ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 519.6

ЧЕБЫШЕВСКИЕ ПРОЕКЦИИ НА ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ[1]

В. И. Зоркальцев

Многие задачи прикладной математики представляются в виде проблемы поиска ближайшей к началу координат точки линейного многообразия. В частности, эта проблема может формулироваться в виде задачи минимизации евклидовой (метод наименьших квадратов) или чебышевской норм. Использование этих норм означает, что осуществляется поиск евклидовой или чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие. За счет введения и варьирования положительных весовых коэффициентов при компонентах векторов в указанных нормах получаем множества евклидовых и чебышевских норм, порождающих множества евклидовых и чебышевских проекций. Поиск чебышевской проекции на линейное многообразие формулируется как задача линейного программирования, которая может иметь не единственное решение. Причем среди ее решений могут быть явно неудовлетворительные по содержательным соображениям. В целях преодоления возникающих из-за этого проблем в чебышевской аппроксимации используется условие Хаара, означающее требование единственности решения указанной задачи линейного программирования. Это условие не всегда легко проверить, и неясно, что делать, если оно не выполняется. В данной статье предложен алгоритм, всегда приводящий к однозначному определению чебышевской проекции. Алгоритм базируется на поиске относительно внутренних точек оптимальных решений конечной последовательности задач линейного программирования с лексикографически упорядоченными целевыми функциями. Доказано, что множество чебышевских проекций (при использовании приводимого алгоритма) совпадает с множеством евклидовых проекций. Это утверждение позволяет распространить на множество чебышевских проекций доказанные ранее свойства евклидовых проекций, в том числе установленные факты ограниченности и связности множества евклидовых проекций. Доказанное утверждение о совпадении множеств евклидовых и чебышевских проекций может служить также в качестве подтверждения правильности введенного определения чебышевской проекции через алгоритм лексикографической оптимизации.

Ключевые слова: лексикографическая оптимизация, линейное многообразие, условие Хаара, чебышевские и евклидовы нормы, чебышевские проекции.

V. I. Zorkal'tsev. Chebyshev projections to a linear manifold.

Many problems of applied mathematics are presented in the form of the problem of finding the point of a linear manifold closest to the origin. In particular, this problem may take the form of a minimization problem for the Euclidean (least squares method) or Chebyshev norms. The use of these norms means that the Euclidean or Chebyshev projection of the origin onto a linear manifold is sought. By introducing and varying positive weight coefficients at the components of vectors in these norms, sets of Euclidean and Chebyshev norms are obtained that generate sets of Euclidean and Chebyshev projections. The search for the Chebyshev projection onto a linear manifold is represented as a linear program, which may have a nonunique solution. Moreover, some of its solutions may be clearly unsatisfactory with regards to the essence of the problem. In order to overcome the arising difficulties, the Haar condition is used in the Chebyshev approximation. This condition corresponds to the uniqueness requirement for the solution of the linear programming problem and is not always easy to check; moreover, it is not clear what to do if the condition is not met. We present an algorithm that always leads to an unambiguous determination of the Chebyshev projection. The algorithm is based on finding relatively interior points of optimal solutions to a finite sequence of linear programming problems with lexicographically ordered objective functions. It is proved that the set of Chebyshev projections (produced by the presented algorithm) coincides with the set of Euclidean projections. This statement allows us to extend the previously proved properties of Euclidean projections to the set of Chebyshev projections, including the established facts of boundedness and connectedness of the set of Euclidean projections. The proved statement about the coincidence of the sets of Euclidean and Chebyshev projections also confirms the correctness of the introduced definition of the Chebyshev projection by means of the lexicographic optimization algorithm.

Keywords: lexicographic optimization, linear manifold, Haar condition, Chebyshev and Euclidean norms, Chebyshev projections.

MSC: 03C07, 03C60

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-44-55

[1]Работа выполнена в рамках научного проекта РАН № 0279-2019-0003 и при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-07-00322).

Введение

Многие модели и методы прикладной математики используют задачи поиска ближайшей к началу координат точки линейного многообразия в конечном вещественном линейном пространстве. К таким задачам относится поиск псевдорешений несовместной системы линейных уравнений (см. [1–4]), т. е. векторов переменных, дающих минимальные, в каком-то смысле абсолютные, значения невязок всех уравнений. Множество векторов невязок системы линейных уравнений образуют, как известно, линейное многообразие. Это множество определяется как сдвиг на заданный вектор образа матрицы. В частности, таким множеством являются векторы "погрешности аппроксимации" общеизвестной задачи вычисления коэффициентов линейной регрессии.

К другому типу задач из этого же класса относятся проблемы нахождения решения совместной системы линейных уравнений наиболее близкого (в каком-то смысле) к нулевому вектору. К этому типу сводятся (за счет замены переменных) проблемы поиска решения системы уравнений, ближайшего к заданному вектору, не удовлетворяющему рассматриваемой системе. В таком виде представляются, например, проблемы составления отчетного (см. [5]) и перспективного (см. [6]) межотраслевого баланса (см. [7]).

Задача поиска решения системы линейных уравнений, максимально приближенного к нулевому вектору, возникает в вычислительных методах. Например, при решении системы нелинейных уравнений методом итеративной линеаризации (варианты метода Ньютона) к такой задаче сводится проблема поиска направления корректировки решения. Выбор направления корректировки решения в результате линеаризации исходной системы осуществляется как поиск решения системы линейных уравнений. Чтобы минимизировать погрешности линеаризации, целесообразно искать решение этой линейной системы, максимально приближенное к нулевому вектору. Отметим, что часто (см. [8; 9]) метод Ньютона излагается для случая, когда число уравнений совпадает с числом переменных и итеративно вычисляемые матрицы частных производных не особенные. За счет указанных здесь приемов метод Ньютона можно распространить и на ситуации, когда число уравнений не совпадает с количеством переменных.

Во всех указанных выше и во многих других задачах могут использоваться разные способы конкретизации понятия "ближайшие к началу координат точки линейного многообразия". В [6] были приведены варианты таких конкретизаций, представлены результаты по изучению свойств и взаимосвязей решений при разных определениях понятия близости к началу координат. Эти исследования были развиты в последующих публикациях автора и в более полном виде представлены в статье [10]. Не были изучены (анонсировались только некоторые результаты) и доказаны свойства чебышевских проекций начала координат на линейное многообразие. Для чебышевсеих проекций потребовалось, прежде всего, уточнить само понятие "чебышевской проекции", разработать и обосновать излагаемый далее алгоритм, всегда приводящий к однозначному выбору чебышевской проекции и не нуждающийся во введении специальных предположений относительно рассматриваемого линейного многообразия.

1. Исходные определения

Пусть L — линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$, т. е. множество векторов таких, что при любых x^1 и x^2 из него при любом вещественном λ вектор $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ находится также в L. Считаем, что L не является линейным подпространством, начало координат в L не находится. Одна из возможных постановок проблемы поиска ближайшей к началу координат точки линейного многообразия представляется в виде задачи минимизации штрафной функции

$$f(x) \to \min, \quad x \in L. \tag{1}$$

В [6] рассматривался класс дифференцируемых штрафных функций, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{sign}(\nabla_j f(x)) = \operatorname{sign}(x_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

для которых существует дифференцируемое возрастающее преобразование, переводящее их в строго выпуклые функции. Выражение $\nabla_j f(x)$ обозначает частную производную f в точке x. Значение функции $\operatorname{sign}(\alpha)$ от вещественного α равно 1, 0 или -1, если $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ или $\alpha < 0$, соответственно.

Множество указанных функций обозначим через F. Для функции $f \in F$ существует единственное решение задачи (1), которое обозначим через $x(f)$. К множеству F относятся гельдеровские нормы

$$\varphi_h^p(x) = \Big(\sum_{j=1}^n h_j \, |x_j|^p \Big)^{1/p},$$

где p — заданный степенной коэффициент из открытого интервала $(1, \infty)$, h_j — заданные положительные весовые коэффициенты, образующие вектор $h \in \mathbb{R}^n$. При возведении в степень p гельдеровская норма переходит в строго выпуклую функцию

$$f_h^p(x) = \sum_{j=1}^n h_j \, |x_j|^p.$$

При $p = 2$ имеем евклидову норму. В этом случае задача (1) решается методом наименьших квадратов. Обозначим: $PF = \{x(f) \colon f \in F\}$, $P_p = \{x(\varphi_h^p) \colon h_j > 0, \ j = 1, \dots, n\}$ — множества решений задачи (1) при всех $f \in F$ и гельдеровских проекций при фиксированном степенном коэффициенте $p \in (1, \infty)$, соответственно.

В [6] доказано, что любую гельдеровскую проекцию и, более того, решение задачи (1) при любой целевой функции из F можно получить методом наименьших квадратов за счет выбора весовых коэффициентов: при любом $p \in (1, \infty)$ $P_2 = P_p = PF$.

В качестве уточнения отметим: в данном случае словосочетание "можно получить" означает, что для оптимального решения задачи (1) при любой функции $f \in F$ существует вектор положительных весовых коэффициентов h, при котором $x(f) = x(f_h^2)$.

Двум предельным значениям степенного коэффициента гельдеровских норм $p = 1$ и $p = \infty$ соответствуют октаэдральная и чебышевская нормы:

$$f_h^1(x) = \sum_{j=1}^n h_j \, |x_j|, \tag{2}$$

$$f_h^\infty(x) = \max_{j=1,\dots,n} h_j \, |x_j|. \tag{3}$$

В обоих случаях h_j — заданные положительные весовые коэффициенты. При использовании в качестве целевой функции f_h^1 задача (1) решается методом наименьших модулей. Нормы (2) и (3) не относятся к классу функций F. В работе [10] были подробно исследованы свойства множества октаэдральных проекций

$$P_1 = \bigcup_{h > 0} X(h),$$

где неравенство $h > 0$ означает, что все компоненты вектора h положительные,

$$X(h) = \operatorname{Arg}\min\{f_h^1(x) \colon x \in L\}$$

— множество решений задачи (1) при использовании в качестве целевой функции октаэдральной нормы f_h^1 с фиксированным вектором весовых коэффициентов h.

При использовании октаэдральной нормы задача (1) может иметь не единственное решение, что является существенным недостатком октаэдральных проекций. Доказано (см. [10]), что множество октаэдральных проекций замкнутое и совпадает с замыканием множества евклидовых проекций

$$P_1 = \operatorname{cl} P_2. \tag{4}$$

Обозначим через $J_-(x)$, $J_+(x)$, $J(x)$, $J_0(x)$ — множества номеров компонент вектора x с отрицательными, положительными, ненулевыми и нулевыми значениями. Множество номеров $J(x)$ принято (см. [11]) называть *носителем* вектора x. Пусть S — линейное подпространство, параллельное L, т. е. множество, состоящее из векторов $s = x - y$, где x и y — любая пара векторов из L.

В качестве конкретизации понятия "ближайшего к началу координат вектора" можно использовать также парето-оптимальные решения многокритериальной задачи минимизации абсолютных значений всех компонент вектора линейного многообразия. Множество таких решений обозначим

$$Q = \{x \in L\colon \neg\exists s \in S,\ s \neq 0,\ J_+(s) \subseteq J_+(x),\ J_-(s) \subseteq J_-(x)\}.$$

Множество Q является замкнутым, и, как доказано в [10], с ним совпадает множество октоэдральных проекций, а также согласно (4) замыкание множества евклидовых проекций

$$Q = P_1 = \operatorname{cl} P_2. \tag{5}$$

Еще одним способом конкретизации понятия "ближайшего к началу координат вектора" является поиск векторов с минимальным (не сужаемым) носителем. Эти векторы образуют множество

$$B = \{x \in L\colon \neg\exists y \in L,\ J(y) \subset J(x)\}.$$

Здесь и далее символ $\subset$ означает строгое включение (включено и не совпадает) в отличие от символа нестрогого включения $\subseteq$. Количество векторов в B конечно, их не более чем C_n^m, где m — размерность линейного многообразия L, т. е. число векторов в базисе S. В [10] доказано, что выпуклая оболочка Q совпадает с выпуклой оболочкой B: $\operatorname{co} Q = \operatorname{co} B$. Следовательно, Q — ограниченное множество. В работе [10] установлено, что множество Q связное, но, возможно, невыпуклое (при $n \geqslant 4$). Векторы из B можно также определить как векторы линейного многообразия L с максимальным (не расширяемым) набором нулевых компонент. Особая роль таких векторов для задачи линейной аппроксимации исследуется, в частности, в [12; 13].

Можно отметить такой важный, доказанный в [12], факт: при любом наборе положительных весовых коэффициентов h_j, $j = 1, \ldots, n$, получаемое множество октоэдральных проекций обязательно содержит векторы из B

$$X(h) \cap B \neq \varnothing.$$

Это свойство для случая $h_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$, применительно к задаче оценки параметров линейной регрессии рассматривалось в [14]. Указанный факт может служить для объяснений достоинств метода наименьших квадратов (в частности, его робастности) и недостатков (в том числе отсутствия непрерывности изменений получаемых решений при изменениях весовых коэффициентов). Данный факт означает также, что октаэдральная проекция будет единственной в том и только том случае, если этой проекцией является вектор из B.

Отметим также, что множество Q состоит из объединения конечного числа политопов, образуемых в виде выпуклых оболочек векторов из B. Множество B по отношению к множеству Q и в силу (5) к множествам октоэдральнх евклидовых и гельдеровских проекций играет роль, аналогичную "узловым решениям" системы линейных неравенств (в терминологии С. Н. Черникова [15]).

Здесь представлены только некоторые основные результаты проводимых нами исследований свойств и взаимосвязей ближайших к началу координат точек линейных многообразий при различных определениях понятия “близость”. Представленные в начале статьи области приложений не претендуют на полноту. Задача поиска ближайших в каком-то смысле точек множеств к данному вектору возникает во многих областях прикладной математики. При этом нередко имеется возможность использования разных способов формулировки таких задач. Полезно знать, как будут соотноситься решения при разных формулировках понятия “близости”, какими свойствами они будут обладать.

Представленные выше результаты развивались в работе [16] применительно к более общим, чем линейные многообразия, объектам, а именно к выпуклым полиэдрам (множествам решений систем линейных неравенств). Как известно, в виде систем линейных неравенств представимы задачи линейного, квадратичного и даже выпуклого программирования (см. [17; 18]). Обсуждаемые здесь исследования могут быть полезны для изучения несобственных задач оптимизации, активно развиваемых в уральской школе исследования операций (см., например, [1; 2; 4; 19]). Безусловно, интерес должно представлять выяснение вопросов о влиянии выбора штрафных функций за нарушения ограничений исходной и двойственной задач оптимизации на получаемое решение, о взаимосвязи и свойствах решений при разных штрафных функциях.

До недавнего времени из исследований выпадали чебышевские проекции точки на линейное многообразие и выпуклый полиэдр, хотя это очень важный случай, в том числе для задач чебышевской аппроксимации функций (см., например, [20–22]). Использование чебышевской нормы в качестве целевой функции задачи (1), также как и октоэдральной нормы, может приводить к не единственности решения этой задачи, причем использование функции f_h^∞ (в отличие от функции f_h^1) может давать оптимальные решения задачи (1), не находящиеся в множестве Q. В целях преодоления возникающих из-за этого проблем в чебышевской аппроксимации используется условие Хаара (см. [23; 24]), означающее требование единственности решения задачи (1) с целевой функцией f_h^∞ для любого вектора h положительных весовых коэффициентов. Это условие не всегда легко проверить, и не ясно, что делать, если оно не выполняется.

В [25] изложен алгоритм однозначного определения во всех случаях чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие, который не нуждается в каких-либо особых требованиях к линейному многообразию. Предложенный алгоритм базируется на поиске относительно внутренних точек оптимальных решений конечной последовательности задач линейного программирования с лексикографически упорядоченными целевыми функциями. Этот алгоритм был приведен в [25] для иллюстрации преимущества особенности метода внутренних точек вырабатывать именно относительно внутреннюю точку множества.

2. Алгоритм однозначного определения чебышевской проекции

Пусть $J_1 = \{j = 1, \dots, n\},\ S^1 = S$. При $f = f_h^\infty$ задача (1) представляется в виде задачи линейного программирования

$$\alpha \to \min, \tag{6}$$

$$-\alpha \le h_j\, x_j \le \alpha, \quad j \in J_t, \tag{7}$$

$$x \in L \tag{8}$$

для $t = 1$. Эта задача может иметь не единственное решение. Подчеркнем, что среди множества решений могут быть явно неудовлетворительные по содержательным соображениям.

П р и м е р. Пусть $n = 2$; линейное многообразие задано условием $x_2 = 1$. Множество решений задачи (6)–(8) в этом случае по переменной x_1 составляет интервал $[-h_2/h_1, h_2/h_1]$, причем по содержательным соображениям удовлетворительным является только значение $x_1 = 0$. Именно в точке $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ будет достигаться решение задачи минимизации октаэдральной, евклидовой и гельдеровской норм на рассматриваемом линейном многообразии при любых положительных весовых коэффициентах $h_1,\ h_2$. И только из одной этой точки состоит в данном случае множество Q.

Приведем алгоритм, вырабатывающий единственное значение чебышевской проекции, которое гарантированно находится в множестве Q. Алгоритм основан на последовательном решении задачи (6)–(8) для $t = 1, \ldots, T$ с дополнительным условием

$$x_j = \bar{x}_j, \quad j \in N_t \tag{9}$$

при $N_1 = \varnothing$, т. е. при $t = 1$ это условие несущественно. Здесь следует находить относительную внутреннюю точку множества оптимальных решений задачи (6)–(9), что важно, если указанная задача имеет не единственное решение.

На этапах вычисления $t > 1$ условие (9) фиксирует значения переменных x_j с номерами j из N_t на определяемом далее уровне $\bar{x}_j$. С ростом номера этапа t набор N_t расширяется за счет сужения набора J_t. Согласно приводимым далее правилам

$$N_t \cap J_t = \varnothing, \quad N_t \cup J_t = \{1, \ldots, n\}, \quad t = 1, \ldots, T,$$
$$N_t \subset N_{t+1}, \quad J_{t+1} \subset J_t, \quad t = 1, \ldots, T-1. \tag{10}$$

Пусть α^t — оптимальное значение целевой функции задачи (6)–(9) для данного $t \geqslant 1$. Обозначим через x^t оптимальное решение этой задачи с минимальным (не сужаемым) набором ограничений (7), выполняющихся в виде равенства, т. е. x^t — относительно внутренняя точка (см. [11]) оптимальных решений задачи (6)–(9). Такие особые решения задачи линейного программирования вырабатывают алгоритмы внутренних точек (см. [6]).

Обозначим через $I_+^t,\ I_-^t$ множества номеров $j \in J_t$, для которых соответственно

$$h_j x_j^t = \alpha^t, \quad h_j\, x_j^t = -\alpha^t.$$

Считаем, что S^1 — линейное подпространство, параллельное L, обозначенное ранее как S. Поскольку x^t — решение задачи (6)–(9) с минимальным набором активных ограничений, то не существует вектор $s \in S^t$, при котором

$$J(s) \cap I^t \neq \varnothing, \quad J_+(s) \cap I_+^t = \varnothing, \quad J_-(s) \cap I_-^t = \varnothing,$$

где $I^t = I_+^t \cup I_-^t$.

Зафиксируем значения компонент вектора переменных, для которых активны ограничения (7): $\bar{x}_j = x_j^t,\ j \in I^t$. Пусть

$$J_{t+1} = J_t / I^t, \quad N_{t+1} = N_t \cup I^t; \quad S^{t+1} = \{s \in S^t \colon s_j = 0,\ j \in I^t\}.$$

Отметим, что $I^t \neq \varnothing$, поэтому справедливо (10). Если $J_{t+1} \neq \varnothing$, то переходим к поиску относительно внутренней точки оптимального решения задачи (6)–(9) при $t := t + 1$.

Поскольку J_{t+1} строго включено в J_t, то через конечное число этапов таких вычислений множество J_{t+1} окажется пустым. Это будет выполнено на этапе $t = T$. Вектор x^T определяется описанным вычислительным процессом однозначно. Назовем данный вектор *чебышевской проекцией начала координат на линейное многообразие* L и обозначим через $x(f_h^\infty)$. Можно использовать уточнение, что данный вектор является чебышевской проекцией начала координат на линейное многообразие при использовании в чебышевской норме вектора весовых коэффициентов h. Совокупность таких векторов при различных наборах положительных весовых коэффициентов назовем *множеством чебышевских проекций начала координат на линейное многообразие*:

$$P_\infty = \{x(f_h^\infty) \colon h_j > 0,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Как доказано в [25], вектор $x(f_h^\infty)$ при любых весовых коэффициентах $h_j > 0,\ j = 1, \ldots, n$, находится в Q, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 1. $P_\infty \subseteq Q$.

Эта теорема означает, что введенные здесь чебышевские проекции обладают свойством быть ближайшими к началу координат векторами линейного многообразия по наиболее общему из приведенных выше определений этого понятия.

Если задача (6)–(8) при $t = 1$ имеет единственное решение, в том числе, если выполняется условие Хаара, то именно это решение будет получено изложенным здесь алгоритмом и согласно теореме 1 будет находиться в Q. Теорема 1 означает также, что и в случае, когда у задачи (6)–(8) при $t = 1$ неединственное решение, из их множества изложенным алгоритмом будет выбрано решение, находящееся также в Q. Следующий раздел будет посвящен выяснению связей введенных чебышевских проекций с евклидовыми проекциями.

3. Множество чебышевских проекций совпадает с множеством евклидовых проекций

В данном разделе будет использоваться один из вариантов утверждений об альтернативных системах линейных неравенств (аналог теорем Гордана и Штимке, см. [26]).

Лемма. *Пусть A — матрица размера $m \times n$. Тогда существует либо вектор $z \in \mathbb{R}^n$ такой, что*

$$Az = 0, \quad z_j > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

либо вектор $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что при некотором $u \in \mathbb{R}^m$

$$y = A^T u, \quad y \leq 0, \quad y \neq 0.$$

Поскольку исходное подпространство S всегда может быть представлено как ядро некоторой матрицы A размера $m \times n$, т. е. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = 0\}$, и при этом $S^\perp$ будет образом транспонированной матрицы A^T, т. е. $S^\perp = \{x = A^T u \colon u \in \mathbb{R}^m\}$, то результат леммы можно сформулировать чуть общее.

А именно если S и $S^\perp$ — ортогональные линейные подпространства $\mathbb{R}^n$, то существует либо вектор $x \in S,\ x_j > 0,\ j = 1, \dots, n$, либо вектор $y \in S^\perp,\ y \leq 0,\ y \neq 0$, т. е. один из таких векторов обязательно существует, но оба одновременно не могут существовать.

Приведенная лемма поможет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Справедливо равенство*: $P_\infty = P_2$.

Доказательство. Пусть при заданных $h_j > 0,\ j = 1, \dots, n$,

$$x = x(f_h^2), \tag{11}$$

т. е. $x \in L$, и в этой точке производная функции f_h^2 по любому направлению, не выводящему из L, равна нулю: при любом $s \in S$

$$\sum_{j=1}^{n} h_j\, x_j\, s_j = 0. \tag{12}$$

Положим

$$d_j = \frac{1}{|x_j|}, \quad j \in J(x).$$

Каждое значение d_j при $j \in J_0(x)$ может быть любым положительным числом. Поскольку $0 \notin L$, то $x \neq 0$. Поэтому $f_d^\infty(x) = 1$, так как $d_j |x_j| = 1,\ j \in J(x)$.

Предположим, что

$$x \neq x(f_d^\infty). \tag{13}$$

Следовательно, существует $y \in L$, при котором $f_d^\infty(y) < 1$, т. е. $d_j|y_j| < 1,\ j = 1, \dots, n$. Значит, для

$$s = y - x \tag{14}$$

выполняются соотношения $J_+(x) \subseteq J_-(s),\ J_-(x) \subseteq J_+(s)$. Поэтому для данного s

$$\sum_{j \in J(x)} h_j\, x_j\, s_j < 0.$$

Поскольку при любом $s \in S$

$$\sum_{j \in J_0(x)} h_j\, x_j\, s_j = 0,$$

то для определенного в (14) вектора равенство (12) не выполняется. Получаем противоречие с исходным условием (11), доказывающее ошибочность предположения (13).

Итак, доказано, что при любом $h_j > 0,\ j = 1, \dots, n$, существуют весовые коэффициенты $d_j > 0,\ j = 1, \dots, n$, при которых $x(f_d^\infty) = x(f_h^2)$. Поэтому

$$P_2 \subseteq P_\infty.$$

Осталось доказать справедливость обратного соотношения:

$$P_\infty \subseteq P_2. \tag{15}$$

Пусть при некоторых $d_j > 0,\ j = 1, \dots, n\ \ x = x(f_d^\infty)$. Требуется доказать, что существуют $h_j > 0,\ j = 1, \dots, n$, при которых $x = x(f_h^2)$.

Пусть $s^i,\ i = 1, \dots, m$ — векторы, составляющие базис линейного подпространства S. Согласно приведенной выше лемме обязательно справедливо одно и только одно из двух: либо существует вектор $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\sum_{j=1}^n h_j\, x_j\, s_j^i = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{16}$$

$$h_j > 0, \quad j = 1, \dots, n; \tag{17}$$

либо при некотором $u \in \mathbb{R}^m$ для

$$s = \sum_{i=1}^m u_i\, s^i \tag{18}$$

при

$$c_j = x_j\, s_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{19}$$

справедливо неравенство

$$c_j \le 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{20}$$

а для некоторого непустого множества номеров I верно неравенство

$$c_j < 0, \quad j \in I. \tag{21}$$

В качестве пояснения отметим, что в сформулированной здесь альтернативе роль коэффициентов матрицы A (в приведенной выше лемме) выполняют значения

$$a_{ij} = x_j\, s_j^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Роль первого вектора z в лемме выполняет здесь вектор h, а роль второго вектора y в лемме — вектор c.

Предположим, что справедливы (18)–(21). Следовательно, для данного $s \in S$

$$J_-(s) \subseteq J_+(x), \quad J_+(s) \subseteq J_-(x), \tag{22}$$

причем $J_-(s) \cup J_+(s) = I$. Соотношения (22) означают, что для вектора $-s$, также находящегося в линейном подпространстве S, справедливы соотношения

$$J_+(-s) \subseteq J_+(x), \quad J_-(-s) \subseteq J_-(x)\}.$$

При этом $-s \neq 0$, так как $J(-s) = I$. Из наличия такого вектора в S по определению Q следует, что $x \notin Q$. Это противоречит теореме 1. Таким образом, при некотором $h \in \mathbb{R}^n$ выполняются уравнения и неравенства (16), (17), и поэтому справедливо (15).

Соотношение (15) и теорема доказаны.

Утверждение, что любая евклидова проекция точки на линейное многообразие является чебышевской проекцией этой точки, было доказано в [27]. Это доказательство позволяет, располагая значением евклидовой проекции для данной евклидовой нормы, определить весовые коэффициенты чебышевской нормы, при которых чебышевская проекция совпадает с исходной евклидовой проекцией. Это свойство использовано Е. В. Губий и С. М. Пержабинским при проведении исследований по сравнительному анализу чебышевской аппроксимации и аппроксимации методом наименьших квадратов зависимости математического ожидания приведенных затрат на создание биоэнергетических плантаций от объемов средств обеспечения надежности топливоснабжения. Представленное здесь доказательство обратного утверждения о том, что любая чебышевская проекция является евклидовой, имеет менее конструктивный характер. Утверждается только в процессе доказательства, что для любой чебышевской нормы существует надлежащая евклидова норма, без указания конкретных значений весовых коэффициентов евклидовой нормы.

Заключение

Теорему 2 можно рассматривать как существенный аргумент к тому, чтобы считать приведенный в разд. 2 алгоритм единственно правильным способом определения чебышевской проекции точки на линейное многообразие. Тот факт, что варьирование положительных весовых коэффициентов в евклидовой и чебышевской нормах порождает одинаковые множества евклидовых и чебышевских проекций начала координат на линейное многообразие, позволяет перенести на множество чебышевских проекций установленные ранее свойства множества евклидовых проекций. Множество P_∞ является ограниченным, связным, возможно невыпуклым и незамкнутым. Замыкание P_∞ совпадает с Q. Выпуклая оболочка замыкания $\operatorname{cl} P_\infty$ совпадает с выпуклой оболочкой B.

В дополнение приведем еще один аргумент в пользу использования определенного выше вектора $x(f_h^\infty)$ в качестве “единственно правильной” чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие. Как известно, чебышевская норма с фиксированным вектором положительных весовых коэффициентов h при возрастании степенного коэффициента к бесконечности переходит в чебышевскую норму: для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{p \to \infty} \varphi_h^p(x) = f_h^\infty(x).$$

Оказывается (см. [28]), что гельдеровские проекции начала координат на линейное многообразие при одних и тех же весовых коэффициентах в гельдеровской норме сходятся при возрастании степенного коэффициента к одной точке, и этой точкой является определенная выше чебышевская проекция:

$$\lim_{p \to \infty} x(\varphi_h^p) = x(f_h^\infty).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И.** Противоречивые модели экономики. Москва: Наука, 1980. 160 с.
2. **Ватолин А. А.** Об аппроксимации несовместных систем линейных уравнений и неравенств // Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1984. С. 39–54.
3. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач методом наименьших квадратов. Москва: Наука, 1986. 232 с.
4. **Фролов В. Н.** Оптимизация плановых программ при согласованных ограничениях. Москва: Наука, 1986. 165 с.
5. **Черкассовский Б. В.** Задачи балансировки матриц // Методы математического программирования и программное обеспечение. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1984. С. 216–217.
6. **Зоркальцев В. И.** Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. Новосибирск: Наука, 1995. 220 с.
7. **Аганбегян А. Г., Гранберг А. Г.** Экономико-математический анализ межотраслевого баланса СССР. Москва: Мысль, 1968. 357 с.
8. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1968. 544 с.
9. **Самарский А. А., Гулин А. В.** Численные методы: учеб. пособие для вузов. Москва: Наука, 1989. 432 с.
10. **Зоркальцев В. И.** Октаэдрические и евклидовы проекции точки на линейное многообразие // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 18, №3. С. 106–118.
11. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
12. **Мудров В. И., Кушко В. Л.** Методы обработки измерений (квазиправдоподобные оценки). Москва: Сов. радио, 1976. 192 с.
13. **Мудров В. И., Кушко В. Л.** Методы обработки измерений: квазиподобные оценки. Москва: Наука, 1983. 304 с.
14. **Лакеев А. В., Носков С. И.** Метод наименьших модулей для линейной регрессии: число нулевых ошибок аппроксимации // Тр. XV Байкальской междун. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. Т. 2. С. 117–120.
15. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. Москва: Наука, 1968. 488 с.
16. **Зоркальцев В. И.** Проекции точки на полиэдр // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, №1. С. 4–19.
17. **Еремин И. И., Астафьев Н. И.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. Москва: Наука, 1970. 141 с.
18. **Астафьев Н. И.** Линейные неравенства и выпуклость. Москва: Наука, 1982. 162 с.
19. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. И.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. Москва: Наука, 1983. 336 с.
20. **Чебышев П. Л.** Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций. Полное собрание сочинений. Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1944. С. 151–235.
21. **Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.** Введение в минимакс. Москва: Наука, 1972. 368 с.
22. **Малоземов В. Н.** Получение равномерного приближения функций нескольких аргументов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1970. № 3. С. 575–586.
23. **Коллатц Л., Крабе В.** Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. Москва: Наука, 1978. 269 с.
24. **Haare A.** Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen // Math. Ann. 1918. Vol. 78, № 3. P. 415–127.
25. **Зоркальцев В. И.** Метод внутренних точек: история и перспективы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, №10. С. 1649–1665.
26. **Зоркальцев В. И., Киселева М. А.** Системы линейных неравенств (учеб. пособие). Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2007. 128 с.
27. **Губий Е. В., Зоркальцев В. И., Пержабинский С. М.** Чебышевские и евклидовы проекции точки на линейное многообразие // Управление большими системами. 2019. Вып. 80. С. 6–19.

28. **Зоркальцев В. И.** Чебышевские приближения могут обходиться без условия Хаара // Материалы междун. симпозиума “Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование” / Иркут. гос. ун-т. Иркутск, 2019. С. 29–33.

Поступила 03.06.2020
После доработки 25.07.2020
Принята к публикации 10.08.2020

Зоркальцев Валерий Иванович
д-р техн. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Лимнологический институт СО РАН
г. Иркутск
e-mail: zork@isem.irk.ru

REFERENCES

1. Eremin I.I. *Protivorechivye modeli ehkonomiki* [Contradictory models of economics]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 160 p.
2. Vatolin A.A. On the approximation of inconsistent systems of linear equations and inequalities. In: *Approximation methods for improper problems of mathematical programming, Collect. Artic.* Sverdlovsk, 1984, pp. 39–54 (in Russian).
3. Lawson C.L., Hanson R.J. *Solving least squares problems.* Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, 1974, 340 p. ISBN: 0138225850 . Translated to Russian under the title *Chislennoe reshenie zadach metoda naimen'shikh kvadratov.* Moscow: Nauka Publ., 1986, 232 p.
4. Frolov V.N. *Optimizatsiya planovykh programm pri slabo soglasovannykh ogranicheniyakh* [Optimization of planning programs under weakly consistent constraints]. Moscow: Nauka Publ., 1986, 165 p.
5. Cherkassovskiy B.V. Matrix balancing problems. In: *Methods of mathematical programming and software.* Sverdlovsk: UrO Akad. Nauk Publ., 1984, pp. 216–217.
6. Zorkal'tsev V.I. *Metod naimen'shikh kvadratov: geometricheskie svoistva, al'ternativnye podkhody, prilozheniya* [The Least squares method: geometric properties, alternative approaches, and applications]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1995, 220 p. ISBN: 5-02-030676-2 .
7. Aganbegyan A.G., Granberg A.G. *Ekonomiko-matematicheskii analiz mezhotraslevogo balansa SSSR* [Economic-mathematical analysis of the interindustry balance of the USSR]. Moscow: Mysl' Publ., 1968, 357 p.
8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Mineola; N Y: Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1968, 544 p.
9. Samarskii A.A., Gulin A.V. *Chislennye metody: Ucheb. posobie dlya vuzov* [Numerical methods: the manual for high schools]. Moscow: Nauka Publ., 1989, 432 p. ISBN: 5-02-013996-3 .
10. Zorkal'tsev V.I. Octahedral and Euclidean projections of a point to a linear manifold. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. 185–197. doi: 10.1134/S0081543814020163 .
11. Rockafellar R. *Convex analysis.* Princeton: Princeton University Press, 1970, 451 p. ISBN: 0691015864 . Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1973, 470 p.
12. Mudrov V.I., Kushko V.L. *Metody obrabotki izmerenii (kvazipravdopodobnye otsenki)* [Methods of measurement processing (quasi likelihood estimations)]. Moscow: Sov. Radio Publ., 1976, 192 p.
13. Mudrov V.I., Kushko V.L. *Metody obrabotki izmerenii (kvazipravdopodobnye otsenki)* [Methods of measurement processing (quasi likelihood estimations)]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 304 p.
14. Lakeev A.V., Noskov S.I. The least module method for linear regression: the number of zero approximation errors. *Modern Technologies, System analysis, Modeling*, 2012, no. 2 (34), pp. 48–50 (in Russian).
15. Chernikov S.N. *Lineinye neravenstva* [Linear inequalities]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 488 p.
16. Zorkal'tsev V.I. Projecting a point on a polyhedron. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2013, vol. 53, no. 1, pp. 4–19 (in Russian). doi: 10.7868/S004446691301016X .

17. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu linejnogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1970, 141 p.
18. Astaf'ev N.I. *Lineinye neravenstva i vypuklost'* [Linear inequalities and convexity]. Moscow: Nauka Publ., 1982, 162 p.
19. Eremin I.I., Mazurov V.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.
20. Chebyshev P.L. Questions on smallest quantities connected with the approximate representation of functions. In: Chebyshev P.L. *Collected works, vol. 2.* Moscow; Leningrad: Izd. Akad. Nauk SSSR, 1947, pp. 151–235.
21. Dem'yanov V.F., Malozemov V. N. *Introduction to minimax.* New York: Dover, 1974, 307 p. ISBN: 0486664236 . Original Russian text published in Dem'yanov V.F., Malozemov V.N. *Vvedenie v minimaks.* Moscow: Nauka Publ., 1972, 368 p.
22. Malozemov V.N. The best uniform approximation for functions of several arguments. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1970, vol. 10, no. 3, pp. 28–43. doi: 10.1016/0041-5553(70)90112-6 .
23. Collatz L., Krabs V. *Approximation theory. Chebyshev approximations and their applications.* Wiesbaden: Springer, 1973, 209 p. doi: 10.1007/978-3-322-94885-4 . (In German). Translated to Russian under the title *Teoriya priblizhenii. Chebyshevskie priblizheniya i ikh prilozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 269 p.
24. Haar A. Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Math. Ann.*, 1917, vol. 78, no. 1, pp. 294–311. doi: 10.1007/BF01457106 .
25. Zorkal'tsev V.I. Interior Point Method: History and Prospects. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 10, pp. 1597–1612. doi: 10.1134/S0965542519100178 .
26. Zorkal'tsev V.I., Kiseleva M.A. *Sistemy lineinykh neravenstv* (Systems of Linear Inequalities). Irkutsk: Irkutsk Gos. Univ., 2007, 128 p. ISBN: 978-5-9624-0197-3 .
27. Gubiy E., Zorkal'tsev V.I., Perzhabinskii S.M. Chebyshev and euclidean projections of point on linear manifold. *Upravlenie Bol'shimi Sistemami*, 2019, vol. 80, pp. 6–19 (in Russian). doi: 10.25728/ubs.2019.80.1 .
28. Zorkal'tsev V.I. Chebyshev approximations can dispense with the Haare condition. In: *Proc. Int. Symp. "Dynamic systems, optimal control and mathematical modelling"*, Irkutsk: Irkut. State Univ. Publ., 2019, pp. 29–33.

Received June 3, 2020
Revised July 25, 2020
Accepted August 10, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Academy of Sciences (project no. 0279-2019-0003) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-07-00322).

Valeriy Ivanovich Zorkaltsev, Dr. Tech. Sci., Prof., Limnological Institute SB RAS, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: zork@isem.irk.ru .

V. I. Zorkal'tsev. Chebyshev projections to a linear manifold, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 44–55 .