ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 517.5

# ЗАДАЧА ЧЕБЫШЕВА ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МОМЕНТОВ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ[1]

**В. И. Иванов**

Работа посвящена изучению экстремальной задачи Чебышева 1883 г. о наибольшем и наименьшем значениях моментов неотрицательных алгебраических многочленов с фиксированным нулевым моментом на конечных и бесконечных интервалах с весом. Для первого момента на отрезке $[-1,1]$ задача была решена П.Л. Чебышевым в случае единичного веса и Г. Сеге — в общем случае. Экстремальными значениями первого момента оказались наибольшие и наименьшие нули некоторых ортогональных многочленов. В решении использованы представление неотрицательных многочленов и квадратурная формула Гаусса наивысшей точности. Мы решаем задачу Чебышева об экстремальных значениях моментов порядка $k \geq 2$ для любых интервалов $(a,b)$, если $k$ нечетное, и для интервалов, у которых $a \geq 0$ или $b \leq 0$, если $k$ четное. Эти интервалы характеризуются тем, что функция $x^k$ на них монотонная. Как и при $k=1$ экстремальные значения моментов порядка $k$ являются $k$-ми степенями наибольших и наименьших нулей некоторых ортогональных многочленов. Другие нули этих многочленов также имеют экстремальный характер. Они дают экстремальные значения в обобщении задачи Чебышева на случай многочленов с фиксированными нулями. Для решения обобщенной задачи Чебышева построены специальные квадратурные формулы. Решение задачи Чебышева получается как частный случай решения обобщенной задачи Чебышева. В некоторых случаях из-за отсутствия второго конца у бесконечного интервала не удается построить необходимые квадратурные формулы и приходится непосредственно решать задачу Чебышева, опираясь на представление неотрицательных многочленов. Кроме отмеченных случаев для моментов четного порядка удается решить задачу Чебышева на интервале $(-a,a)$, если вес четный. В общем случае вопрос о решении задачи Чебышева для моментов четного порядка остается открытым.

Ключевые слова: моменты алгебраических многочленов, задача Чебышева, квадратурные формулы, ортогональные многочлены.

**V. I. Ivanov. Chebyshev's problem on extremal values of moments of nonnegative algebraic polynomials.**

The paper is devoted to the study of the 1883 Chebyshev problem on the maximum and minimum values of the moments of nonnegative algebraic polynomials with a fixed zero moment on finite and infinite intervals with weight. For the first moment on the segment $[-1,1]$, the problem was solved by P.L. Chebyshev in the case of unit weight and by G. Szegö in the general case. The extreme values of the first moment were the largest and smallest zeros of some orthogonal polynomials. Their solution used the representation of non-negative polynomials and the Gauss quadrature formula of the highest accuracy. We solve the Chebyshev problem on the extreme values of the moments of order $k \geq 2$ for any intervals $(a,b)$ if $k$ is odd and for intervals with $a \geq 0$ or $b \leq 0$ if $k$ is even. These intervals are characterized by the fact that the function $x^k$ is monotone on them. As for $k=1$, the extremal values of moments of order $k$ are the $k$th powers of the largest and least zeros of some orthogonal polynomials. The other zeros of these polynomials are also extreme. They give extreme values in a generalization of the Chebyshev problem to the case of polynomials with fixed zeros. To solve the generalized Chebyshev problem, we constructed special quadrature formulae. The solution to the Chebyshev problem is obtained as a special case of the solution to the generalized Chebyshev problem. In some cases, due to the absence of the second endpoint for an infinite interval, it is not possible to construct the necessary quadrature formulae and one has to directly solve the Chebyshev problem, relying on the representation of non-negative polynomials. In addition to the cases noted above, for moments of even order, it is possible to solve the Chebyshev problem on an interval $(-a,a)$ if the weight is even. In the general case, the question of solving the Chebyshev problem for moments of even order remains open.

Keywords: moments of algebraic polynomials, Chebyshev's problem, quadrature formulae, orthogonal polynomials.

**MSC:** 33C45, 41A17, 41A55

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-138-154

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

## 1. Введение

Пусть $(a,b)$ — конечный или бесконечный интервал на действительной прямой $\mathbb{R}$, содержащий $a$ и/или $b$, если $a$ и/или $b$ конечные; $w(x)$ — неотрицательная интегрируемая на $(a,b)$ весовая функция; $L_w(a,b)$ — пространство функций, интегрируемых по Лебегу на $(a,b)$ с весом $w(x)$, $n,k \in \mathbb{Z}_+$; $\Pi_n$ — множество алгебраических многочленов степени не выше $n$ с действительными коэффициентами, $\Pi = \cup_{n=0}^{\infty}\Pi_n$; $\mu_k(p) = \displaystyle\int_a^b x^k p(x)w(x)\,dx$ — $k$-й момент многочлена $p \in \Pi_n$ на интервале $(a,b)$; $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Далее будем предполагать, что $\Pi \subset L_w(a,b)$.

В 1883 г. П. Л. Чебышев [1] поставил следующую экстремальную задачу.

Пусть $p\varphi \in L_w(a,b)$ для любого многочлена $p \in \Pi$. Вычислить величины

$$\overline{M}_{\varphi}(n) = \overline{M}_{\varphi}(n,(a,b),w) = \max \int_a^b \varphi(x)p(x)w(x)\,dx, \tag{1.1}$$

$$\underline{M}_{\varphi}(n) = \underline{M}_{\varphi}(n,(a,b),w) = \min \int_a^b \varphi(x)p(x)w(x)\,dx, \tag{1.2}$$

если

$$p \in \Pi_n, \quad p(x) \geq 0,\ x \in (a,b), \quad \mu_0(p) = \int_a^b p(x)w(x)\,dx = 1.$$

Для $\varphi(x) = x^k$ мы получаем задачу об экстремальных значениях моментов $\mu_k(p)$. Обозначим в этом случае

$$\overline{M}_{\varphi}(n) = \overline{M}_k(n), \quad \underline{M}_{\varphi}(n) = \underline{M}_k(n).$$

В этой же работе [1] П. Л. Чебышев решил задачи (1.1), (1.2) для $k = 1$, $w(x) = 1$ и $(a,b) = [-1,1]$. В 1927 г. Г. Сеге (см. [2, гл. 7]) обобщил результаты П. Л. Чебышева на случай произвольной весовой функции.

Решение задач (1.1), (1.2) для $k = 1$, данное П.Л. Чебышевым и Г. Сеге, опиралось на три составляющие:

1. Представление неотрицательных на $[-1,1]$ многочленов

$$p_{2m-2}(x) = q_{m-1}^2(x) + (1-x^2)r_{m-2}^2(x),$$

$$p_{2m-1}(x) = (1+x)q_{m-1}^2(x) + (1-x)r_{m-1}^2(x).$$

2. Ортогональные многочлены $\{P_n^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}w(x)$, где $\alpha,\beta \in \{0,1\}$ (см. [2, гл. 1; [3], лекция 1]). Пусть $\{-1 < t_{n,n}^{\alpha,\beta} < \dots < t_{1,n}^{\alpha,\beta} < 1\}$ — нули многочлена $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, занумерованные в порядке убывания. Для $\alpha = \beta = 0$ верхние индексы будем опускать.

3. Квадратурную формулу Гаусса

$$\int_{-1}^{1} p(x)w(x)\,dx = \sum_{s=1}^{m} \gamma_s p(t_{s,m}) \tag{1.3}$$

с положительными весами $\gamma_s$, справедливую для многочленов $p \in \Pi_{2m-1}$ (см. [3, лекция 2; 4, гл. 7]).

Их результаты выглядят следующим образом.

Если $m \in \mathbb{N}$, $n = 2m - 2$, то

$$\overline{M}_1(n) = t_{1,m}, \quad \underline{M}_1(n) = t_{m,m}. \tag{1.4}$$

Единственные экстремальные многочлены имеют вид

$$\overline{p}_{2m-2}(x) = c_1 \frac{P_m^2(x)}{(x - t_{1,m})^2}, \quad \underline{p}_{2m-2}(x) = c_2 \frac{P_m^2(x)}{(x - t_{m,m})^2},$$

где $c_1^{-1} = \int_{-1}^{1} \frac{P_m^2(x)}{(x - t_{1,m})^2} w(x)\, dx$, $c_2^{-1} = \int_{-1}^{1} \frac{P_m^2(x)}{(x - t_{m,m})^2} w(x)\, dx$.

Если $m \in \mathbb{N}$, $n = 2m - 1$, то

$$\overline{M}_1(n) = t_{1,m}^{0,1}, \quad \underline{M}_1(n) = t_{m,m}^{1,0}. \tag{1.5}$$

Единственные экстремальные многочлены имеют вид

$$\overline{p}_{2m-1}(x) = c_3 \frac{(1+x)(P_m^{0,1}(x))^2}{(x - t_{1,m}^{0,1})^2}, \quad \underline{p}_{2m-1}(x) = c_4 \frac{(1-x)(P_m^{1,0}(x))^2}{(x - t_{m,m}^{1,0})^2},$$

где $c_3^{-1} = \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)(P_m^{0,1}(x))^2}{(x - t_{1,m}^{0,1})^2} w(x)\, dx$, $c_4^{-1} = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)(P_m^{1,0}(x))^2}{(x - t_{m,m}^{1,0})^2} w(x)\, dx$.

На самом деле, представления неотрицательных многочленов можно не использовать, а обойтись только квадратурными формулами. Такой метод доказательства (1.4)–(1.5) реализован, например, в [3, лекция 3]. При доказательстве (1.4) можно использовать квадратурную формулу Гаусса (1.3), а при доказательстве (1.5) — квадратурные формулы Маркова

$$\int_{-1}^{1} p(x)w(x)\, dx = \gamma_0^{0,1} p(-1) + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s^{0,1} p(t_{s,m}^{0,1})$$

и

$$\int_{-1}^{1} p(x)w(x)\, dx = \gamma_0^{1,0} p(1) + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s^{1,0} p(t_{s,m}^{1,0})$$

с фиксированными узлами в $-1$ и $1$ и положительными весами $\gamma_s^{0,1}$, $\gamma_s^{1,0}$, справедливые для многочленов $p \in \Pi_{2m}$ (см. [3, лекция 2; 4, гл. 9]). Если проанализировать предложенный в работе [3] подход, то можно выделить специальные квадратурные формулы, в которых участвуют первый и нулевой моменты.

Пусть $n = 2m - 2$. Существуют наборы положительных весов $\{\delta_s^1\}_{s=2}^m$, $\{\delta_s^2\}_{s=1}^{m-1}$ такие, что для любого многочлена $p \in \Pi_n$

$$\int_{-1}^{1} xp(x)w(x)\, dx = t_{1,m} \int_{-1}^{1} p(x)w(x)\, dx - \sum_{s=2}^{m} \delta_s^1 p(t_{s,m}) \tag{1.6}$$

и

$$\int_{-1}^{1} xp(x)w(x)\, dx = t_{m,m} \int_{-1}^{1} p(x)w(x)\, dx + \sum_{s=1}^{m-1} \delta_s^2 p(t_{s,m}). \tag{1.7}$$

Пусть $n = 2m-1$. Существуют наборы положительных весов $\{\delta_0^3\} \cup \{\delta_s^3\}_{s=2}^m$, $\{\delta_s^4\}_{s=0}^{m-1}$ такие, что для любого многочлена $p \in \Pi_n$

$$\int_{-1}^{1} xp(x)w(x)\, dx = t_{1,m}^{0,1} \int_{-1}^{1} p(x)w(x)\, dx - \delta_0^3 p(-1) - \sum_{s=2}^{m} \delta_s^3 p(t_{s,m}^{0,1}) \tag{1.8}$$

и

$$\int_{-1}^{1} xp(x)w(x)\,dx = t_{m,m}^{1,0}\int_{-1}^{1} p(x)w(x)\,dx + \delta_0^4 p(1) + \sum_{s=1}^{m-1}\delta_s^4 p(t_{s,m}^{1,0}). \tag{1.9}$$

Из квадратурных формул (1.6)–(1.9) вытекают правильные оценки первого момента, а условия равенства в них позволяют выписать единственные экстремальные многочлены.

Отметим, что аналоги квадратурных формул (1.6)–(1.9) для $k = 1$ справедливы на любом отрезке $[a, b]$. Для моментов порядка $k \geq 2$ это уже не так, потому что в зависимости от четности и нечетности $k$ функция $x^k$ может иметь разное поведение.

П р и м е р. Пусть $n = m = 2$, $k \geq 2$. Если $k$ нечетное, то аналоги квадратурных формул (1.6), (1.7) для отрезка $[-1, 1]$, веса $w(x) = 1$ и многочленов $p \in \Pi_2$ имеют вид

$$\int_{-1}^{1} x^k p(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{k+2}\int_{-1}^{1} p(x)\,dx - \frac{2\sqrt{3}}{k+2}p\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

и

$$\int_{-1}^{1} x^k p(x)\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{k+2}\int_{-1}^{1} p(x)\,dx + \frac{2\sqrt{3}}{k+2}p\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Если $k$ четное, то аналог квадратурной формулы (1.6) имеет вид

$$\int_{-1}^{1} x^k p(x)\,dx = \frac{3}{k+3}\int_{-1}^{1} p(x)\,dx - \frac{4k}{(k+1)(k+3)}p(0).$$

Аналога квадратурной формулы (1.7) уже нет.

Возникают следующие задачи.

З а д а ч а 1. Пусть $n = 2m - 2$. Для каких $k \geq 2$ и интервалов $(a, b)$ существуют наборы действительных чисел $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, положительных весов $\{\beta_s^i\}_{s=1}^{m-1}$ и узлов $a < \tau_1^i < \dots < \tau_{m-1}^i < b$, $i = 1, 2$, такие, что для любого многочлена $p \in \Pi_n$

$$\int_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = \alpha_1\int_a^b p(x)w(x)\,dx - \sum_{s=1}^{m-1}\beta_s^1 p(\tau_s^1)$$

и

$$\int_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = \alpha_2\int_a^b p(x)w(x)\,dx + \sum_{s=1}^{m-1}\beta_s^2 p(\tau_s^2).$$

З а д а ч а 2. Пусть $n = 2m - 1$. Для каких $k \geq 2$ и интервалов $(a, b)$ существуют наборы действительных чисел $\{\alpha_3, \alpha_4\}$, положительных весов $\{\beta_s^i\}_{s=0}^{m-1}$ и узлов $a < \tau_1^i < \dots < \tau_{m-1}^i < b$, $i = 3, 4$, такие, что для любого многочлена $p \in \Pi_n$

$$\int_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = \alpha_3\int_a^b p(x)w(x)\,dx - \beta_0^3 p(a) - \sum_{s=1}^{m-1}\beta_s^3 p(\tau_s^3), \quad a \in (a, b),$$

и

$$\int_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = \alpha_4\int_a^b p(x)w(x)\,dx + \beta_0^4 p(b) + \sum_{s=1}^{m-1}\beta_s^4 p(\tau_s^4), \quad b \in (a, b).$$

Наша цель — показать, что квадратурные формулы в задачах 1, 2 существуют для любых интервалов, если $k$ нечетное, и для интервалов, у которых $a \geq 0$ или $b \leq 0$, если $k$ четное. Эти интервалы характеризуются тем, что функция $x^k$ на них монотонная.

В этих случаях, опираясь на построенные квадратурные формулы, мы получаем решение старой экстремальной проблемы Чебышева о наибольших и наименьших значениях моментов порядка $k$ неотрицательных многочленов для всех $k \geq 2$. Случай отрезка $[0, 1]$, на котором функция $x^k$ возрастает для любых $k$, рассмотрен в нашей краткой заметке [5].

Как и при $k = 1$ экстремальные значения в задаче Чебышева для моментов порядка $k \geq 2$ являются $k$-ми степенями наибольших и наименьших нулей некоторых ортогональных многочленов. Другие нули этих многочленов также имеют экстремальный характер. Они дают экстремальные значения в обобщении задачи Чебышева на случай многочленов с фиксированными нулями. Решение обобщенной задачи Чебышева осуществляется с помощью квадратурных формул, аналогичных тем, которые приведены в задачах 1, 2. Решение задачи Чебышева получается как частный случай решения обобщенной задачи Чебышева. Для интервалов $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ в некоторых случаях из-за отсутствия второго конца интервала не удается построить необходимые квадратурные формулы и приходится непосредственно решать задачу Чебышева, используя методологию П.Л. Чебышева и Г. Сеге.

Работа организована следующим образом. В разд. 2 для некоторого однопараметрического класса ортогональных многочленов устанавливаются необходимые свойства нулей и приводятся квадратурные формулы Гаусса и Маркова. В разд. 3 для многочленов доказываются специальные квадратурные формулы, вид которых сформулирован в задачах 1, 2. В разд. 4 дается решение проблемы Чебышева. В заключении ставится экстремальная задача о наибольших значениях коэффициентов Фурье неотрицательных многочленов, хорошо известная для тригонометрических полиномов как задача Фейера.

## 2. Вспомогательные утверждения

Напомним, что мы рассматриваем интервалы $(a, b)$, содержащие конечные концы, то есть имеющие вид

$$[a, b], \quad [a, \infty), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, \infty). \tag{2.1}$$

В дальнейшем для интервалов предполагаем выполненным следующее условие. Если порядок момента $k$ четный, то $a \geq 0$ или $b \leq 0$.

Определим параметрический вес $w_k(x, \lambda)$, $x, \lambda \in (a, b)$. Если $k$ нечетное, то полагаем

$$w_k(x, \lambda) = w(x)\frac{x^k - \lambda^k}{x - \lambda} = w(x)\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^{k-1-s} x^s \geq 0.$$

Если $k$ четное, то полагаем $w_k(x, \lambda) = w(x)\Big|\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^{k-1-s} x^s\Big| \geq 0$. В этом случае

$$w_k(x, \lambda) = w(x)\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^{k-1-s} x^s, \ a \geq 0, \quad w_k(x, \lambda) = -w(x)\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^{k-1-s} x^s, \ b \leq 0. \tag{2.2}$$

Пусть $w^{\alpha,\beta}(x) = (b - x)^\alpha (x - a)^\beta w(x)$, $w_k^{\alpha,\beta}(x, \lambda) = (b - x)^\alpha (x - a)^\beta w_k(x, \lambda)$, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Если $a = \infty$, то считаем $\beta = 0$ и $(x - a)^\beta = 1$. Аналогично, если $b = \infty$.

Пусть $\{P_n^{\alpha,\beta}(x, \lambda)\}_{n=0}^\infty$ — система ортонормированных многочленов на интервале $(a, b)$ с весом $w_k^{\alpha,\beta}(x, \lambda)$, $\{t_{1,n}^{\alpha,\beta}(\lambda), \ldots, t_{n,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)\}$ — нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x, \lambda)$, занумерованные в порядке убывания. Для $\alpha = \beta = 0$ верхние индексы будем опускать.

Так как на рассматриваемых интервалах многочлен $\sum_{s=0}^{k-1}\lambda^{k-1-s}x^s$ сохраняет знак, то по по формуле Кристофеля (см. [2, п. 2.5]) ортогональные многочлены $P_n^{\alpha,\beta}(x,\lambda)$ можно записать через ортогональные многочлены $P_n^{\alpha,\beta}(x)$.

Пусть для $s\in\mathbb{Z}_+$

$$c_s^{\alpha,\beta}=\int\limits_a^b x^s w^{\alpha,\beta}(x)\,dx,\quad c_{s,k}^{\alpha,\beta}(\lambda)=\int\limits_a^b x^s w_k^{\alpha,\beta}(x,\lambda)\,dx=\pm\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{k-1-i}c_{s+i}^{\alpha,\beta} \tag{2.3}$$

— моменты 1 с весами $w^{\alpha,\beta}(x)$ и $w_k^{\alpha,\beta}(x,\lambda)$. Знак минус в (2.3) выбираем, если $b\le 0$.

**Лемма 1.** *Если непрерывные функции $f_1(x), f_2(x)$, отображающие отрезок $[a,b]$ в себя, имеют по одной неподвижной точке $x_1, x_2$ так, что $f_1(x_1)=x_1$, $f_2(x_2)=x_2$, и $f_1(x)<f_2(x)$, $x\in[a,b]$, то $x_1<x_2$.*

Доказательство. Если $f_1(a)=a$, то утверждение леммы верно. Равенство $x_1=x_2$ невозможно, так как в этом случае $f_1(x_1)=f_2(x_1)$. Пусть $f_1(a)>a$ и $x_1>x_2$. Тогда $f_1(x)>x$ для $a<x<x_1$. Иначе $f_1(a)-a>0$ и $f(x_0)-x_0\le 0$ в некоторой точке $a<x_0<x_1$. Поэтому у $f_1(x)$, по крайней мере, две неподвижные точки. Следовательно, $f_1(x_2)>x_2=f_2(x_2)$. Противоречие доказывает лемму 1.

**Теорема 1.** *Для любого интервала $(a,b)$ существует единственный набор $\{\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta}\}_{\nu=1}^n\subset(a,b)$ такой, что*

$$t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta})=\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta},\quad \nu=1,\dots,n. \tag{2.4}$$

*Для него выполняются неравенства*

$$\lambda_{n,n}^{\alpha,\beta}<\lambda_{n-1,n}^{\alpha,\beta}<\dots<\lambda_{1,n}^{\alpha,\beta}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Известно [2, гл. 2], что нули многочлена $P_n^{\alpha,\beta}(x,\lambda)$ совпадают с нулями многочлена

$$\begin{vmatrix} c_{0,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & c_{1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & \dots & c_{n,k}^{\alpha,\beta}(\lambda)\\ c_{1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & c_{2,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & \dots & c_{n+1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n-1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & c_{n,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & \dots & c_{2n-1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda)\\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}=D_n(\lambda)x^n+\sum_{i=1}^n a_{n-i}(\lambda)x^{n-i},$$

где

$$D_n(\lambda)=\begin{vmatrix} c_{0,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & c_{1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & \dots & c_{n-1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda)\\ c_{1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & c_{2,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & \dots & c_{n,k}^{\alpha,\beta}(\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n-1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & c_{n,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & \dots & c_{2n-2,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) \end{vmatrix}>0,\quad \lambda\in(a,b).$$

Согласно (2.3) $D_n(\lambda), a_{n-i}(\lambda)\in\Pi_{n(k-1)}$. Дроби $b_i(\lambda)=\dfrac{a_i(\lambda)}{D_n(\lambda)}$ непрерывны на $(a,b)$, а простые нули многочлена со старшим коэффициентом 1 непрерывно зависят от его остальных коэффициентов (см. [6, приложение 1]), поэтому нули $t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)$ — непрерывные функции $\lambda$ на $(a,b)$.

Пусть интервал $(a,b)=[a,b]$ есть отрезок. Нули $t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)$ осуществляют непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ в себя, и по теореме Брауэра (см. [8, §1]) они имеют неподвижные точки. Следовательно, для некоторого набора $\{\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta}\}\subset(a,b)$ выполняются равенства (2.4).

Пусть теперь интервал $(a,b)$ бесконечный. Чтобы применить теорему Брауэра в этом случае, нужно показать, что функции $t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)$ ограничены на $(a,b)$.

Коэффициент при старшей степени $\lambda^{n(k-1)}$ у $D_n(\lambda)$

$$\begin{vmatrix} \pm c_0^{\alpha,\beta} & \pm c_1^{\alpha,\beta} & \dots & \pm c_{n-1}^{\alpha,\beta} \\ \pm c_1^{\alpha,\beta} & \pm c_2^{\alpha,\beta} & \dots & \pm c_n^{\alpha,\beta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm c_{n-1}^{\alpha,\beta} & \pm c_n^{\alpha,\beta} & \dots & \pm c_{2n-2}^{\alpha,\beta} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как все знаки либо плюс, либо минус. Многочлен $D_n(\lambda)$ имеет степень $n(k-1)$, и дроби $b_i(\lambda)$ имеют конечные пределы на бесконечности. Следовательно, они ограничены $|b_i(\lambda)| \leq M_i$ на $(a,b)$. Для нулей справедлива оценка $|t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)| \leq 2\max_{1\leq i\leq n-1} M_i^{1/(n-i)}$ (см. [6, приложение 1]). Таким образом, нули $t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)$ осуществляют непрерывное отображение некоторого отрезка $[A,B] \subset (a,b)$ в себя. По теореме Брауэра существует набор $\{\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta}\} \subset (A,B)$, для которого выполняются равенства (2.4).

Если $t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda) = \lambda$, то $\lambda$ является корнем уравнения $P_n^{\alpha,\beta}(\lambda,\lambda) = 0$ или уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{0,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & c_{1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & \dots & c_{n,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) \\ c_{1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & c_{2,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & \dots & c_{n+1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & c_{n,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) & \dots & c_{2n-1,k}^{\alpha,\beta}(\lambda) \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda^n \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитая из $i$-го столбца $(i-1)$-й столбец, умноженный на $\lambda$, и раскладывая полученный определитель по последней строке, получим уравнение

$$p_n^{\alpha,\beta}(\lambda^k) = \det\Big(c_{k+i+j}^{\alpha,\beta} - c_{i+j}^{\alpha,\beta}\lambda^k\Big)_{i,j=0}^{n-1} = 0. \tag{2.6}$$

Так как числа $\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta}$ не могут совпадать, иначе у ортогонального многочлена будут кратные корни, а уравнение $\lambda^k = \lambda_0$ имеет ровно одно решение на рассматриваемых интервалах, то уравнение (2.6) будет иметь ровно $n$ различных корней. Следовательно, набор $\{\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta}\}_{\nu=1}^n$ единственен. Так как $t_{\nu,n}^{\alpha,\beta}(\lambda) > t_{\nu+1,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)$ для всех $\lambda \in [A,B]$, то по лемме 1 для этого набора выполнены неравенства (2.5).

Теорема 1 полностью доказана.

Далее мы выясним экстремальный характер чисел $\lambda_{\nu,n}^{\alpha,\beta}$.

Квадратурные формулы (1.3)–(1.5) справедливы и для бесконечных интервалов (см. [7, Theorems 3.1, 3.2]). Для удобства приведем их для параметрического веса $w_k(x,\lambda)$.

**Лемма 2.** *Для любого интервала $(a,b)$ (2.1) и любого многочлена $p \in \Pi_{2m-1}$ справедлива квадратурная формула Гаусса*

$$\int_a^b p(x)w_k(x,\lambda)\,dx = \sum_{s=1}^m \gamma_s(\lambda)p(t_{s,m}(\lambda)) \tag{2.7}$$

*с положительными весами $\gamma_s(\lambda)$.*

**Лемма 3.** *Для любого интервала $(a,b)$ (2.1) и любого многочлена $p \in \Pi_{2m-1}$ справедливы квадратурные формулы Маркова*

$$\int_a^b p(x)w_k(x,\lambda)\,dx = \gamma_0^{0,1}(\lambda)p(a) + \sum_{s=1}^m \gamma_s^{0,1}(\lambda)p(t_{s,m}^{0,1}(\lambda)), \quad a \in (a,b), \tag{2.8}$$

*и*

$$\int_a^b p(x)w_k(x,\lambda)\,dx = \gamma_0^{1,0}(\lambda)p(b) + \sum_{s=1}^m \gamma_s^{1,0}(\lambda)p(t_{s,m}^{1,0}(\lambda)), \quad b \in (a,b), \tag{2.9}$$

*с фиксированными узлами в точках $a$ и $b$ и положительными весами $\gamma_s^{0,1}(\lambda)$ и $\gamma_s^{1,0}(\lambda)$.*

## 3. Специальные квадратурные формулы

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$, $\nu = 1, \ldots, m$, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$,

$$D^{\alpha,\beta}_{\nu,n} = \Big\{ p \in \Pi_n \colon p(x) = q(x) \prod_{s=1}^{\nu-1} (x - t^{\alpha,\beta}_{s,m}(\lambda^{\alpha,\beta}_{\nu,m}))^2 \Big\},$$

$$E^{\alpha,\beta}_{\nu,n} = \Big\{ p \in \Pi_n \colon p(x) = q(x) \prod_{s=m-\nu+2}^{m} (x - t^{\alpha,\beta}_{s,m}(\lambda^{\alpha,\beta}_{m-\nu+1,m}))^2 \Big\}.$$

Отметим, что $D^{\alpha,\beta}_{1,n} = E^{\alpha,\beta}_{1,n} = \Pi_n$.

На множествах $D^{\alpha,\beta}_{\nu,n}$, $E^{\alpha,\beta}_{\nu,n}$ построим специальные квадратурные формулы, в которых будут участвовать нулевой и $k$-й моменты. Разберем сначала случай, когда степень многочлена $n$ четная.

**Теорема 2.** *Пусть $n = 2m - 2$, $\nu = 1, \ldots, m$. Если $k$ нечетное и $(a, b)$ произвольный интервал (2.1) или $k$ четное и $(a, b) = [a, b]$, $[a, \infty)$, $a \geq 0$, то существуют наборы положительных чисел $\{\delta^1_s\}^m_{s=\nu+1}$, $\{\delta^2_s\}^{m-\nu}_{s=1}$ такие, что для любого многочлена $p \in D_{\nu,n}$*

$$\int_a^b x^k p(x) w(x)\, dx = (\lambda_{\nu,m})^k \int_a^b p(x) w(x)\, dx - \sum_{s=\nu+1}^{m} \delta^1_s p(t_{s,m}(\lambda_{\nu,m})), \tag{3.1}$$

*а для любого многочлена $p \in E_{\nu,n}$*

$$\int_a^b x^k p(x) w(x)\, dx = (\lambda_{m-\nu+1,m})^k \int_a^b p(x) w(x)\, dx + \sum_{s=1}^{m-\nu} \delta^2_s p(t_{s,m}(\lambda_{m-\nu+1,m})). \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in \Pi_{2m-2}$. Применяя к многочлену $(x - \lambda)p(x) \in \Pi_{2m-1}$ квадратурную формулу Гаусса (2.7) с весом $w_k(x, \lambda)$ и учитывая (2.2), получим

$$\begin{aligned}\int_a^b x^k p(x) w(x)\, dx - \lambda^k \int_a^b p(x) w(x)\, dx &= \int_a^b (x - \lambda) p(x) w_k(x, \lambda)\, dx \\ &= \sum_{s=1}^{m} \gamma_s(\lambda)(t_{s,m}(\lambda) - \lambda) p(t_{s,m}(\lambda)),\end{aligned} \tag{3.3}$$

где все $\gamma_s(\lambda) > 0$.

Подставляя в (3.3) многочлен $p \in D_{\nu,n}$ и $\lambda = \lambda_{\nu,m}$, имеем соотношение (3.1) с

$$\delta^1_s = \gamma_s(\lambda_{\nu,m})(\lambda_{\nu,m} - t_{s,m}(\lambda_{\nu,m})) > 0, \quad s = \nu + 1, \ldots, m.$$

Подставляя в (3.3) многочлен $p \in E_{\nu,n}$ и $\lambda = \lambda_{m-\nu+1,m}$, получим (3.2) с

$$\delta^2_s = \gamma_s(\lambda_{m-\nu+1,m})(t_{s,m}(\lambda_{m-\nu+1,m}) - \lambda_{m-\nu+1,m})) > 0, \quad s = 1, \ldots, m - \nu.$$

Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** *Пусть $n = 2m - 2$, $\nu = 1, \ldots, m$. Если $k$ четное и $(a, b) = [a, b]$, $(-\infty, b]$, $b \leq 0$, то существуют наборы положительных чисел $\{\delta^1_s\}^{m-\nu}_{s=1}$, $\{\delta^2_s\}^{m}_{s=\nu+1}$ такие, что для любого многочлена $p \in E_{\nu,n}$*

$$\int_a^b x^k p(x) w(x)\, dx = (\lambda_{m-\nu+1,m})^k \int_a^b p(x) w(x)\, dx - \sum_{s=1}^{m-\nu} \delta^1_s p(t_{s,m}(\lambda_{m-\nu+1,m})), \tag{3.4}$$

*а для любого многочлена* $p \in D_{\nu,n}$

$$\int_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = (\lambda_{\nu,m})^k \int_a^b p(x)w(x)\,dx + \sum_{s=\nu+1}^{m} \delta_s^2 p(t_{s,m}(\lambda_{\nu,m})). \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in \Pi_{2m-2}$. Применяя к многочлену $(x-\lambda)p(x) \in \Pi_{2m-1}$ квадратурную формулу Гаусса (2.7) с весом $w_k(x,\lambda)$ и учитывая (2.2), получим

$$\lambda^k \int_a^b p(x)w(x)\,dx - \int_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = \int_a^b (x-\lambda)p(x)w_k(x,\lambda)\,dx$$
$$= \sum_{s=1}^{m} \gamma_s(\lambda)(t_{s,m}(\lambda)-\lambda)p(t_{s,m}(\lambda)), \tag{3.6}$$

где все $\gamma_s(\lambda) > 0$.

Подставляя в (3.6) многочлен $p \in E_{\nu,n}$ и $\lambda = \lambda_{m-\nu+1,m}$, получим (3.4) с

$$\delta_s^1 = \gamma_s(\lambda_{m-\nu+1,m})(t_{s,m}(\lambda_{m-\nu+1,m}) - \lambda_{m-\nu+1,m}) > 0, \quad s = 1,\dots,m-\nu.$$

Подставляя в (3.6) многочлен $p \in D_{\nu,n}$ и $\lambda = \lambda_{\nu,m}$, получим (3.5) с

$$\delta_s^2 = \gamma_s(\lambda_{\nu,m})(\lambda_{\nu,m} - t_{s,m}(\lambda_{\nu,m})) > 0, \quad s = \nu+1,\dots,m.$$

Теорема 3 доказана.

Пусть теперь $n$ нечетное. Из рассмотрения выбросим интервал $(-\infty,\infty)$, так как в этом случае единственным неотрицательным многочленом будет нуль.

**Теорема 4.** *Пусть* $n = 2m-1$, $\nu = 1,\dots,m$. *Если интервал* $(a,b) = [a,b]$, $[a,\infty)$ *и* $k$ *нечетное или* $k$ *четное и* $a \ge 0$, *то существует набор положительных чисел* $\{\delta_0^3\} \cup \{\delta_s^3\}_{s=\nu+1}^m$ *такой, что для любого многочлена* $p \in D_{\nu,n}^{0,1}$

$$\int_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = (\lambda_{\nu,m}^{0,1})^k \int_a^b p(x)w(x)\,dx - \delta_0^3 p(a) - \sum_{s=\nu+1}^{m} \delta_s^3 p(t_{s,m}(\lambda_{\nu,m}^{0,1})). \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in \Pi_{2m-1}$. Применяя к многочлену $(x-\lambda)p(x) \in \Pi_{2m}$ квадратурную формулу Маркова (2.8) с весом $w_k(x,\lambda)$ и учитывая (2.2), получим

$$\int_a^b x^k p(x)w(x)\,dx - \lambda^k \int_a^b p(x)w(x)\,dx = \int_a^b (x-\lambda)p(x)w_k(x,\lambda)\,dx$$
$$= \gamma_0^{0,1}(\lambda)(a-\lambda)p(a) + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s^{0,1}(\lambda)(t_{s,m}^{0,1}(\lambda)-\lambda)p(t_{s,m}^{0,1}(\lambda)), \tag{3.8}$$

где все $\gamma_s^{0,1}(\lambda) > 0$.

Подставляя многочлен $p \in D_{\nu,n}^{0,1}$ и $\lambda = \lambda_{\nu,m}^{0,1}$ в (3.8), имеем соотношение (3.7) с

$$\delta_0^3 = \lambda_{\nu,m}^{0,1} - a > 0, \quad \delta_s^3 = \gamma_s(\lambda_{\nu,m}^{0,1})(\lambda_{\nu,m}^{0,1} - t_{s,m}^{0,1}(\lambda_{\nu,m}^{0,1})) > 0, \quad s = \nu+1,\dots,m.$$

Теорема 4 доказана.

**Теорема 5.** *Пусть* $n = 2m-1$, $\nu = 1,\dots,m$. *Если* $k$ *нечетное и интервал* $(a,b) = [a,b]$, $(-\infty,b]$ *или* $k$ *четное и интервал* $(a,b) = [a,b]$, $a \ge 0$, *то существует набор положительных чисел* $\{\delta_s^4\}_{s=0}^{m-\nu}$ *такой, что для любого многочлена* $p \in E_{\nu,n}^{1,0}$

$$\int\limits_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = (\lambda_{m-\nu+1,m}^{1,0})^k \int\limits_a^b p(x)w(x)\,dx + \delta_0^4 p(b) + \sum_{s=1}^{m-\nu} \delta_s^4 p(t_{s,m}(\lambda_{m-\nu+1,m}^{1,0})). \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in \Pi_{2m-1}$. Применяя к многочлену $(x-\lambda)p(x) \in \Pi_{2m}$ квадратурную формулу Маркова (2.9) с весом $w_k(x,\lambda)$, получим

$$\int\limits_a^b x^k p(x)w(x)\,dx - \lambda^k \int\limits_a^b p(x)w(x)\,dx = \int\limits_a^b (x-\lambda)p(x)w_k(x,\lambda)\,dx$$

$$= \gamma_0^{1,0}(\lambda)(b-\lambda)p(b) + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s^{1,0}(\lambda)(t_{s,m}^{1,0}(\lambda)-\lambda)p(t_{s,m}^{1,0}(\lambda)), \tag{3.10}$$

где все $\gamma_s^{1,0}(\lambda) > 0$.

Подставляя многочлен $p \in E_{\nu,n}^{1,0}$ и $\lambda = \lambda_{m-\nu+1,m}^{1,0}$ в (3.10), имеем соотношение (3.9) с

$$\delta_0^4 = b-\lambda_{m-\nu+1,m}^{1,0} > 0, \quad \delta_s^4 = \gamma_s(\lambda_{m-\nu+1,m}^{1,0})(t_{s,m}^{1,0}(\lambda_{m-\nu+1,m}^{1,0})-\lambda_{m-\nu+1,m}^{1,0})) > 0, \quad s = 1,\dots,m-\nu.$$

Теорема 5 доказана.

**Теорема 6.** *Пусть* $n = 2m-1$, $\nu = 1,\dots,m$. *Если* $k$ *четное и интервал* $(a,b) = [a,b]$, $(-\infty,b]$, $b \le 0$, *то существует набор положительных чисел* $\{\delta_s^4\}_{s=0}^{m-\nu}$ *такой, что для любого многочлена* $p \in E_{\nu,n}^{1,0}$

$$\int\limits_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = (\lambda_{m-\nu+1,m}^{1,0})^k \int\limits_a^b p(x)w(x)\,dx - \delta_0^4 p(b) - \sum_{s=1}^{m-\nu} \delta_s^4 p(t_{s,m}(\lambda_{m-\nu+1,m}^{1,0})). \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится аналогично доказательству равенства (3.9). Только в силу (2.2)

$$\int\limits_a^b (x-\lambda)p(x)w_k(x,\lambda)\,dx = \lambda^k \int\limits_a^b p(x)w(x)\,dx - \int\limits_a^b x^k p(x)w(x)\,dx, \tag{3.12}$$

и перед суммой в (3.9) изменится знак. □

**Теорема 7.** *Пусть* $n = 2m-1$, $\nu = 1,\dots,m$. *Если* $k$ *четное и интервал* $(a,b) = [a,b]$, $b \le 0$, *то существует набор положительных чисел* $\{\delta_0^3\} \cup \{\delta_s^3\}_{s=\nu+1}^{m}$ *такой, что для любого многочлена* $p \in D_{\nu,n}^{0,1}$

$$\int\limits_a^b x^k p(x)w(x)\,dx = (\lambda_{\nu,m}^{0,1})^k \int\limits_a^b p(x)w(x)\,dx + \delta_0^3 p(a) + \sum_{s=\nu+1}^{m} \delta_s^3 p(t_{s,m}(\lambda_{\nu,m}^{0,1})). \tag{3.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится аналогично доказательству равенства (3.7). Только в силу (3.12) перед суммой в (3.7) изменится знак. □

## 4. Решение задачи Чебышева

Множества $D_{1,n}^{\alpha,\beta} = E_{1,n}^{\alpha,\beta} = \{p \in \Pi_n \colon p(x) \geq 0,\ x \in (a,b),\ \mu_0(p) = 1\}$ являются допустимыми множествами многочленов в задаче Чебышева (1.1), (1.2). Рассмотрим следующее обобщение задачи Чебышева. Пусть $C = D,\ E$. Вычислить величины

$$\overline{M}_{k,C}^{\alpha,\beta}(\nu,n) = \overline{M}_{k,C}^{\alpha,\beta}(\nu,n,w) = \max\big\{\mu_k(p) \colon p \in C_{\nu,n}^{\alpha,\beta},\ \ p(x) \geq 0,\ x \in (a,b),\ \ \mu_0(p) = 1\big\},$$

$$\underline{M}_{k,C}^{\alpha,\beta}(\nu,n) = \underline{M}_{k,C}^{\alpha,\beta}(\nu,n,w) = \min\big\{\mu_k(p) \colon p \in C_{\nu,n}^{\alpha,\beta},\ \ p(x) \geq 0,\ x \in (a,b),\ \ \mu_0(p) = 1\big\}.$$

Во всех дальнейших утверждениях экстремальные многочлены единственные. Мы не будем это специально отмечать. В записи экстремальных многочленов будут участвовать положительные постоянные $\overline{c}, \underline{c}$, различные в разных местах. Они возникают из условия нормировки $\mu_0(p) = 1$.

В следующей теореме полностью описывается случай четного $n$. На прямой $(-\infty,\infty)$ только многочлены четной степени могут быть неотрицательными.

**Теорема 8.** *Пусть $n = 2m-2$, $\nu = 1,\dots,m$. Если $k$ нечетное и $(a,b)$ — произвольный интервал* (2.1) *или $k$ четное и $(a,b) = [a,b]$, $[a,\infty)$, $a \geq 0$, то*

$$\overline{M}_{k,D}(\nu,n) = (\lambda_{\nu,m})^k, \quad \underline{M}_{k,E}(\nu,n) = (\lambda_{m-\nu+1,m})^k. \tag{4.1}$$

*Экстремальные многочлены имеют вид*

$$\overline{p}_{2m-2,\nu}(x) = \overline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{\nu,m})}{(x-\lambda_{\nu,m})^2}, \quad \underline{p}_{2m-2,\nu}(x) = \underline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{m-\nu+1,m})}{(x-\lambda_{m-\nu+1,m})^2}. \tag{4.2}$$

*Если $k$ четное и $(a,b) = [a,b]$, $(-\infty,b]$, $b \leq 0$, то*

$$\overline{M}_{k,E}(\nu,n) = (\lambda_{m-\nu+1,m})^k, \quad \underline{M}_{k,D}(\nu,n) = (\lambda_{\nu,m})^k. \tag{4.3}$$

*Экстремальные многочлены имеют вид*

$$\overline{p}_{2m-2,\nu}(x) = \overline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{m-\nu+1,m})}{(x-\lambda_{m-\nu+,m})^2}, \quad \underline{p}_{2m-2,\nu}(x) = \underline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{\nu,m})}{(x-\lambda_{\nu,m})^2}. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху величины $\overline{M}_{k,D}(\nu,n)$ в (4.1) вытекает из (3.1), а оценка снизу величины $\underline{M}_{k,E}(\nu,n)$ — из (3.2). Анализ условий, когда неравенства в этих оценках превращаются в равенства, приводит к многочленам (4.2).

Оценка сверху величины $\overline{M}_{k,E}(\nu,n)$ в (4.3) вытекает из (3.4), а оценка снизу величины $\underline{M}_{k,D}(\nu,n)$ — из (3.5). Анализ условий, когда неравенства в этих оценках превращаются в равенства, приводит к многочленам (4.4).

Теорема 8 доказана.

**Следствие 1.** *Пусть $n = 2m-2$. Если $k$ нечетное и $(a,b)$ — произвольный интервал* (2.1) *или $k$ четное и $(a,b) = [a,b]$, $[a,\infty)$, $a \geq 0$, то*

$$\overline{M}_k(n) = (\lambda_{1,m})^k, \quad \underline{M}_k(n) = (\lambda_{m,m})^k.$$

*Экстремальные многочлены имеют вид*

$$\overline{p}_{2m-2}(x) = \overline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{1,m})}{(x-\lambda_{1,m})^2}, \quad \underline{p}_{2m-2}(x) = \underline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{m,m})}{(x-\lambda_{m,m})^2}.$$

*Если $k$ четное и $(a,b) = [a,b]$, $(-\infty,b]$, $b \leq 0$, то*

$$\overline{M}_k(n) = (\lambda_{m,m})^k, \quad \underline{M}_k(n) = (\lambda_{1,m})^k.$$

*Экстремальные многочлены имеют вид*

$$\overline{p}_{2m-2}(x) = \overline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{m,m})}{(x-\lambda_{m,m})^2}, \quad \underline{p}_{2m-2}(x) = \underline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{1,m})}{(x-\lambda_{1,m})^2}.$$

Случай нечетного $n$ отдельно рассмотрим для каждого из интервалов $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$.

**Теорема 9.** *Пусть $(a,b)=[a,b]$, $n=2m-1$, $\nu=1,\dots,m$. Если $k$ нечетное или $k$ четное и $a\geq 0$, то*
$$\overline{M}^{0,1}_{k,D}(\nu,n)=(\lambda^{0,1}_{\nu,m})^k,\quad \underline{M}^{1,0}_{k,E}(\nu,n)=(\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m})^k. \tag{4.5}$$
*Экстремальные многочлены имеют вид*
$$\overline{p}_{2m-1,\nu}(x)=\overline{c}(x-a)\Big(\frac{P^{0,1}_m(x,\lambda^{0,1}_{\nu,m})}{x-\lambda^{0,1}_{\nu,m}}\Big)^2,\quad \underline{p}_{2m-1,\nu}(x)=\underline{c}(b-x)\Big(\frac{P^{1,0}_m(x,\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m})}{x-\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m}}\Big)^2. \tag{4.6}$$
*Если $k$ четное и $b\leq 0$, то*
$$\overline{M}^{1,0}_{k,E}(\nu,n)=(\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m})^k,\quad \underline{M}^{0,1}_{k,D}(\nu,n)=(\lambda^{0,1}_{\nu,m})^k. \tag{4.7}$$
*Экстремальные многочлены имеют вид*
$$\overline{p}_{2m-1,\nu}(x)=\overline{c}(b-x)\Big(\frac{P^{1,0}_m(x,\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m})}{x-\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m}}\Big)^2,\quad \underline{p}_{2m-1,\nu}(x)=\underline{c}(x-a)\Big(\frac{P^{0,1}_m(x,\lambda^{0,1}_{\nu,m})}{x-\lambda^{0,1}_{\nu,m}}\Big)^2. \tag{4.8}$$

Доказательство. Оценка сверху величины $\overline{M}^{0,1}_{k,D}(\nu,n)$ в (4.5) вытекает из (3.7), а оценка снизу величины $\underline{M}^{1,0}_{k,E}(\nu,n)$ — из (3.9). Анализ условий, когда неравенства в этих оценках превращаются в равенства, приводит к многочленам (4.6).

Оценка сверху величины $\overline{M}^{1,0}_{k,E}(\nu,n)$ в (4.7) вытекает из (3.11), а оценка снизу величины $\underline{M}^{0,1}_{k,D}(\nu,n)$ — из (3.13). Анализ условий, когда неравенства в этих оценках превращаются в равенства, приводит к многочленам (4.8).

Теорема 9 доказана.

**Следствие 2.** *Пусть $(a,b)=[a,b]$, $n=2m-1$, $\nu=1,\dots,m$. Если $k$ нечетное или $k$ четное и $a\geq 0$, то*
$$\overline{M}_k(n)=(\lambda^{0,1}_{1,m})^k,\quad \underline{M}_k(n)=(\lambda^{1,0}_{m,m})^k.$$
*Экстремальные многочлены имеют вид*
$$\overline{p}_{2m-1}(x)=\overline{c}(x-a)\Big(\frac{P^{0,1}_m(x,\lambda^{0,1}_{1,m})}{x-\lambda^{0,1}_{1,m}}\Big)^2,\quad \underline{p}_{2m-1}(x)=\underline{c}(b-x)\Big(\frac{P^{1,0}_m(x,\lambda^{1,0}_{m,m})}{x-\lambda^{1,0}_{m,m}}\Big)^2.$$
*Если $k$ четное и $b\leq 0$, то*
$$\overline{M}_k(n)=(\lambda^{1,0}_{m,m})^k,\quad \underline{M}_k(1,n)=(\lambda^{0,1}_{1,m})^k.$$
*Экстремальные многочлены имеют вид*
$$\overline{p}_{2m-1}(x)=\overline{c}(b-x)\Big(\frac{P^{1,0}_m(x,\lambda^{1,0}_{m,m})}{x-\lambda^{1,0}_{m,m}}\Big)^2,\quad \underline{p}_{2m-1}(x)=\underline{c}(x-a)\Big(\frac{P^{0,1}_m(x,\lambda^{0,1}_{1,m})}{x-\lambda^{0,1}_{1,m}}\Big)^2.$$

**Теорема 10.** *Пусть $(a,b)=[a,\infty)$, $n=2m-1$, $\nu=1,\dots,m$. Если $k$ нечетное или $k$ четное и $a\geq 0$, то*
$$\overline{M}^{0,1}_{k,D}(\nu,n)=(\lambda^{0,1}_{\nu,m})^k. \tag{4.9}$$
*Экстремальный многочлен имеет вид*
$$\overline{p}_{2m-1,\nu}(x)=\overline{c}(x-a)\Big(\frac{P^{0,1}_m(x,\lambda^{0,1}_{\nu,m})}{x-\lambda^{0,1}_{\nu,m}}\Big)^2. \tag{4.10}$$

Доказательство. Оценка сверху величины $\overline{M}^{0,1}_{k,D}(\nu,n)$ (4.9) вытекает из (3.7). Анализ условий, когда неравенство в этой оценке превращается в равенство, приводит к многочлену $\overline{p}_{2m-1,\nu}(x)$ (4.10). Теорема 10 доказана.

**Следствие 3.** *Пусть* $(a,b)=[a,\infty)$, $n=2m-1$. *Если* $k$ *нечетное или* $k$ *четное и* $a\ge 0$, *то*

$$\overline{M}_k(n)=(\lambda^{0,1}_{1,m})^k.$$

*Экстремальный многочлен имеет вид*

$$\overline{p}_{2m-1}(x)=\overline{c}(x-a)\Big(\frac{P^{0,1}_m(x,\lambda^{0,1}_{1,m})}{x-\lambda^{0,1}_{1,m}}\Big)^2.$$

**Теорема 11.** *Пусть* $(a,b)=(-\infty,b]$, $n=2m-1$, $\nu=1,\dots,m$. *Если* $k$ *нечетное, то*

$$\underline{M}^{1,0}_{k,E}(\nu,n)=(\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m})^k. \tag{4.11}$$

*Экстремальный многочлен имеет вид*

$$\underline{p}_{2m-1,\nu}(x)=\underline{c}(b-x)\Big(\frac{P^{1,0}_m(x,\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m})}{x-\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m}}\Big)^2. \tag{4.12}$$

Доказательство. Оценка снизу величины $\underline{M}^{1,0}_{k,E}(\nu,n)$ (4.11) вытекает из (3.9). Анализ условий, когда неравенство в этой оценке превращается в равенство, приводит к многочлену $\overline{p}_{2m-1,\nu}(x)$ (4.12).

Теорема 11 доказана.

**Следствие 4.** *Пусть* $(a,b)=(-\infty,b]$. *Если* $k$ *нечетное, то*

$$\underline{M}_k(n)=(\lambda^{1,0}_{m,m})^k.$$

*Экстремальный многочлен имеет вид*

$$\underline{p}_{2m-1}(x)=\underline{c}(b-x)\Big(\frac{P^{1,0}_m(x,\lambda^{1,0}_{m,m})}{x-\lambda^{1,0}_{m,m}}\Big)^2.$$

**Теорема 12.** *Пусть* $(a,b)=(-\infty,b]$, $n=2m-1$, $\nu=1,\dots,m$. *Если* $k$ *четное и* $b\le 0$, *то*

$$\overline{M}^{1,0}_{k,E}(\nu,n)=(\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m})^k. \tag{4.13}$$

*Экстремальный многочлен имеет вид*

$$\overline{p}_{2m-1,\nu}(x)=\overline{c}(b-x)\Big(\frac{P^{1,0}_m(x,\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m})}{x-\lambda^{1,0}_{m-\nu+1,m}}\Big)^2. \tag{4.14}$$

Доказательство. Оценка сверху величины $\overline{M}^{1,0}_{k,E}(\nu,n)$ (4.13) вытекает из (3.11). Анализ условий, когда неравенство в этой оценке превращается в равенство, приводит к многочлену $\overline{p}_{2m-1,\nu}(x)$ (4.14). Теорема 12 доказана.

**Следствие 5.** *Пусть* $(a,b)=(-\infty,b]$. *Если* $k$ *четное и* $b\le 0$, *то*

$$\overline{M}_k(n)=(\lambda^{1,0}_{m,m})^k.$$

*Экстремальный многочлен имеет вид*

$$\overline{p}_{2m-1}(x)=\overline{c}(b-x)\Big(\frac{P^{1,0}_m(x,\lambda^{1,0}_{m,m})}{x-\lambda^{1,0}_{m,m}}\Big)^2.$$

Во всех рассмотренных случаях решение задачи Чебышева получалось как частный случай более общих результатов. Остаются три случая, когда нет квадратурных формул из-за отсутствия в интервале нужного конца, и приходится решать непосредственно задачу Чебышева.

Пусть $\{P_n^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система ортонормированных многочленов на интервале $(a,b)$ с весом $w^{\alpha,\beta}(x)$.

**Теорема 13.** *Пусть* $(a,b)=[a,\infty)$, $n=2m-1$. *Если* $k$ *нечетное или* $k$ *четное и* $a\ge 0$, *то*

$$\underline{M}_k(n)=\underline{M}_k(n-1)=(\lambda_{m,m})^k. \tag{4.15}$$

*Экстремальный многочлен имеет вид*

$$\underline{p}_{2m-2}(x)=\underline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{m,m})}{(x-\lambda_{m,m})^2}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Если $p\in\Pi_n$ — неотрицательный многочлен, то используя представление неотрицательных многочленов на интервале $[a,\infty)$ (см. [2, гл. 1; 9, отдел VI]) получим

$$p(x)=A^2(x)+B^2(x)+(x-a)\big(C^2(x)+D^2(x)\big)$$

$$=\Big(\big(\sum_{i=0}^{m-1}a_iP_i(x)\big)^2+\big(\sum_{i=0}^{m-1}b_iP_i(x)\big)^2+(x-a)\Big(\big(\sum_{i=0}^{m-1}c_iP_i^{0,1}(x)\big)^2+\big(\sum_{i=0}^{m-1}d_iP_i^{0,1}(x)\big)^2\Big)\Big).$$

Для него

$$\mu_0(p)=\sum_{i=0}^{m-1}a_i^2+\sum_{i=0}^{m-1}b_i^2+\sum_{i=0}^{m-1}c_i^2+\sum_{i=0}^{m-1}d_i^2,$$

а $\mu_k(p)$ — сумма четырех квадратичных форм от $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$, поэтому

$$\underline{M}_k(n)=\min\left(\min\frac{\displaystyle\int_a^\infty x^k\big(\sum_{i=0}^{m-1}a_iP_i(x)\big)^2w(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^\infty\big(\sum_{i=0}^{m-1}a_iP_i(x)\big)^2w(x)\,dx},\ \min\frac{\displaystyle\int_a^\infty x^k\big(\sum_{i=0}^{m-1}c_iP_i^{0,1}(x)\big)^2w^{0,1}(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^\infty\big(\sum_{i=0}^{m-1}c_iP_i^{0,1}(x)\big)^2w^{0,1}(x)\,dx}\right).$$

Отсюда и из следствия 1

$$\underline{M}_k(n)=\min\big(\underline{M}_k(2m-2,w),\ \underline{M}_k(2m-2,w^{0,1})\big)=\min\big((\lambda_{m,m})^k,\ (\lambda_{m,m}^{0,1})^k\big).$$

Так как $t_{m,m}(\lambda)<t_{m,m}^{0,1}(\lambda)$ для всех $\lambda\in[a,\infty)$ [10], то по лемме 1 $\underline{M}_k(n)=(\lambda_{m,m})^k$. Равенство (4.15) установлено. Многочлен (4.16) будет экстремальным.

Теорема 13 полностью доказана.

**Теорема 14.** *Пусть* $(a,b)=(-\infty,b]$, $n=2m-1$. *Если* $k$ *нечетное, то*

$$\overline{M}_k(n)=\overline{M}_k(n-1)=(\lambda_{1,m})^k. \tag{4.17}$$

*Экстремальный многочлен имеет вид*

$$\overline{p}_{2m-1}(x)=\overline{c}\frac{P_m^2(x,\lambda_{1,m})}{(x-\lambda_{1,m})^2}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Если $p \in \Pi_n$ — неотрицательный многочлен, то, используя представление неотрицательных многочленов на интервале $(-\infty, b]$, получим

$$p(x) = A^2(x) + B^2(x) + (b-x)\big(C^2(x) + D^2(x)\big)$$

$$= \Big(\big(\sum_{i=0}^{m-1} a_i P_i(x)\big)^2 + \big(\sum_{i=0}^{m-1} b_i P_i(x)\big)^2 + (b-x)\Big(\big(\sum_{i=0}^{m-1} c_i P_i^{1,0}(x)\big)^2 + \big(\sum_{i=0}^{m-1} d_i P_i^{1,0}(x)\big)^2\Big)\Big),$$

$$\mu_0(p) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i^2 + \sum_{i=0}^{m-1} b_i^2 + \sum_{i=0}^{m-1} c_i^2 + \sum_{i=0}^{m-1} d_i^2.$$

Аналогично, $\mu_k(p)$ есть сумма четырех квадратичных форм от $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$, поэтому

$$\overline{M}_k(n) = \max\left(\max \frac{\int_{-\infty}^{b} x^k \big(\sum_{i=0}^{m-1} a_i P_i(x)\big)^2 w(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{b} \big(\sum_{i=0}^{m-1} a_i P_i(x)\big)^2 w(x)\,dx},\ \max \frac{\int_{-\infty}^{b} x^k \big(\sum_{i=0}^{m-1} c_i P_i^{1,0}(x)\big)^2 w^{1,0}(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{b} \big(\sum_{i=0}^{m-1} c_i P_i^{1,0}(x)\big)^2 w^{1,0}(x)\,dx}\right).$$

Отсюда и из следствия 1

$$\overline{M}_k(n) = \max\Big(\overline{M}_k(2m-2, w),\ \overline{M}_k(2m-2, w^{1,0})\Big) = \max\Big((\lambda_{1,m})^k,\ (\lambda_{1,m}^{1,0})^k\Big).$$

Так как $t_{1,m}^{1,0}(\lambda) < t_{1,m}(\lambda)$ для всех $\lambda \in (-\infty, b)$ [10], то по лемме 1 $\overline{M}_k(n) = (\lambda_{1,m})^k$. Равенство (4.17) установлено. Многочлен (4.18) будет экстремальным.

Теорема 14 доказана.

**Теорема 15.** *Пусть $(a, b) = (-\infty, b]$, $n = 2m-1$. Если $k$ четное и $b \le 0$, то*

$$\underline{M}_k(n) = \underline{M}_k(n-1) = (\lambda_{m,m})^k. \tag{4.19}$$

*Экстремальный многочлен имеет вид*

$$\underline{p}_{2m-1}(x) = \underline{c}\frac{P_m^2(x, \lambda_{m,m})}{(x-\lambda_{m,m})^2}. \tag{4.20}$$

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 14, получим

$$\underline{M}_k(n) = \min\left(\min \frac{\int_{-\infty}^{b} x^k \big(\sum_{i=0}^{m-1} a_i P_i(x)\big)^2 w(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{b} \big(\sum_{i=0}^{m-1} a_i P_i(x)\big)^2 w(x)\,dx},\ \min \frac{\int_{-\infty}^{b} x^k \big(\sum_{i=0}^{m-1} c_i P_i^{1,0}(x)\big)^2 w^{1,0}(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{b} \big(\sum_{i=0}^{m-1} c_i P_i^{1,0}(x)\big)^2 w^{1,0}(x)\,dx}\right).$$

Отсюда и из следствия 1

$$\underline{M}_k(n) = \max\big(\underline{M}_k(2m-2, w),\ \underline{M}_k(2m-2, w^{1,0})\big) = \min\big((\lambda_{m,m})^k,\ (\lambda_{m,m}^{1,0})^k\big).$$

Так как $t_{m,m}^{1,0}(\lambda) < t_{m,m}(\lambda) < 0$ для всех $\lambda \in (-\infty, b)$ [10] и $k$ четное, то по лемме 1 $\underline{M}_k(n) = (\lambda_{m,m})^k$. Равенство (4.19) установлено. Многочлен (4.20) будет экстремальным.

Теорема 15 доказана.

Для четных моментов задача Чебышева решена только при условии $a \ge 0$ или $b \le 0$. Есть еще один случай, когда можно воспользоваться симметрией в задаче.

**Теорема 16.** *Справедливы равенства*

$$\overline{M}_{2k}(2m+1,(-a,a),w(|x|)) = \overline{M}_{2k}(2m,(-a,a),w(|x|)) = \overline{M}_{k}\Big(m,(0,a),\frac{w(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\Big),$$

$$\underline{M}_{2k}(2m+1,(-a,a),w(|x|)) = \underline{M}_{2k}(2m,(-a,a),w(|x|)) = \underline{M}_{k}\Big(m,(0,a),\frac{w(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует заметить, что если для многочлена $p(x)$ записать разложение $p(x) = p_e(x) + p_o(x)$, где $p_e(x)$ — его четная часть, а $p_o(x)$ — нечетная часть, то

$$\int_{-a}^{a} x^{2k}p(x)w(|x|)\,dx = \int_{-a}^{a} x^{2k}p_e(x)w(|x|)\,dx = \int_{0}^{a} x^{k}p_e(\sqrt{x})\frac{w(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx. \qquad \square$$

## Заключение

Предложенный в работе метод решения задачи Чебышева применим только для монотонных функций $\varphi(x)$ в (1.1), (1.2). Он уже не работает для функции $\varphi(x) = x^{2k}$ на интервалах, где она имеет два участка монотонности. Чтобы решить задачу Чебышева в этом случае, нужны новые идеи. Но их, по-видимому, будет достаточно, чтобы решить ее и для функций, имеющих конечное число участков монотонности. Мы предлагаем исследовать задачу Фейера для многочленов, в которой функцией $\varphi(x)$ будут ортогональные многочлены. О задачах Фейера для тригонометрических полиномов и родственных задачах см. в работе автора 2018 г. (Поточечная задача Турана для периодических положительно определенных функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 156–175).

Пусть $\int_a^b w(x)\,dx = 1$, $p \in \Pi_n$, $p(x) = \sum_{s=0}^n \widehat{p}_s P_s(x)$ — разложение $p(x)$ в сумму Фурье по системе ортонормированных многочленов $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ на интервале $(a,b)$ с весом $w(x)$, $\widehat{p}_s = \int_a^b p(x)P_n(x)w(x)\,dx$ — коэффициенты Фурье. Отметим, что $P_0(x) = 1$.

З а д а ч а Фейера. Для $k = 1,\dots,n$ вычислить величины $F_k(n) = \max \widehat{p}_k$, если

$$p(x) = \sum_{s=0}^{n} \widehat{p}_s P_s(x) \ge 0,\ x \in (a,b), \quad \widehat{p}_0 = \mu_0(p) = 1.$$

Если $P_1(x) = a_1x + a_0$, то $F_1(n) = a_1\overline{M}_1(n) + a_0$. В случае интервала $(-a,a)$ и четного веса $P_2(x) = a_2x^2 + a_0$ и $F_2(n) = a_2\overline{M}_2(n) + a_0$. В остальных случаях значения $F_k(n)$ неизвестны.

Автор признателен рецензенту за полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чебышев П.Л.** Об отношении двух интегралов, распространенных на одни и те же величины переменной (1883). Полное собрание сочинений. Т.3. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 132–156.
2. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
3. **Горбачев Д.В., Иванов В.И.** Лекции о квадратурных формулах и их применении в экстремальных задачах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 131 с.
4. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
5. **Иванов В.И.** Экстремальные значения моментов неотрицательных многочленов // Мат. заметки. 2020. Т. 108, № 4. С. 625–628.
6. **Островский А.М.** Решение уравнений и систем уравнений. М.: ИЛ, 1963. 220 с.
7. **Gautschiy W.** Orthogonal polynomials and quadrature // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 1999. Vol. 9. P. 65–76.
8. **Шашкин Ю.А.** Неподвижные точки. М.: Наука, 1989. 80 с.

9. **Полиа Г., Cеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 432 p.
10. **Levenshtein V.I.** Universal bounds for codes and designs // Handbook of Coding Theory / eds. V. S. Pless and W. C. Huffman Amsterdam: Elsevier, 1998. P. 499–648.

Поступила 31.08.2020
После доработки 5.11.2020
Принята к публикации 9.11.2020

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Тульский государственный университет, г. Тула
e-mail: ivaleryi@mail.ru

**REFERENCES**

1. Chebyshev P.L. On the ratio of two integrals extended to the same quantities of a variable (1883). In: Chebyshev P.L. *Complete set of works*, vol. 3. Moscow: Publishing house of the USSR Academy of Sciences, 1948, pp. 132–156 (in Russian).
2. Szegö G. *Orthogonal polynomials.* N Y: American Mathematical Society, 1939, 432 p. ISBN: 0821810235 . Translated to Russian under the title *Ortogonal'nye mnogochleny.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1962, 500 p.
3. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. *Lektsii o kvadraturnykh formulakh i ikh primenenii v ekstremal'nykh zadachakh* [Lectures on quadrature formulae and their application in extremal problems]. Tula: Publishing house of TSU, 2016, 131 p. ISBN: 978-5-7679-3630-40 .
4. Krylov V.I. *Approximate calculation of integrals.* Mineola, N Y: Dover, 2006, 368 p. ISBN: 0486445798 . Original Russian text published in Krylov V.I. *Priblizhennoe vychislenie integralov*, Moscow: Nauka Publ., 1967, 500 p.
5. Ivanov V.I. Extremal values of moments of nonnegative polynomials. *Math. Notes*, 2020, vol. 108, no. 4, pp. 611–614. doi: 10.1134/S0001434620090345 .
6. Ostrowski A.M. *Solution of equations and system of equations.* N Y; London: Academic Press, 1966, 352 p. ISBN: 9781483223643 . Original Russian text published in Ostrovskii A.M. *Reshenie uravnenii i sistem uravnenii.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1963, 220 p.
7. Gautschiy W. Orthogonal Polynomials and Quadrature. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 1999, vol. 9, pp. 65–76.
8. Shashkin Yu.A. *Fixed points.* Providence: AMS, 1991, 77 p. ISBN: 082189000X . Original Russian text published in Shashkin Yu.A. *Nepodvizhnye tochki.* Moscow: Nauka Publ., 1989, 80 p.
9. Pólya G., Szegö G. *Problems and theorems in analysis. Vol.* 2. Berlin: Springer, 1972, 392 p. ISBN: 978-3-540-63686-1 . Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza. T. 2.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 432 p.
10. Levenshtein V.I. Universal bounds for codes and designs. In: *Handbook of Coding Theory*, V. S. Pless and W. C. Huffman (eds). Amsterdam: Elsevier, 1998, pp. 499–648.

Received August 31, 2020
Revised November 5, 2020
Accepted November 9, 2020

**Funding Agency**: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-11-00199).

*Valerii Ivanovich Ivanov,* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia, e-mail: ivaleryi@mail.ru .

Cite this article as: V. I. Ivanov. Chebyshev's problem on extremal values of moments of nonnegative algebraic polynomials. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 138–154 .