ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 519.651 + 517.518.454 + 517.518.86

ОБ УСТОЙЧИВОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ВЫБОРКЕ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ[1]

С. В. Конягин, А. Ю. Шадрин

Рассматривается задача об устойчивости восстановления аналитической функции по значениям $2m+1$ коэффициентов ее ряда Фурье, которые могут быть взяты из произвольного симметричного множества $\delta_m \subset \mathbb{Z}$ мощности $2m+1$. Известно, что для $\delta_m = \{j\colon |j| \le m\}$, т. е. если коэффициенты берутся последовательно, наибольшей возможной скоростью сходимости при устойчивом восстановлении является экспонента от квадратного корня из m. Любой метод с большей скоростью будет сильно неустойчивым. В частности, экспоненциальная сходимость влечет экспоненциальную же неустойчивость. В этой работе мы показываем, что при свободе выбора множеств (δ_m) существуют операторы восстановления (ϕ_{δ_m}), которые сходятся с экспоненциальной скоростью и при этом почти устойчивы, а именно, с не более чем линейным ростом чисел обусловленности $\kappa_{\delta_m} < c \cdot m$. Мы также показываем, что этот результат не может быть заметно усилен, а именно, для любых множеств (δ_m) и любых операторов восстановления (ϕ_{δ_m}) экспоненциальная сходимость возможна, только если $\kappa_{\delta_m} \ge c \cdot m^{1/2}$.

Ключевые слова: коэффициенты Фурье, устойчивое восстановление, неравенства для многочленов.

S. V. Konyagin, A. Yu. Shadrin. On stable reconstruction of analytic functions from Fourier samples.

Stability of reconstruction of analytic functions from the values of $2m+1$ coefficients of its Fourier series is studied. The coefficients can be taken from an arbitrary symmetric set $\delta_m \subset \mathbb{Z}$ of cardinality $2m+1$. It is known that, for $\delta_m = \{j : |j| \le m\}$, i.e., if the coefficients are consecutive, the fastest possible convergence rate in the case of stable reconstruction is an exponential function of the square root of m. Any method with faster convergence is highly unstable. In particular, exponential convergence implies exponential ill-conditioning. In this paper, we show that, if we are free to choose any sets (δ_m), there exist reconstruction operators (ϕ_{δ_m}) that have exponential convergence rate and are almost stable; specifically, their condition numbers grow at most linearly: $\kappa_{\delta_m} < c \cdot m$. We also show that this result cannot be noticeably strengthened. More precisely, for any sets (δ_m) and any reconstruction operators (ϕ_{δ_m}), exponential convergence is possible only if $\kappa_{\delta_m} \ge c \cdot m^{1/2}$.

Keywords: Fourier coefficients, stable reconstruction, polynomial inequalities.

MSC: 65D15, 41A10, 41A17, 42A16

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-182-195

1. Введение

1.1. История вопроса. Обозначим через $L_2[-1,1]$ пространство комплекснозначных измеримых на $[-1,1]$ функций, таких что $\|f\|_2 := \Big\{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx\Big\}^{1/2} < \infty$, и для функции $f \in L_2[-1,1]$ зададим обычным образом (нормализованные) коэффициенты и частичные суммы ее ряда Фурье

$$\widehat{f}_j := \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} f(t) e^{ij\pi t}\,dt, \quad \mathcal{F}_m(f,x) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{|j|\le m} \widehat{f}_j e^{ij\pi x}.$$

Хорошо известно, что если f аналитична и периодична, то частичные суммы $\mathcal{F}_m(f)$ сходятся экспоненциально по m

$$\|f - \mathcal{F}_m(f)\|_2 \le c_f \cdot \rho^{-m}, \quad \rho = \rho_f > 1.$$

[1]Работа выполнена первым автором при поддержке гранта Правительства Российской Федерации (проект 14.W03.31.0031).

В отсутствие периодичности экспоненциальная сходимость ряда Фурье пропадает, более того в этом случае скорость сходимости $\mathcal{F}_m(f) \to f$ лишь линейна на компактных подмножествах $(-1,1)$, а равномерная сходимость на всем интервале $[-1,1]$ отсутствует — возле концевых точек $x = \pm 1$ мы наблюдаем известный эффект Гиббса.

В связи с этим возникает следующая задача об оптимальном восстановлении аналитической непериодической функции по ее коэффициентам Фурье.

З а д а ч а 1. Найти семейство отображений $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}\colon L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, линейных или нелинейных, таких что

(i) $\phi_m(f)$ зависит только от первых $2m+1$ коэффициентов Фурье $(\widehat{f}_j)_{|j|\le m}$,

(ii) для любой аналитической функции f выполнено

$$\|f - \phi_m(f)\|_2 \le c \cdot \sigma^{-m^\tau},$$

с некоторыми $\sigma > 1$ и $\tau \in (0,1]$.

По поводу данной постановки естественно возникает вопрос, почему для восстановления непериодической функции мы хотим использовать выборку из коэффициентов периодического ряда Фурье. Мы могли бы взять разложение f по каким-либо ортогональным многочленам, например, по многочленам Чебышева, и немедленно получить экспоненциальную сходимость

$$\|f - P_m(f)\|_2 \le c \cdot \sigma^{-m}, \quad \sigma > 1.$$

Ответ заключается в том, что во многих прикладных задачах коэффициенты Фурье (или ряд других априори заданных функционалов) инкорпорированы в метод получения информации, и нам приходится работать именно с этим массивом данных. Примерами таких задач (для коэффициентов Фурье) являются магнитно-резонансная томография и спектральные методы решений уравнений в частных производных.

Для решения задачи 1 было предложено много различных методов (см. [3], где приведена обширная библиография со сравнительным анализом). При этом было замечено, что все методы с экспоненциальной скоростью сходимости страдают той или иной степенью неустойчивости, в то время как устойчивые методы сходятся с существенно меньшей скоростью.

Этот феномен получил исчерпывающее объяснение в работе Б. Адкока, А.К. Хансена, А. Шадрина [3], а именно, они показали, что устойчивый метод восстановления аналитических функций по первым $2m+1$-коэффициентам Фурье не может сходиться быстрее экспоненты от квадратного корня из m.

Для более точного описания этого результата нам понадобятся следующие обозначения. Для отображения $\phi_m\colon L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$ такого, что $\phi_m(f)$ зависит только от $(\widehat{f}_j)_{|j|\le m}$, определим его число обусловленности как

$$\kappa_m := \sup_f \lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\|g\|_m \le \epsilon} \frac{\|\phi_m(f+g) - \phi_m(f)\|_2}{\|g\|_m}. \tag{1.1}$$

Здесь $\|f\|_2 := \left\{ \int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx \right\}^{1/2}$ — обычная L_2-норма, введенная ранее, а $\|g\|_m^2 := \sum\limits_{|j|\le m} |\widehat{g}_j|^2$— дискретная ℓ_2-норма первых $2m+1$ коэффициентов Фурье функции g. Таким образом, число κ_m показывает, в какой степени малые возмущения во входных данных (первые $2m+1$ коэффициентов Фурье) порождают малые (или большие) возмущения в функции восстановления на выходе.

Так же для компактного подмножества $E \subset \mathbb{C}$, содержащего в своей внутренности $[-1,1]$, обозначим через $B(E)$ банахово пространство функций, непрерывных на E и аналитических внутри E, с нормой $\|f\|_E := \sup_{z\in E} |f(z)|$.

Теорема A [5; Eq. (7); 1, Theorem 1.1]. *Для любого компакта $E \subset \mathbb{C}$ существует последовательность отображений $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ с равномерно ограниченными числами обусловленности κ_m такая, что*

$$\|f - \phi_m(f)\|_2 \le c\sigma^{-\sqrt{m}}\|f\|_E \quad \forall\ f \in B(E), \quad \forall\ m \ge m_0,$$

с некоторыми константами $c < \infty$ и $\sigma > 1$.

Теорема B [3, Theorem 4.1]. *Для заданного компакта $E \subset \mathbb{C}$ предположим, что $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ таковы, что*

(i) *величина $\phi_m(f)$ зависит только от значений $(\widehat{f}_j)_{|j|\le m}$,*

(ii) *для некоторых $c < \infty$, $\sigma > 1$ и $\tau \in (1/2, 1]$ выполнено*

$$\|f - \phi_m(f)\|_2 \le c\sigma^{-m^\tau}\|f\|_E \quad \forall\ f \in B(E), \quad \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Тогда числа обусловленности κ_m удовлетворяют неравенствам

$$\kappa_m > \gamma^{m^{2\tau-1}}$$

для некоторого $\gamma > 1$ и всех достаточно больших m.

Таким образом, наибольшей возможной скоростью сходимости при устойчивом восстановлении по первым $2m+1$ коэффициентам Фурье является экспонента от корня из m. Любой метод с большей скоростью будет неустойчивым, в частности, экспоненциальная сходимость влечет экспоненциальную неустойчивость.

1.2. Новые результаты. Теоремы A, B оставили открытыми ряд вопросов, один из которых состоит в следующем (см. [3, с. 137]).

В о п р о с 1. Можно ли построить устойчивый метод восстановления по $2m+1$ коэффициентам Фурье со скоростью сходимости большей, чем экспонента от квадратного корня, если выбирать коэффициенты не последовательно, а из произвольного набора частот δ_m размерности $2m+1$?

Этот вопрос отчасти обусловлен результатами аналогичной задаче 1 задачи восстановления аналитической функции по ее значениям в m равноудаленных точках на $[-1,1]$ (см. [4]). Для этой задачи мы имеем те же результаты, что и в теоремах A, B, а именно, устойчивый метод восстановления по значениям в m равноудаленных точках x_i сходится не быстрее $\sigma^{-\sqrt{m}}$, но при этом, если мы вольны выбирать m точек, то выбирая в качестве x_i узлы многочлена Чебышева T_m степени m, мы можем построить по значениям $f(x_i)$ устойчивый метод с экспоненциальной скоростью сходимости (например, метод наименьших квадратов).

Таким образом, вопрос можно поставить так: существуют ли среди множества коэффициентов Фурье $(\widehat{f}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ подмножества $(\widehat{f}_{j_k})_{|k|\le m}$, аналогичные чебышевским наборам узлов, т. е. дающие устойчивое восстановление с экспоненциальной скоростью по m?

В настоящей работе, отвечая на этот вопрос, мы показываем, что при восстановлении по $2m+1$ коэффициентам Фурье из произвольной выборки δ_m мы не можем достичь экспоненциальной сходимости ни с каким методом при росте чисел обусловленности, как $\kappa_{\delta_m} = o(m^{1/2})$, но мы можем достичь ее с определенным методом, для которого $\kappa_{\delta_m} = \mathcal{O}(m)$.

Пусть $\delta_m^+ \subset \mathbb{N}$ — произвольный набор из m натуральных чисел, $\delta_m^- := -\delta_m^+$, и пусть

$$\delta_m := \delta_m^+ \cup \delta_m^- \cup \{0\}, \quad |\delta_m| = 2m+1\,,$$

т. е. мы будем рассматривать методы восстановления с выборкой коэффициентов Фурье $(\widehat{f}_{j_k})_{|k|\le m}$ с частотами из симметричного множества, включающего $\widehat{f}_0$.

Далее определим дискретную норму, связанную с набором δ_m, $\|f\|^2_{\delta_m} := \sum\limits_{j\in\delta_m} |\widehat{f_j}|^2$, и для оператора $\phi_{\delta_m}\colon L^2[-1,1] \to L^2[-1,1]$ такого, что значения $\phi_{\delta_m}(f)$ зависят только от $(\widehat{f_j})_{j\in\delta_m}$, определим число обусловленности

$$\kappa_{\delta_m} = \sup_f \lim_{\epsilon>0} \sup_{g\colon \|g\|_{\delta_m}\le\epsilon} \frac{\|\phi_{\delta_m}(f+g) - \phi_{\delta_m}(f)\|_2}{\|g\|_{\delta_m}}.$$

Мы доказываем следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого компакта $E \subset \mathbb{C}$ с некоторыми $c, c' < \infty$ и $\sigma > 1$ существуют последовательность множеств $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ и последовательность операторов $(\phi_{\delta_m})_{m\in\mathbb{N}}$ такие, что*

$$\|f - \phi_{\delta_m}(f)\|_2 \le c\sigma^{-m}\|f\|_E \quad \forall f \in B(E), \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

и для чисел обусловленности выполнены неравенства

$$\kappa_{\delta_m} \le c'm.$$

Теорема 2. *Для заданного компакта $E \subset \mathbb{C}$ предположим, что операторы (ϕ_{δ_m}) таковы, что*

(i) *величина $\phi_{\delta_m}(f)$ зависит только от значений $(\widehat{f_j})_{j\in\delta_m}$,*

(ii) *для некоторых $c < \infty$, $\sigma > 1$ и $\tau \in (1/2, 1]$ выполнено*

$$\|f - \phi_{\delta_m}(f)\|_2 \le c\sigma^{-m^\tau}\|f\|_E \quad \forall\, f \in B(E), \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда числа обусловленности κ_{δ_m} удовлетворяют неравенствам

$$\kappa_{\delta_m} > c'm^{\tau-1/2}$$

с некоторым c' для всех достаточно больших m.

Таким образом, любой метод восстановления по $2m+1$ коэффициентам Фурье со скоростью сходимости большей, чем экспонента от m^τ с каким-либо $\tau > 1/2$, будет иметь по меньшей мере степенную неустойчивость — независимо от того, какую выборку из $2m+1$ коэффициентов мы используем.

В то же время существуют выборка из $2m+1$ коэффициентов Фурье и метод восстановления с линейно растущим числом обусловленности $\kappa_m \le cm$, сходящийся экспоненциально.

1.3. Две экстремальные задачи для алгебраических многочленов. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество всех многочленов степени не выше n. Ключевую роль в доказательстве теорем A, B играли оценки следующей величины, нахождение которой относится к экстремальным задачам на классе многочленов

$$B_{n,m} := \sup\{\|p\|_2\colon p \in \mathcal{P}_n,\ \|p\|_m = 1\}. \tag{1.3}$$

В [3] для всех $n, m \in \mathbb{N}$ была доказана нижняя оценка

$$B_{n,m} \ge c_1\,\gamma_1^{n^2/m}, \tag{1.4}$$

и отсюда выведена теорема B о неустойчивости. Теорема A об устойчивости экспоненциально-корневой сходимости следует из верхней оценки

$$B_{n,m} \le c_3 \quad \forall\, m > c_4 n^2,$$

полученной в [5] (см. также [1]). В [3] (а по сути, ранее в [5]) была выдвинута гипотеза о том, что верхняя оценка выглядит так же, как и нижняя, т. е. $B_{n,m} \le c_2\,\gamma_2^{n^2/m}$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, но она остается недоказанной.

В этой работе мы также прежде всего решаем экстремальную задачу на классе многочленов о нахождении оценок для аналогичной (1.3) величины

$$B_{n,\delta_m} := \sup\{\|p\|_2 \colon p \in \mathcal{P}_n,\ \|p\|_{\delta_m} = 1\},$$

и затем по той же схеме, что в [2] и [3] выводим теоремы 1, 2.

Наши результаты относительно B_{n,δ_m} состоят в следующем.

Теорема 3. *Существуют постоянные A, C такие, что для каждого n существует множество $\delta_m \subset \mathbb{Z}$ такое, что*

$$|\delta_m| \le An, \quad B_{n,\delta_m} \le Cn. \tag{1.5}$$

Теорема 4. *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $n \le 2m$, и любого множества δ_m, $|\delta_m| = 2m+1$,*

$$B_{n,\delta_m} \ge \frac{cn}{\sqrt{m}}, \tag{1.6}$$

где c — некоторая постоянная.

Верхняя оценка (1.5) влечет теорему 1 о существовании почти устойчивого метода с экспоненциальной сходимостью, а из нижней оценки (1.6) выводится теорема 2 об отсутствии абсолютной устойчивости для любого подобного метода.

В заключение заметим, что нижние оценки в теоремах 4 и 2 показывают, что наши верхние оценки в теоремах 3 и 1 не могут быть заметно усилены — максимум, чего можно достичь, это понизить $\mathcal{O}(m)$ до $\mathcal{O}(\sqrt{m})$.

Мы предполагаем, что такое улучшение возможно, т. е. что нижняя оценка (1.6) достижима, а именно, для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $n \le cm$, найдется множество δ_m, $|\delta_m| = 2m+1$, такое, что

$$B_{n,\delta_m} \le \frac{c'n}{\sqrt{m}}. \tag{1.7}$$

1.4. Организация работы. В разд. 2 мы, исходя из верхней и нижней оценок B_{n,δ_m}, приведенных в (1.5), (1.6), доказываем теоремы 1, 2. Сами верхняя и нижняя оценки (1.5) и (1.6) выводятся в разд. 4 и 5 соответственно, при этом верхняя оценка в разд. 4 основана на результатах из разд. 3. Наши основные усилия приложены к разд. 3, где в лемме 1 мы получаем верхнюю оценку для равномерной нормы алгебраического многочлена степени n на малом отрезке, скажем, $\|p_n\|_{[-1/2,1/2]}$, через максимум значений этого многочлена $\max_i |p(x_i)|$ на наборе из $\mathcal{O}(n)$ точек x_i, квази-равномерно распределенных на большем отрезке $[-1,1]$. Этот результат может быть полезен и для других задач восстановления и тем самым представляет самостоятельный интерес.

2. Доказательства теорем 1, 2

2.1. Доказательство теоремы 1. Для заданных $m, n \in \mathbb{N}$, $n \le 2m$, и множества $\delta_m \subset \mathbb{Z}$, $|\delta_m| = 2m+1$, определим отображение $\phi^*_{\delta_m} : f \to f_{n,\delta_m}$, которое каждой функции $f \in L_2[-1,1]$ сопоставляет многочлен $f_{n,\delta_m} \in \mathcal{P}_n$, построенный по методу наименьших квадратов по значениям коэффициентов Фурье из набора $(\widehat{f}_j)_{j\in\delta_m}$,

$$f_{n,\delta_m} := \arg\min_{p\in\mathcal{P}_n} \Big\{ \sum_{j\in\delta_m} \big|\widehat{f}_j - \widehat{p}_j\big|^2 \Big\}.$$

Точно так же, как это сделано в [2] для $\delta^0_m = \{j \colon |j| \le m\}$, можно показать, что для произвольного $\delta_m \in \mathbb{Z}$ отображение $f \to f_{n,\delta_m}$ обладает следующими свойствами:

(a) имеет место точное неравенство Лебега,

$$\|f - f_{n,\delta_m}\|_2 \le B_{n,\delta_m} E_n(f)_2, \tag{2.1}$$

где $E_n(f)_2 := \inf_{p\in\mathcal{P}_n} \|f - p\|_2$ — величина наилучшего приближения f многочленами степени $\le n$;

(b) для числа обусловленности κ_{n,δ_m} отображения $f \to f_{n,\delta_m}$ имеет место равенство

$$\kappa_{n,\delta_m} = B_{n,\delta_m}. \tag{2.2}$$

Далее, для функции f, непрерывной на компакте $E \supset [-1, 1]$ и аналитической внутри него, выполнено [6]

$$E_n(f)_2 \le c\rho^{-n}\|f\|_{B(E)}, \tag{2.3}$$

а из теоремы 3 следует, что для каждого m найдется n такое, что

$$n \ge \frac{m}{c}, \quad B_{n,\delta_m} \le c' m. \tag{2.4}$$

Таким образом, объединяя (2.1)–(2.4) и полагая $n = \lfloor m/c \rfloor$, мы получаем для метода наименьших квадратов $\phi^*_{\delta_m}: f \to f_{n,\delta_m}$ оценки

$$\|f - f_{n,\delta_m}\|_2 \le c_1 m\rho^{-m}\|f\|_{B(E)}, \quad \kappa_{n,\delta_m} \le c_2 m,$$

и это доказывает теорему 1. □

2.2. Доказательство теоремы 2. Точно так же, как это сделано в [3, с. 134–135] для $\delta^0_m = \{j : |j| \le m\}$, можно показать, что для последовательности произвольных $\delta_m \in \mathbb{Z}$ при выполнении условий теоремы 2, а именно, при условии $\|f - \phi_{\delta_m}\|_2 \le c\sigma^{m^\tau}\|f\|_{B(E)}$ для чисел обусловленности операторов (ϕ_{δ_m}) мы будем иметь с некоторым $\alpha > 0$

$$\kappa_{\delta_m} \ge \frac{1}{2} B_{n,\delta_m}, \quad n = \left\lfloor \frac{1}{2}\alpha m^\tau \right\rfloor, \quad m \ge m_0.$$

По теореме 2 для любого δ_m выполнено неравенство $B_{n,\delta_m} \ge cn/\sqrt{m}$, тем самым $\kappa_{\delta_m} \ge c' m^{\tau-1/2}$, и теорема 2 доказана. □

3. Лемма о многочленах

Докажем лемму, которая может представлять самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ точками $(x_i)^k_1$ такое, что*

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b, \quad x_{i+1} - x_i \le \frac{b-a}{c_0 n}, \quad c_0 = 16. \tag{3.1}$$

Пусть далее $[a', b']$ — отрезок вдвое меньшей длины и с тем же центром, что $[a, b]$. Тогда для любого многочлена $Q \in \mathcal{P}_n$ выполнено

$$\max_{x\in[a',b']} |Q(x)| \le c_1 \max_{1\le i\le k} |Q(x_i)| \quad \forall\ Q \in \mathcal{P}_n. \tag{3.2}$$

З а м е ч а н и е. Константа $c_0 = 16$ в (3.1) может быть уменьшена, но мы не стремились к ее улучшению. Мы будем в дальнейшем использовать c_0 без ее численного значения.

Доказательство. 1) Обозначим

$$X = \{x_1, \dots, x_k\}, \quad u = \frac{b-a}{8n}, \quad n' = \Big\lfloor \frac{n+1}{2} \Big\rfloor.$$

Возьмем произвольную точку $x \in [a', b']$ и заметим, что $2n' + 1 > n$, и, следовательно, для любого $Q \in \mathcal{P}_n$ значение $Q(x)$ выражается по интерполяционной формуле Лагранжа через значения Q в $2n'+1$ точках. Далее, в п. 2) мы построим специальную выборку точек $(y_j)_{j=-n'}^{n'}$ из X, а в пп. 3), 4) покажем, что константа Лебега оператора интерполирования по этим точкам ограничена в точке x, и, значит, ограниченность $Q(y_j)$ влечет ограниченность $Q(x)$.

2) Заметим, что условие (3.1) означает, что любой отрезок $I \subset [a,b]$ с длиной $|I| \ge u/2$ содержит точку из X. Следовательно, мы можем выбрать точки $y_{-1}, y_0, y_1 \in X$ так, что

$$y_{-1} \in \Big[x-u, x-\frac{u}{2}\Big], \quad y_0 \in \Big[x-\frac{u}{4}, x+\frac{u}{4}\Big], \quad y_1 \in \Big[x+\frac{u}{2}, x+u\Big]. \tag{3.3}$$

Точно так же для $i \le -2$ мы найдем точки $y_i \in X$ такие, что

$$4(i+1)u \le y_i - x \le 4(i+1)u + u, \quad -n' \le i \le -2, \tag{3.4}$$

и для $i \ge 2$ — точки $y_i \in X$ такие, что

$$4(i-1)u - u \le y_i - x \le 4(i-1)u, \quad 2 \le i \le n'. \tag{3.5}$$

Заметим, что в (3.4), (3.5) все отрезки, из которых мы выбираем y_i, содержатся в $[a,b]$, поскольку $|y_{\pm n'} - x| \le 4(n'-1)u \le 2nu = (b-a)/4$, и, значит, наше определение корректно. Таким образом,

$$a \le y_{-n'} < y_{-n'+1} < \dots < y_{n'} \le b.$$

3) Наша цель — показать, что с некоторой постоянной c_1 для любого набора точек (y_j), удовлетворяющих (3.3)–(3.5), справедливо неравенство

$$|Q(x)| \le c_1 \max_{-n' \le j \le n'} |Q(y_j)|, \tag{3.6}$$

из которого очевидно следует (3.2). Так как $Q \in \mathcal{P}_n$ и $2n'+1 > n$, то верна формула Лагранжа

$$Q(x) = \sum_{j=-n'}^{n'} \alpha_j Q(y_j), \quad \alpha_j = \prod_{i \ne j} \frac{x-y_i}{y_j-y_i}, \tag{3.7}$$

и, следовательно, для (3.6) нужно показать, что $\sum_{j=-n'}^{n'} |\alpha_j| < c_1$.

4) Сначала оценим α_j при $j = -1, 0, 1$. Пусть $y_j \le x$. Для произвольного $i = 2, \dots, n'-1$ имеем

$$\Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| = 1 - \frac{x-y_j}{y_i-y_j}, \qquad \Big|\frac{x-y_{-(i+1)}}{y_j-y_{-(i+1)}}\Big| = \Big(1 - \frac{x-y_j}{x-y_{-(i+1)}}\Big)^{-1}.$$

Заметим, что $y_i - y_j < x - y_{-(i+1)}$, поскольку в силу (3.4), (3.5)

$$(y_i - y_j) - (x - y_{-i-1}) = (y_i - x) - (y_j - y_{-(i+1)}) \le (4i-3)u - (4i-2)u < 0,$$

поэтому

$$\Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| \cdot \Big|\frac{x-y_{-(i+1)}}{y_j-y_{-(i+1)}}\Big| \le 1, \quad i = 2, \dots, n'-1,$$

и, значит,

$$|\alpha_j| \le \Big|\frac{x-y_{n'}}{y_j-y_{n'}}\Big| \prod_{-2 \le i \le 1,\, i \ne j} \Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big|.$$

Для оставшихся здесь множителей выводим

$$\begin{aligned} y_j \le x \quad &\Rightarrow \quad \Big|\frac{x-y_{n'}}{y_j-y_{n'}}\Big| \quad \le \quad 1, \\ (3.3) \quad &\Rightarrow \quad \Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| \quad \ll \quad 1 \quad (-2 \le i \le 1,\ i \ne j), \end{aligned}$$

и, следовательно, $|\alpha_j| \ll 1$. Случай $y_j \ge x$ разбирается аналогично.

Таким образом,

$$|\alpha_j| \ll 1 \quad (j = -1, 0, 1). \tag{3.8}$$

5) Теперь рассмотрим случай $j \le -2$. Для произвольного $i = 2, \dots, n' + j$ имеем

$$\begin{aligned} \Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| \quad &= \quad 1 - \frac{x-y_j}{y_i-y_j}, \\ \Big|\frac{x-y_{j-i}}{y_j-y_{j-i}}\Big| \quad &= \quad \Big(1 - \frac{x-y_j}{x-y_{j-i}}\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь снова имеем $y_i - y_j < x - y_{j-i}$, так как в силу (3.4), (3.5)

$$(y_i - y_j) - (x - y_{j-i}) = (y_i - x) - (y_j - y_{j-i}) \le (4i-3)u - (4i-1)u < 0,$$

и поэтому

$$\Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| \cdot \Big|\frac{x-y_{j-i}}{y_j-y_{j-i}}\Big| \le 1, \quad i = 2, \dots, n' + j.$$

Далее, заметим, что в силу $y_j < x$ также выполнены неравенства

$$\Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| < 1, \quad i = n' + j + 1, \dots, n'.$$

Значит,

$$\prod_{i=2}^{n'} \Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| \prod_{i=-n'}^{j-2} \Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| < 1,$$

откуда следует, что

$$|\alpha_j| \le \Big|\frac{x-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}}\Big| \prod_{i=j+1}^{1} \Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big|. \tag{3.9}$$

Теперь заметим, что в силу (3.4)

$$\Big|\frac{x-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}}\Big| \ll |j|,$$

а из неравенств (3.3), (3.4) получаем

$$\Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| \le |j|^{-1} \quad (i = -1, 0, 1).$$

Отсюда и из (3.9) следует, что

$$|\alpha_j| \le |j|^{-2} \prod_{i=j+1}^{-2} \Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big|. \tag{3.10}$$

Вновь, используя (3.4) и обозначая $\nu = i - j$, мы находим

$$\Big|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\Big| \le \frac{4(i-1)u}{[4(i-j)-1]u} = \frac{4(|j|-\nu-1)}{4\nu-1} = \frac{|j|-\nu-1}{\nu}\,\frac{4\nu}{4\nu-1},$$

значит,

$$\prod_{i=j+1}^{-2}\left|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\right| \le \prod_{\nu=1}^{|j|-2}\frac{|j|-\nu-1}{\nu}\prod_{\nu=1}^{|j|-2}\frac{4\nu}{4\nu-1}.$$

Легко видеть, что

$$\prod_{\nu=1}^{|j|-2}\frac{|j|-1-\nu}{\nu}=1,$$

таким образом,

$$\prod_{i=j+1}^{-2}\left|\frac{x-y_i}{y_j-y_i}\right| \le \prod_{\nu=1}^{|j|-2}\frac{4\nu}{4\nu-1}. \tag{3.11}$$

Далее,

$$\log\prod_{\nu=1}^{|j|-2}\frac{4\nu}{4\nu-1} \le \sum_{\nu=1}^{j}\log\Bigl(1+\frac{1}{4\nu-1}\Bigr)=\sum_{\nu=1}^{j}\Bigl(\frac{1}{4\nu}+O(\nu^{-2})\Bigr)=\frac{1}{4}\log j+O(1),$$

следовательно,

$$\prod_{\nu=1}^{|j|-2}\frac{4\nu}{4\nu-1} \ll |j|^{1/4}.$$

Подставляя это неравенство в (3.11) и полученное неравенство — в (3.10), мы выводим, что

$$|\alpha_j| \le |j|^{-7/4} \quad (j\le -2).$$

6) Аналогично показываем, что

$$|\alpha_j| \le |j|^{-7/4} \quad (j\ge 2).$$

Отсюда и из (3.8) следует, что

$$\sum_{j=-n'}^{n'}|\alpha_j| \ll 1,$$

и (3.6) вытекает из (3.7). Тем самым лемма доказана. □

4. Верхняя оценка для B_{n,δ_m}

Для $m,n\in\mathbb{N}$, где $n\le 2m$, и произвольного множества $\delta_m^+\subset\mathbb{N}$ с $|\delta_m^+|=m$, определим величину

$$B(n,\delta_m^+) := \sup_{p\in\mathcal{P}_n^0}\biggl(\sum_{1\le|j|<\infty}\Bigl|p\Bigl(\frac{1}{j}\Bigr)\Bigr|^2\biggr)^{1/2}\biggl(\sum_{|j|\in\delta_m^+}\Bigl|p\Bigl(\frac{1}{j}\Bigr)\Bigr|^2\biggr)^{-1/2}, \tag{4.1}$$

где супремум берется по множеству $\mathcal{P}_n^0$ всех ненулевых многочленов p степени $\le n$ с комплексными коэффициентами, удовлетворяющих условию $p(0)=0$.

Точно так же, как это сделано в [3] для $\delta_m^0=\{j\colon |j|\le m\}$, можно показать, что для произвольного $\delta_m=\delta_m^+\cup\delta_m^-\cup\{0\}$ величина B_{n,δ_m}, определенная в (1.3), совпадает с (4.1):

$$B_{n,\delta_m}=B(n,\delta_m^+).$$

Таким образом, верхняя и нижняя оценки для B_{n,δ_m} будут следовать из таковых для $B(n,\delta_m^+)$, и именно оценками для $B(n,\delta_m^+)$ мы и будем заниматься в этом и следующем разделах.

Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, и пусть дано разбиение отрезка $[1/r, 1/r]$ точками*

$$x_k = \frac{1}{\lfloor r^2/k \rfloor}, \quad x_{-(k-1)} = -x_k, \quad 1 \le k \le r.$$

Тогда для всех точек x_k выполнено

$$|x_{k+1} - x_k| \le \frac{2}{r^2}, \quad |k| \le r-1. \tag{4.2}$$

Доказательство. Заметим, что для $1 \le k \le r$ выполнено

$$\frac{r^2}{k+1} < \left\lfloor \frac{r^2}{k} \right\rfloor \le \frac{r^2}{k}. \tag{4.3}$$

Действительно, правое неравенство верно по определению, а для доказательства левого положим $N = \lfloor r^2/k \rfloor$, тогда $r^2 = kN + k'$, где $N \ge r \ge k > k' \ge 0$, и, значит, $(k+1)N > kN + k' = r^2$, что и дает в (4.3) оценку снизу. Из (4.3) для $x_k = 1/\lfloor r^2/k \rfloor$ получаем

$$\frac{k}{r^2} \le x_k < \frac{k+1}{r^2}, \quad 1 \le k \le r,$$

что доказывает (4.2) для $|k| \ge 1$. Для $k = 0$ имеем $-x_0 = x_1 = 1/r^2$, т. е. $x_1 - x_0 = 2/r^2$, что завершает доказательство леммы. □

Теорема 5. *Существуют постоянные A, C такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется множество δ_m такое, что выполнены следующие неравенства:*

$$|\delta_m| \le An, \quad B(n, \delta_m^+) \le Cn.$$

Доказательство. Положим

$$\delta_m^+ := \delta_m^1 \cup \delta_m^2, \quad \delta_m^1 := \{1, \dots, 2r\}, \quad \delta_m^2 := \{\lfloor r^2/k \rfloor \colon 1 \le k \le r\},$$

где $r = c_0 n$, а число $c_0 \in \mathbb{N}$ является константой из неравенства (3.1) леммы 1. Множества δ_m^1 и δ_m^2 имеют примерно $r/2$ общих точек, но мы будем использовать простейшую оценку

$$|\delta_m^+| \le 3r = 3c_0 n.$$

Заметим также, что

$$\mathbb{N} \setminus \delta_m^+ \subset \{j \in \mathbb{N} \colon j > 2r\}.$$

Возьмем произвольный многочлен $p \in \mathcal{P}_n$ с условием $p(0) = 0$ и положим $q(x) := p(x)/x$.

Рассмотрим отрезок $[a, b] = [-1/r, 1/r]$ и разбиение этого отрезка $2r$ точками $(x_k = 1/j_k)$, где $|j_k| \in \delta_m^2 = \{1/\lfloor r^2/k \rfloor : 1 \le k \le r\}$. В силу леммы 2

$$|x_{k+1} - x_k| \le \frac{2}{r^2} = \frac{b-a}{r} = \frac{b-a}{c_0 n},$$

и, значит, применима лемма 1, из которой следует, что для отрезка $I = [a', b'] = [-1/2r, 1/2r]$ выполнено

$$\|p\|_I \ll \max_{|j| \in \delta_m^2} \left| p\Big(\frac{1}{j}\Big) \right|, \tag{4.4}$$

$$\|q\|_I \ll \max_{|j| \in \delta_m^2} \left| q\Big(\frac{1}{j}\Big) \right|. \tag{4.5}$$

Мы будем оценивать величину $B(n,\delta_m^+,p)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned}\big[B(n,\delta_m^+,p)\big]^2 &:= \frac{\sum_{1\le|j|<\infty}|p(\frac{1}{j})|^2}{\sum_{|j|\in\delta_m^+}|p(\frac{1}{j})|^2} = 1+\frac{\sum_{|j|\in\mathbb{N}\setminus\delta_m^+}}{\sum_{|j|\in\delta_m^+}} \le 1+\frac{\sum_{|j|>2r}}{\sum_{|j|\in\delta_m^2}}\\ &= 1+\frac{\sum_{2r<|j|\le r^2}}{\sum_{|j|\in\delta_m^2}}+\frac{\sum_{|j|>r^2}}{\sum_{|j|\in\delta_m^2}}\\ &=: 1+\frac{N_1}{D_1}+\frac{N_2}{D_2}.\end{aligned}$$

Для первого (после единицы) слагаемого имеем

$$N_1 := \sum_{2r<|j|\le r^2}\Big|p\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big|^2 \le 2r^2\|p\|_I^2,$$

и далее

$$\|p\|_I^2 \overset{(4.4)}{\ll} \max_{|j|\in\delta_m^2}\Big|p\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big|^2 < \sum_{|j|\in\delta_m^2}\Big|p\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big|^2 = D_1,$$

так что

$$\frac{N_1}{D_1} \ll r^2 = c_0^2n^2.$$

Для второго (после единицы) слагаемого имеем

$$N_2 := \sum_{|j|>r^2}\Big|p\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big|^2 = \sum_{|j|>r^2}\Big(\frac{1}{j}\Big)^2\Big|q\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big|^2 \le \|q\|_I^2\sum_{|j|>r^2}\Big(\frac{1}{j}\Big)^2 \le \frac{2}{r^2}\|q\|_I^2,$$

и далее

$$\|q\|_I^2 \overset{(4.5)}{\ll} \max_{|j|\in\delta_m^2}\Big|q\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big|^2 = \max_{|j|\in\delta_m^2} j^2\Big|p\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big|^2 \le r^4\sum_{|j|\in\delta_m^2}\Big|p\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big|^2 = r^4D_2,$$

так что

$$\frac{N_2}{D_2} \ll r^2 = c_0^2n^2.$$

Таким образом,

$$\big[B(n,\delta_m^+,p)\big]^2 \ll n^2 \quad \forall\ p\in\mathcal{P}_n^0,$$

значит,

$$B(n,\delta_m^+) \ll n,$$

и теорема доказана. □

5. Нижняя оценка для B_{n,δ_m}

Теорема 6. *Для любых $n,m\in\mathbb{N}$, $n\le 2m$, и любого множества $\delta_m^+\subset\mathbb{N}$, $|\delta_m^+|=m$, справедливо неравенство*

$$B(n,\delta_m^+) \ge \frac{cn}{\sqrt{m}},$$

где c — абсолютная константа.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3. *Для достаточно большого* $n \in \mathbb{N}$ *существует многочлен* P *степени* $\le n$ *со следующими свойствами.*

1) $P(0) = 0$ (*т. е.* $P \in \mathcal{P}_n^0$);
2) $P(1/j) = 0$ *для* $1 \le |j| \le n/3$;
3) $\max_{x\in[-3/n,3/n]} |P(x)| \le 1$;
4) $P(x) \ge c_1$ *для* $c_2/n^2 \le x \le c_3/n^2$, *где* c_1, c_2, c_3 *— абсолютные константы.*

Из этой леммы легко получить утверждение теоремы. В самом деле, для любого множества $\delta_m^+ \subset \mathbb{N}$, $|\delta_m^+| = m$ в силу свойств 2), 3) мы имеем

$$\sum_{|j|\in\delta_m^+} P\Big(\frac{1}{j}\Big)^2 \le 2m,$$

в то время как свойство 4) дает

$$\sum_{1\le|j|<\infty} P\Big(\frac{1}{j}\Big)^2 \ge \sum_{c_2/n^2\le 1/j\le c_3/n^2} P\Big(\frac{1}{j}\Big)^2 \gg n^2.$$

Тем самым,

$$\big[B(n,\delta_m^+,P)\big]^2 := \frac{\sum_{1\le|j|<\infty}|P(1/j)|^2}{\sum_{|j|\in\delta_m^+}|P(1/j)|^2} \gg \frac{n^2}{m},$$

и теорема 6 следует. □

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3. Пусть T_k — многочлен Чебышева степени k, т. е. $T_k(t) = \cos(k\arccos t)$, $|t| \le 1$. Известно [6], что

$$T_k'(1) = k^2, \quad T_k''(1) = \max_{t\in[-1,1]} |T_k''(t)| = \frac{k^2(k^2-1)}{3},$$

следовательно,

$$T_k'(t) \ge \frac{2k^2}{3} \quad \Big(1 - \frac{1}{k^2} \le t \le 1\Big). \tag{5.1}$$

Кроме того, в силу неравенства Бернштейна

$$|T_k'(t)| \le \frac{k}{\sqrt{1-t^2}} \quad (|t| < 1). \tag{5.2}$$

Положим

$$Q_k(u) := uT_k'(1-u^2),$$

так что Q_k является нечетным многочленом степени $2k-1$. Из (5.1) следует

$$Q_k(u) \ge \frac{k}{3}, \quad \frac{1}{2k} \le u \le \frac{1}{k}. \tag{5.3}$$

С другой стороны, в силу (5.2)

$$|Q_k(u)| \le k, \quad |u| \le 1. \tag{5.4}$$

Пусть $n \ge 6$ и $k = \lfloor n/6 \rfloor$. Определим многочлен P_1 степени $\le \lfloor n/3 \rfloor$ следующим образом:

$$P_1(x) = \frac{6}{n} Q_k\Big(\frac{nx}{3}\Big).$$

В силу (5.4)

$$\max_{x\in[-3/n,3/n]} |P_1(x)| \le 1,$$

а в силу (5.3)

$$P_1(x) \geq C_1 \quad \Big(\frac{c_2}{n^2} \leq x \leq \frac{c_3}{n^2}\Big).$$

Далее определим многочлен

$$P_2(x) := \prod_{j=1}^{[n/3]} \Big(x^2 - \frac{1}{j^2}\Big)\bigg(\prod_{j=1}^{[n/3]} \Big(-\frac{1}{j^2}\Big)\bigg)^{-1}. \tag{5.5}$$

Легко видеть, что P_2 является четным многочленом степени $\leq 2\lfloor n/3\rfloor$, при этом все его нули лежат вне интервала $(-3/n, 3/n)$, так что

$$\max_{x\in[-3/n,3/n]} |P_2(x)| \leq P_2(0) = 1\,,$$

и также по определению

$$P_2\Big(\frac{1}{j}\Big) = 0 \quad \Big(1 \leq |j| \leq \frac{n}{3}\Big).$$

Оценим $P_2(x)$ снизу при $|x| \leq c_3/n^2$. Для множителей $P_2(x)$ в (5.5) при $j = 1, \ldots, \lfloor n/3\rfloor$ мы имеем

$$\Big|\Big(x^2 - \frac{1}{j^2}\Big)j^2\Big| = |1 - x^2 j^2| \geq 1 - \Big(\frac{c_3}{n^2}\Big)^2\Big(\frac{n}{3}\Big)^2 = 1 - \frac{(c_3/3)^2}{n^2}.$$

Отсюда сразу следует, что $P_2(x) \geq C_2 > 0$ при $|x| \leq c_3/n^2$ и достаточно большом n.

Для завершения доказательства леммы достаточно взять $P = P_1 P_2$. □

Заключение

В работе рассматривалась задача об устойчивости восстановления аналитической функции по значениям коэффициентов ее ряда Фурье, которые могут быть взяты из произвольного симметричного множества $\delta_m \in \mathbb{Z}$ мощности $2m + 1$.

Известно, что для $\delta_m = \{j\colon |j| \leq m\}$ (коэффициенты Фурье берутся последовательно) наибольшей возможной скоростью сходимости при устойчивом восстановлении является экспонента от квадратного корня из m.

Мы показали, что эта скорость не может быть увеличена за счет выбора множеств (δ_m), симметричных относительно нуля. Однако за счет специального выбора этих множеств числа обусловленности могут быть сделаны существенно меньше, а именно, существуют выборка из $2m + 1$ коэффициентов Фурье и метод восстановления с линейно растущим числом обусловленности $\kappa_m \leq cm$, сходящийся экспоненциально по m.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Adcock B., Hansen A.C.** Stable reconstructions in Hilbert spaces and the resolution of the Gibbs phenomenon // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2012. Vol. 32, no. 3. P. 357–388. doi: 10.1016/j.acha.2011.07.004 .
2. **Adcock B., Hansen A.C., Poon C.** Beyond consistent reconstructions: optimality and sharp bounds for generalized sampling, and application to the uniform resampling problem // SIAM. J. Math Anal. 2013. Vol. 45. P. 3132–3167. doi: 10.1137/120895846 .
3. **Adcock B., Hansen A.C., Shadrin A.** A stability barrier for reconstruction from Fourier samples // SIAM. J. Numer. Anal. 2014. Vol. 52. P. 125–139. doi: 10.1137/130908221 .
4. **Platte R. B., Trefethen L.N., Kuijlaars A. B. J.** Impossibility of fast stable approximation of analytic functions from equispaced samples // SIAM Rev. 2011. Vol. 53, no. 2. P. 308–318. doi: 10.1137/090774707.
5. **Hrycak T., Grochenig K.** Pseudospectral Fourier reconstruction with the modified inverse polynomial reconstruction method // J. Comput. Phys. 2010. Vol. 229, no. 3. P. 933–946. doi: 10.1016/j.jcp.2009.10.026.

6. **Rivlin T.J.** Chebyshev polynomials. From approximation theory to algebra and number theory. N Y: Wiley, 1990. 249 p.

Поступила 29.06.2020
После доработки 10.10.2020
Принята к публикации 19.10.2020

Конягин Сергей Владимирович
лаборатория “Многомерная аппроксимация и приложения”
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: konyagin@mi-ras.ru

Шадрин Алексей Юрьевич
dr hab.
DAMTP, Centre for Mathematical Sciences, University of Cambridge, UK
e-mail: A.Shadrin@damtp.cam.ac.uk

REFERENCES

1. Adcock B., Hansen A.C. Stable reconstructions in Hilbert spaces and the resolution of the Gibbs phenomenon. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2012, vol. 32, no. 3, pp. 357–388. doi: 10.1016/j.acha.2011.07.004 .
2. Adcock B., Hansen A.C., Poon C. Beyond consistent reconstructions: optimality and sharp bounds for generalized sampling, and application to the uniform resampling problem. *SIAM. J. Math. Anal.*, 2013, vol. 45, pp. 3132–3167. doi: 10.1137/120895846 .
3. Adcock B., Hansen A.C., Shadrin A. A stability barrier for reconstruction from Fourier samples. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 2014, vol. 52, pp. 125–139. doi: 10.1137/130908221 .
4. Platte R.B., Trefethen L.N., Kuijlaars A.B.J. Impossibility of fast stable approximation of analytic functions from equispaced samples. *SIAM Rev.*, 2011, vol. 53, no. 2, pp. 308–318. doi: 10.1137/090774707 .
5. Hrycak T., Grochenig K. Pseudospectral Fourier reconstruction with the modified inverse polynomial reconstruction method. *J. Comput. Phys.*, 2010, vol. 229, no. 3, pp. 933–946. doi: 10.1016/j.jcp.2009.10.026 .
6. Rivlin T.J. *Chebyshev polynomials. From approximation theory to algebra and number theory.* N Y: Wiley, 1990, 249 p. ISBN: 0471628964 .

Received June 29, 2020
Revised October 10, 2020
Accepted October 19, 2020

Funding Agency: The work of the first author was supported by a grant of the Government of the Russian Federation (project no. 14.W03.31.0031).

Sergey Vladimirovich Konyagin, Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: konyagin@mi-ras.ru .

Aleksey Yur'evich Shadrin, dr hab., DAMTP, Centre for Mathematical Sciences, University of Cambridge, UK, e-mail: A.Shadrin@damtp.cam.ac.uk .

Cite this article as: S. V. Konyagin, A. Yu. Shadrin. On the stable reconstruction of analytic functions from a sample of Fourier coefficients, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 182–195 .