p + 1)}$, переписываем полученное выражение в виде

$$S = \frac{1}{(1 + p^2)^3}\big[-2p^3(1 + p)(1 + p^2)v^3 + 6p^4(1 + p^2)(1 + p^3)v + Q_{12}(p)\big],$$

где $Q_{12}(p) = p^{12} - 2p^{11} + p^{10} + p^9 - 3p^8 + 3p^7 - p^6 - p^5 + 2p^4 - p^3$ — алгебраический полином степени 12 от переменной p. Замечаем, что этот полином имеет корни: $p = 0$ и $p = 1$ третьей кратности, $p = -1$ второй кратности и $p = \pm i$ (i — мнимая единица) первой кратности. Поэтому

$$Q_{12}(p) = p^3(p^2 + 1)(p + 1)^2(p - 1)^3(p^2 - p + 1)$$

и

$$S = \frac{(p + 1)p^3}{(1 + p^2)^2}\big[-2v^3 + 6p(p^2 - p + 1)v + (p + 1)(p - 1)^3(p^2 - p + 1)\big]$$

$$= \frac{p^3(p + 1)(p^2 - p + 1)}{(1 + p^2)^2}\big[(p - 1)^3(p + 1) + 4p\sqrt{p(p^2 - p + 1)}\big].$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *При всех* $p \geq 2$ *выполняется неравенство*

$$P\Big(-\frac{1}{p^2}\Big) < 0.$$

Доказательство. Подставив в выражение

$$P\Big(-\frac{1}{p^2}\Big) = -a\frac{1}{p^6} + b\frac{1}{p^4} - c\frac{1}{p^2} + d$$

значения коэффициентов a, b, c, d из (3.4), получаем

$$P\Big(-\frac{1}{p^2}\Big) = -(p+1)\big(2\lambda^3(1+p^2) - 3\lambda^2(1+p^2) + p^2\big).$$

Достаточно установить, что при $p \geq 2$ выполняется неравенство

$$2\lambda^3(1+p^2) - 3\lambda^2(1+p^2) + p^2 > 0.$$

Заменяя λ его значением из (3.5), после выполнения несложных вычислений имеем

$$2\lambda^3(1+p^2) - 3\lambda^2(1+p^2) + p^2 = \frac{1}{(1+p^2)^2}\, G(p),$$

где

$$\begin{aligned} G(p) &= p^6 - 3p^5 + 5p^4 - 5p^2 + 3p - 1 + 2p(p^2 - 4p + 1)\sqrt{p(p^2 - p + 1)} \\ &= (p^2 - 1)(p^4 - 3p^3 + 6p^2 - 3p + 1) + 2p(p^2 - 4p + 1)\sqrt{p(p^2 - p + 1)}. \end{aligned}$$

Далее замечаем, что $G(2) = 33 - 12\sqrt{6} > 0$, и при $p = 2$ лемма 4 доказана. □

Поскольку выражение $p^2 - 4p + 1$ меняет знак в точке $p = 2 + \sqrt{3}$, то дальнейшее доказательство при $p > 2$ разбивается на два случая.

1) Пусть $p \geq 2 + \sqrt{3}$. Воспользовавшись неравенством

$$\sqrt{p(p^2 - p + 1)} \geq \sqrt{p(p^2 - 2p + 1)} = \sqrt{p}(p-1) > p - 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} G(p) &> (p^2 - 1)(p^4 - 3p^3 + 6p^2 - 3p + 1) + 2p(p^2 - 4p + 1)(p - 1) \\ &= (p-1)^2(p^4 - p^3 + 4p^2 - p + 1) = (p-1)^2\big[p^3(p-1) + (4p^2 - p + 1)\big] > 0, \end{aligned}$$

поскольку $4p^2 - p + 1 > 0$.

2) Пусть теперь $2 < p < 2 + \sqrt{3}$. Как и при доказательстве леммы 2, в неравенстве $\sqrt{\alpha\beta} \leq (\alpha + \beta)/2$ полагаем $\alpha = p^3$, $\beta = p^2 - p + 1$ и в результате имеем

$$2p\sqrt{p(p^2 - p + 1)} \leq p^3 + p^2 - p + 1.$$

Применив это неравенство к выражению для $G(p)$, получаем

$$G(p) \geq (p^2 - 1)(p^4 - 3p^3 + 6p^2 - 3p + 1) + (p^2 - 4p + 1)(p^3 + p^2 - p + 1)$$

$$= p(p^5 - 2p^4 + 2p^3 - 4p^2 + p - 2) = p(p^2 + 1)^2(p - 2).$$

Поскольку $p > 2$, то $G(p) > 0$, и лемма 4 полностью доказана. □

Лемма 5. *При всех* $1 \leq p < 2$ *справедливо неравенство*

$$P\Big(-\frac{1}{4p}\Big) < 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $1 \le p < 2$. Подставив $z = -1/4p$ в $P(z)$ и воспользовавшись равенствами (3.4), имеем

$$P\Big(-\frac{1}{4p}\Big) = -\frac{a}{64p^3} + \frac{b}{16p^2} - \frac{c}{4p} + d$$

$$= -\frac{p^2}{64}\big[5(p+4)(4p+1)\lambda^3 - 60(4p+1)\lambda^2 - 12(p-4)(4p+1)\lambda + 4p(7p-8)\big].$$

Заменяем λ его выражением через p (см. (3.5)) и выполняем элементарные преобразования. В результате получаем

$$P\Big(-\frac{1}{4p}\Big) = -\frac{p^2}{64(1+p^2)^3}\big(q_1(p) + \sqrt{p(p^2-p+1)}\; q_2(p)\big), \tag{3.6}$$

где

$$q_1(p) = 28p^8 - 32p^7 - 204p^6 + 324p^5 - 189p^4 + 9p^3 + 51p^2 - 7p + 8,$$

$$q_2(p) = -48p^6 + 200p^5 + 17p^4 - 165p^3 + 53p^2 - 25p - 12.$$

Достаточно доказать, что $q_1(p) + \sqrt{p(p^2-p+1)}\; q_2(p) > 0$.

Прежде всего покажем, что $q_2(p) > 0$. Замечаем, что полином $q_2(p)$ имеет нули в точках $p = -1$, $p = -1/4$, и потому

$$q_2(p) = -(p+1)(4p+1)\tau(p),$$

где $\tau(p) = 12p^4 - 65p^3 + 74p^2 - 35p + 12$. Следовательно, остается убедиться в том, что $\tau(p) < 0$ при $1 \le p < 2$.

Поскольку $\tau''(p) = 2(72p^2 - 195p + 74)$ и квадратный трехчлен имеет два вещественных корня, один из которых больше двух, а другой лежит в интервале $(0,1)$, то $\tau''(p) < 0$ при $1 \le p < 2$. Поэтому $\tau'(p)$ при всех $1 \le p < 2$ убывает, а так как $\tau'(1) < 0$, то $\tau'(p) < 0$ на $[1,2)$. Следовательно, полином $\tau(p)$ также убывает, и поскольку $\tau(1) = -2 < 0$, то он отрицателен и потому $q_2(p) > 0$.

Нетрудно видеть, что $\sqrt{p(p^2-p+1)} \ge p$ при всех $p \ge 1$. Таким образом,

$$q_1(p) + \sqrt{p(p^2-p+1)}\; q_2(p) \ge q_1(p) + pq_2(p) = V(p),$$

где $V(p) = 28p^8 - 80p^7 - 4p^6 + 341p^5 - 354p^4 + 62p^3 + 26p^2 - 19p + 8$.

Перепишем полином $V(p)$ в виде

$$V(p) = 8 + p(p-1)c_1 + p(p-1)^2 c_2 + p(p-1)^3 Q(p), \tag{3.7}$$

где $Q(p) = 28p^4 + 4p^3 - 76p^2 + 129p + 265, c_1 = 148, c_2 = 394$, и докажем, что при всех $p \in [1,2)$ выполняется неравенство $Q(p) > 0$.

Так как $Q''(p) = 8(42p^2 + 3p - 12)$ и квадратный трехчлен имеет два вещественных корня, один из которых отрицателен, а другой принадлежит интервалу $(0,1)$, то $Q''(p) > 0$ при всех $p \ge 1$. Поэтому $Q'(p)$ возрастает, а поскольку $Q'(1) > 0$, то $Q'(p) > 0$ при $p \ge 1$. Следовательно, полином $Q(p)$ также возрастает и благодаря тому, что $Q(1) > 0$, приходим к неравенству $Q(p) > 0$.

Теперь из представления (3.7) при всех $p \ge 1$ имеем

$$V(p) > p(p-1)^3\; Q(p) \ge 0$$

и, возвращаясь к равенству (3.6), получаем $P(-1/4p) < 0$. Лемма 5 доказана. □

Переходим к получению оценки сверху L_∞-нормы третьей производной построенного интерполянта.

Утверждение 2. *Пусть $y \in Y_3$ — произвольная последовательность. Тогда при всех $p > 1$ для функции $\tilde{f} \in F_3(y)$ справедливо неравенство*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |\tilde{f}'''(x)| \leq \frac{6(p^2+p+1)}{(p^2-p+1)}\ \frac{(p^2+1)^2}{(p-1)^3(p+1)+4p\sqrt{p\ (p^2-p+1)}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения функции $\tilde{f}(x)$ имеем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |\tilde{f}'''(x)| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |Z_k|$$

и числа $\{Z_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяют разностному уравнению (3.2), (3.3). Убедимся, что к нему можно применить теорему A.

Из леммы 2 вытекает, что при $p > 1$ характеристический полином $P(z)$ уравнения (3.2) не имеет корней на полуоси $[0, +\infty)$. Следовательно, либо все три его корня (с учетом кратностей) являются отрицательными, либо один из корней отрицательный, а два других — комплексно сопряженные с ненулевыми мнимыми частями. Покажем, что реализуется первая из этих двух возможностей, и все корни являются простыми.

Действительно, из леммы 2 имеем $P(0) = d > 0$, а из леммы 3 легко видеть, что $P(-1) > 0$. При $p \geq 2$ согласно лемме 4 выполняется неравенство $P(-1/p^2) < 0$, а при $1 \leq p < 2$ согласно лемме 5 справедливо неравенство $P(-1/4p) < 0$, и поскольку $\lim_{z\to-\infty} P(z) = -\infty$, то при всех $p > 1$ полином $P(z)$ имеет три перемены знака на полуоси $(-\infty, 0)$. Отсюда следует, что полином $P(z)$ имеет три различных отрицательных корня.

К разностному уравнению (3.2) применяем теорему A при $n = 3$, $q = \infty$ и получаем, что оно имеет единственное ограниченное решение $Z^0 = \{Z_k^0\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, и для этого решения выполняется оценка

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |Z_k^0| \leq \frac{6(p^2+p+1)}{(p^2-p+1)}\ \frac{(p^2+1)^2}{(p-1)^3(p+1)+4p\sqrt{p\ (p^2-p+1)}}.$$

Тот факт, что функция $\tilde{f}(x)$ принадлежит классу $F_3(y)$, доказывается в точности так же, как был установлен аналогичный результат в [3, с. 33] для равномерной сетки точек интерполяции.

Тем самым утверждение 2 доказано. □

З а м е ч а н и е 2. Функция $\tilde{f} \in F_3(y)$ является кубическим сплайном минимального дефекта с узлами “склейки” в точках сетки $\tilde{\Delta}_p$ и интерполяцией в точках Δ_p.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $p > 1$. Для доказательства оценки снизу величины $A_3(\Delta_p)$ воспользуемся утверждением 1, а доказательства оценки сверху — утверждением 2. В результате получаем

$$A_3(\Delta_p) \geq \inf_{f\in F_3(y^*)} \|f'''\|_\infty \geq \frac{6(p^2+p+1)}{(p^2-p+1)}\ \frac{(p^2+1)^2}{(p-1)^3(p+1)+4p\sqrt{p\ (p^2-p+1)}},$$

$$A_3(\Delta_p) \leq \|\tilde{f}'''\|_\infty \leq \frac{6(p^2+p+1)}{(p^2-p+1)}\ \frac{(p^2+1)^2}{(p-1)^3(p+1)+4p\sqrt{p\ (p^2-p+1)}}.$$

Поскольку правые части этих неравенств совпадают, теорема 1 доказана. □

Возникает естественный вопрос: при каких значениях $p \in [1, +\infty)$ величина $A_3(\Delta_p)$ принимает наименьшее значение? Ответ на него дает

Следствие. *Имеет место соотношение*

$$\inf_{p\in[1,+\infty)} A_3(\Delta_p) = 6,$$

в котором точная нижняя грань достигается при $p \to +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замечаем, что $\lim_{p\to+\infty} A_3(\Delta_p) = 6$. С другой стороны, нетрудно доказать, что при всех $p \geq 1$ выполняется неравенство $A_3(\Delta_p) > 6$.

Действительно, неравенство

$$\frac{p^2+p+1}{p^2-p+1} > 1$$

при положительных p очевидно, а неравенство

$$(p^2+1)^2 - (p-1)^3(p+1) \geq 4p\sqrt{p(p^2-p+1)}$$

эквивалентно неравенству $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, если в нем положить $\alpha = p^3$, $\beta = p^2 - p + 1$. Отсюда вытекает, что при $p \geq 1$ выполняется $A_3(\Delta_p) > 6$. Следствие доказано. □

Заключение

Таким образом, для третьей производной найдено точное решение задачи экстремальной функциональной интерполяции в случае интерполяции на неравномерной геометрической сетке. Получение основного результата (теоремы 1) стало возможным благодаря тому, что для геометрической сетки узлов разностное уравнение (3.2) оказалось уравнением с постоянными (а не переменными) коэффициентами, теория решения которых была ранее развита в работах М. Г. Крейна [7] и Ю. Н. Субботина [8].

Остается открытым вопрос: верно ли, что при $n \geq 3$ для *любой* сетки точек интерполяции $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ величина $A_n(\Delta)$ является конечной?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с.
2. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19. P. 281–306.
3. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
4. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
5. **Kunkle Th.** Favard's interpolation problem in one or more variables // Constructive Approxim. 2002. Vol. 18. P. 467–478. doi: 10.1007/s00365-001-0015-7 .
6. **Алберг Дж,, Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения М.: Мир, 1972. 316 с.
7. **Крейн М.Г.** Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи матем. наук. 1958. Т. 13, № 5 (83). С. 3–120.
8. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.

Поступила 9.09.2020
После доработки 23.10.2020
Принята к публикации 2.11.2020

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Gel'fond A.O. *Calculus of finite differences.* Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1971, ser. International Monographs on Advanced Mathematics and Physics, 451 p. Original Russian text published in Gel'fond A.O. *Ischislenie konechnykh raznostey.* Moscow: Nauka Publ., 1967.
2. Favard J. Sur l'interpolation. *J. Math. Pures Appl.*, 1940, vol. 19, no. 9, pp. 281–306.
3. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
4. Subbotin Yu.N. Functional interpolation in the mean with smallest n derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 31–63.
5. Kunkle Th. Favard's interpolation problem in one or more variables. *Constructive Approxim.*, 2002, vol. 18, pp. 467–478. doi: 10.1007/s00365-001-0015-7 .
6. Ahlberg J., Nilson E., Walsh J. *The theory of splines and their applications.* N Y: Acad. Press, 1967, 284 p. ISBN: 9781483222950 . Translated to Russian under the title *Teoriya splainov i ee prilozheniya.* Moscow: Mir Publ., 1972, 316 p.
7. Krein M.G. Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1958, vol. 13, no. 5(83), pp. 3–120 (in Russian).
8. Subbotin Yu.N. Extremal problems of functional interpolation, and mean interpolation splines. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 127–185.

Received September 30, 2020
Revised October 23, 2020
Accepted November 2, 2020

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center.

Sergey Igorevich Novikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Cite this article as: S. I. Novikov, V. T. Shevaldin. Extremal interpolation on the semiaxis with the smallest norm of the third derivative, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 210–223 .