ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 519.865.3

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОБМЕНА[1]

В. И. Шмырев

Работа посвящена дальнейшему развитию оригинального подхода к поиску равновесных состояний в линейных экономических моделях обмена. Концептуальной основой подхода является полиэдральная комплементарность, обобщающая известную схему линейной комплементарности. Исходная проблема сводится к отысканию неподвижных точек кусочно-постоянных многозначных отображений на симплексе цен, порождаемых парой полиэдральных комплексов в двойственности. Для модели с фиксированными бюджетами (модель Фишера) возникающие отображения потенциальны, что позволяет свести проблему равновесия к паре оптимизационных задач, находящихся в двойственности подобно задачам линейного программирования. Полученное сведение отлично от широко известного результата Гейла — Айзенберг и позволяет предложить конечные алгоритмы отыскания равновесных цен. В статье представлена концептуально завершенная версия подхода. Дана точная формулировка двойственного варианта предложенного сведения как для модели Фишера, так и для ее обобщений. Получено сведение и для общей модели с переменными бюджетами.

Ключевые слова: модель обмена, экономическое равновесие, неподвижная точка, полиэдральная комплементарность, оптимизационная задача, сопряженная функция, алгоритм.

V. I. Shmyrev. Duality in linear economic models of exchange.

A further development of an original approach to the equilibrium problem in a linear exchange model and its variations is presented. The conceptual basis of the approach is polyhedral complementarity. The original problem is reduced to a fixed point problem for a piecewise constant point-to-set mapping on the price simplex. For the model with fixed budgets (Fisher model), the emerging mapping is potential, and this provides a new reduction of the equilibrium problem to a pair of optimization problems. The problems are in duality similarly to linear programming problems. This reduction of the Fisher model differs from the well-known reduction of E. Eisenberg and D. Gale and allows a development of two finite algorithms for searching equilibrium prices. In this paper we present a new conceptually complete version of the approach. We give an explicit formulation of the dual variant of the obtained reduction for the Fisher model and its generalizations. The reduction of the equilibrium problem to an optimization problem is also obtained for the general exchange model with variable budgets.

Keywords: exchange model, economic equilibrium, fixed point, polyhedral complementarity, optimization problem, conjugate function, algorithm.

MSC: 90C33, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-258-274

Введение

Для решения проблемы равновесия в линейных экономических моделях обмена нами ранее был предложен оригинальный подход (см. [1]). Проблема экономического равновесия традиционно рассматривалась как проблема баланса спроса и предложения в пространстве товаров. В предложенном подходе анализ осуществляется в пространстве цен. В основе подхода лежит порождаемая моделью полиэдральная комплементарность [2], отражающая характер экономического равновесия как согласования предпочтений участников с их финансовыми балансами. Это принципиально отличается от подхода Б. С. Ивеса [3], который свел проблему равновесия в общей модели обмена (см. [4]) к задаче линейной комплементарности. Подход полиэдральной

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-010-00910 А) и при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1, проект № 0314-2019-0018.

комплементарности [5] позволяет выявить в моделях обмена определенное свойство монотонности и получить конечные алгоритмы не только для классической линейной модели обмена, но и для более сложных моделей (см. [6; 7]). Наиболее простыми являются алгоритмы для модели с фиксированными бюджетами, известной как модель Фишера. Для этой модели было известно сведение Гейла — Айзенберг (см. [8]) к задаче выпуклого программирования. Это сведение было использовано многими авторами для разработки алгоритмов отыскания равновесных цен. Обзор по этой теме можно найти в [9], где рассмотрен полиномиальный алгоритм решения проблемы. Однако на основе задачи Гейла — Айзенберг не были получены конечные алгоритмы решения проблемы. Подход полиэдральной комплементарности приводит к иному сведению модели Фишера и позволяет получать конечные алгоритмы. Это сведение было использовано в [10] и для разработки итеративного алгоритма. Преимущество подхода полиэдральной комплементарности состоит в естественной экономической и геометрической интерпретации его логической схемы, а также в особой простоте реализации полученных на его основе алгоритмов, использующих лишь аппарат классической транспортной задачи. В этом смысле результат является экстремальным. Едва ли он может быть улучшен.

В качестве основополагающего в [1] выступает свойство монотонности возникающих кусочно-постоянных отображений симплекса цен в себя, которое можно рассматривать как аналог свойства, присущего задачам линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений (класс P, см. [11]).

В настоящей статье мы не касаемся алгоритмической стороны вопроса, отсылая читателя к списку литературы в работах [6; 7]. Отметим еще результаты [12; 13]. Предметом настоящих изысканий является выявленное для модели Фишера свойство двойственности, состоящее в том, что проблема равновесия сводится к паре оптимизационных задач на симплексе цен, которые находятся в отношении двойственности подобно задачам линейного программирования. Эти задачи использовались для обоснования соответственно прямого и двойственного алгоритмов отыскания равновесия, аналогично обоснованию прямого и двойственного вариантов симплекс-метода в линейном программировании. Но при этом двойственная задача использовалась в неявной формулировке через понятие сопряженной функции. В данной работе получена явная формулировка двойственного варианта предложенного сведения, которая позволяет прояснить связь подхода полиэдральной комплементарности с результатом Гейла — Айзенберг [8], установленную в [14; 15]. Явные формулировки двойственных задач даны также для двух обобщений модели Фишера: для модели с дополнительными финансовыми ограничениями при закупках товаров и для модели, в которой наряду с потребителями присутствуют фирмы, производящие товары. Эти результаты объединяет общая схема получения в рамках подхода полиэдральной комплементарности явных формулировок двойственных задач. Показано, что этот подход позволяет свести к оптимизационной задаче и общую модель обмена (см. [4]), из чего следует единственность равновесия. В этом случае нет двойственности, присущей модели Фишера, но в двойственности находятся возникающие полиэдральные комплексы, и сохраняется свойство монотонности порождаемого ими отображения.

Фундаментальной основой предложенного подхода является задача о неподвижной точке для кусочно-постоянных многозначных отображений на симплексе в $\mathbb{R}^n$. В модели Фишера отображения оказались потенциальными, что дает возможность свести задачу о неподвижной точке к оптимизационным задачам и развить конечные алгоритмы, которые впоследствии были обобщены на более широкий класс отображений (см. [7; 16]).

1. Линейная модель обмена

Будем рассматривать линейную модель обмена в общепринятом описании (см. [4]). В модели имеется n товаров и m участников (потребителей товаров). Пусть $i \in I = \{1, \dots, m\}$ — индексация участников и $j \in J = \{1, \dots, n\}$ — индексация товаров. Заданы векторы $w^i \in \mathbb{R}^n_+$, характеризующие имеющиеся начальные запасы товаров у участников, и векторы $c^i \in \mathbb{R}^n_+$, отражающие предпочтения участников. При фиксированном векторе p цен на товары задача участника i состоит в выборе вектора закупок $x^i \in \mathbb{R}^n_+$, при котором достигает максимума его линейная функция предпочтения (c^i, x^i) при соблюдении *бюджетного ограничения.*

Таким образом, требуется максимизировать функцию

$$(c^i, x^i) \tag{1.1}$$

при условиях

$$(p, x^i) \leqslant (p, w^i), \tag{1.2}$$

$$x^i \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Для простоты будем считать, что суммарные начальные запасы каждого товара равны единице:

$$\sum_i w^i = \theta, \tag{1.4}$$

где $\theta = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
Равновесие модели задается *равновесным вектором цен* $\tilde{p}$ и множеством решений $\tilde{x}^i(\tilde{p})$ задач участников, для которых выполняется условие баланса товаров

$$\sum_{i \in I} \tilde{x}^i(\tilde{p}) = \sum_{i \in I} w^i.$$

Бюджетные ограничения однородны по p. Следовательно, можно считать вектор цен p принадлежащим единичному симплексу

$$\sigma = \Big\{ p \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{j \in J} p_j = 1 \Big\}.$$

Для простоты полагаем все векторы c^i положительными. При таком предположении равновесие всегда существует (см. [4]).

Специальный вариант модели возникает, когда у каждого участника в наличии все товары в одинаковых количествах: $w^i = \lambda_i \theta$. В этом случае $(p, w^i) = \lambda_i$ для любого вектора цен $p \in \sigma$. Из (1.4) следует $\sum\limits_i \lambda_i = 1$.

Это — модель с фиксированными бюджетами, широко известная как модель Фишера.

2. Сведение модели Фишера к оптимизационной задаче Гейла — Айзенберг

Е. Айзенберг и Д. Гейл [8] получили очень простое сведение модели Фишера к оптимизационной задаче. Эта задача имеет вид

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \ln \sum_{j \in J} c^i_j x^i_j \to \max \tag{2.1}$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x^i_j = 1, \quad j \in J, \tag{2.2}$$

$$x^i_j \geq 0, \quad (i, j) \in I \times J.$$

Здесь c^i_j, x^i_j — компоненты векторов c^i, x^i. Равновесные цены модели задаются множителями Лагранжа для уравнений (2.2).

3. Новый подход. Сведение к задаче полиэдральной комплементарности

В подходе полиэдральной комплементарности вводится новое понятие “структура”.

О п р е д е л е н и е. Множество $\mathcal{B} \subset I \times J$ называется *структурой*, если для каждого $i \in I$ существует $(i, j) \in \mathcal{B}$.

Планы участников, задаваемые векторами $\{x^i\}$, совместимы со структурой $\mathcal{B}$, если

$$x_j^i = 0 \quad \text{для} \quad (i, j) \notin \mathcal{B}.$$

Для каждой структуры $\mathcal{B}$ можно рассмотреть два множества векторов цен, которые именуются *зонами*:

1) *зона предпочтительности* $\Xi(\mathcal{B})$ — это множество векторов цен, при которых участники предпочитают связи, задаваемые структурой, игнорируя бюджетные ограничения и условия товарных балансов;

2) *зона сбалансированности* $\Omega(\mathcal{B})$ — это множество векторов цен, при которых выполняются бюджетные ограничения и баланс товаров с соблюдением предписаний, задаваемых структурой, но игнорируются предпочтения участников.

Из этих описаний следует, что вектор цен p является равновесным тогда и только тогда, когда $p \in \Omega(\mathcal{B}) \cap \Xi(\mathcal{B})$ для некоторой структуры $\mathcal{B}$, т. е. когда при данных ценах связи из $\mathcal{B}$ отвечают предпочтениям участников и при этих связях возможны как финансовые, так и товарные балансы.

Главная особенность линейной модели обмена состоит в том, что, как последует из дальнейших более детальных рассмотрений, множества $\Omega(\mathcal{B})$ и $\Xi(\mathcal{B})$ задаются линейными системами уравнений и неравенств, т. е. являются *многогранниками*. В результате сформулированный критерий приводит к задаче *полиэдральной комплементарности* (см. [2]).

В дальнейшем используются известные результаты и общепринятая терминология линейного программирования [17].

Для формального описания зон предпочтительности и сбалансированности вводится *параметрическая транспортная задача модели*, в которой параметрами являются цены на товары. Эта задача имеет вид

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c_j^i \to \max$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{j \in J} z_{ij} & = & (p, w^i), & i \in I, \\ \sum\limits_{i \in I} z_{ij} & = & p_j, & j \in J, \\ z_{ij} & \geq & 0, & (i, j) \in I \times J. \end{array}$$

Уравнения этой задачи представляют собой финансовые балансы для участников и товаров. Переменные z_{ij} вводятся равенствами $z_{ij} = p_j x_j^i$. Для заданного $p \in \sigma$ обозначим через $Z(p)$ множество допустимых решений задачи. Это — классическая транспортная задача (см. [17]). В предположении (1.4) она разрешима при любом векторе цен $p \in \sigma$. Будем исходить из того, что для этой задачи выполняется условие двойственной невырожденности и, следовательно, решение всегда единственное.

Рассматривается совокупность $\mathfrak{B}$ всех двойственно допустимых базисных множеств введенной задачи и всех их подмножеств, являющихся структурами.

Для $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ получаем следующие описания зон $\Omega(\mathcal{B})$ и $\Xi(\mathcal{B})$:

a) $\Omega(\mathcal{B}) = \{p \in \sigma \mid \exists z \in Z(p),\ z_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad (i, j) \notin \mathcal{B}\}$;

b) $\Xi(\mathcal{B}) = \left\{q \in \sigma^\circ \,\Big|\, \max\limits_k \dfrac{c_k^i}{q_k} = \dfrac{c_j^i}{q_j} \quad \text{для} \quad (i, j) \in \mathcal{B}\right\}$, где σ° — относительная внутренность симплекса σ.

Из приведенного описания вытекает, что множество $\Omega(\mathcal{B})$ задается как множество решений некоторой линейной системы уравнений и неравенств, т. е. является многогранником (по определению) на σ. Каждая грань этого многогранника также принадлежит рассматриваемой совокупности: если $\Omega(\mathcal{B}^1)$ — грань $\Omega(\mathcal{B})$, то $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^1 \in \mathfrak{B}$. Таким образом, многогранники $\Omega(\mathcal{B})$ при $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ образуют на σ *полиэдральный комплекс* (см. [18]), который обозначим ω. Следуя терминологии комбинаторной топологии, будем называть элементы полиэдрального комплекса *клетками.*

Можно показать, что если $\mathcal{B}$ является базисным множеством, то многогранник $\Omega(\mathcal{B})$ имеет на σ непустую внутренность $\Omega^\circ(\mathcal{B})$ и рассматриваемое множество $\mathcal{B}$ есть оптимальное базисное множество транспортной задачи при всех $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B})$. Из отмеченной единственности решения задачи следует, что клетки $\Omega(\mathcal{B})$ покрывают весь симплекс σ, не пересекаясь по относительным внутренностям.

Аналогично $\Xi(\mathcal{B})$ для $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ является многогранником на σ°. Это будет одноточечное множество, если $\mathcal{B}$ — базисное множество. Множество $\Xi(\mathcal{B})$ расширяется, когда $\mathcal{B}$ сужается. Следовательно, все множества $\Xi(\mathcal{B})$ при $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ непусты. Несложно убедиться, что многогранники $\Xi(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ образуют на σ° другой полиэдральный комплекс ξ, клетки которого покрывают все множество σ° и не пересекаются по относительным внутренностям.

Комплексы ξ и ω содержат одинаковое число клеток, и между клетками комплексов имеется взаимно-однозначное соответствие: $\Omega(\mathcal{B})$ и $\Xi(\mathcal{B})$ образуют пару отвечающих друг другу клеток. Кроме того,

$$\Omega(\mathcal{B}_1) \subset \Omega(\mathcal{B}_2) \implies \Xi(\mathcal{B}_1) \supset \Xi(\mathcal{B}_2).$$

Это по определению означает, что комплексы ω и ξ находятся в *отношении двойственности.* Таким образом, проблема равновесия в линейной модели обмена порождает новый тип задачи — задачу *полиэдральной комплементарности*: для двух полиэдральных комплексов в двойственности требуется найти пару отвечающих друг другу клеток, имеющих непустое пересечение. В такой формулировке эта задача была предложена в [2]. Это — естественное обобщение задач линейной комплементарности, когда (в невырожденном случае) комплексы формируются гранями двух симплексных конусов.

4. Новое сведение модели Фишера к задаче оптимизации

Введенную задачу полиэдральной комплементарности можно переформулировать в виде задачи о неподвижной точке кусочно-постоянного многозначного отображения G, сопоставляющего всем точкам $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B})$ в качестве образа $G(p)$ клетку $\Xi(\mathcal{B})$, что позволяет утверждения о равновесных векторах формулировать как утверждения о неподвижных точках отображения G, и наоборот. В случае модели Фишера в транспортной задаче модели (p, w^i) заменяется на λ_i, и отображение G становится *потенциальным* (см. [7]) в том смысле, что оно порождается субдифференциальным отображением некоторой функции. Для модели Фишера такой функцией является функция $f(p)$, задающая оптимальное значение введенной параметрической транспортной задачи модели. Это позволяет получить новое сведение модели Фишера, отличное от сведения Гейла — Айзенберг.

Поясним сказанное более детально. Для общей задачи линейного программирования известна связь оптимальных решений двойственной задачи с субдифференциалом функции, задающей оптимальное значение целевой функции прямой задачи (см. [17]). Ограничения двойственной задачи в рассматриваемом случае имеют вид

$$u_i + v_j \geq \ln c^i_j, \quad (i, j) \in I \times J. \tag{4.1}$$

Образуем из u_i, v_j векторы u, v соответственно. Пусть $V(p)$ — множество всех оптимальных векторов v при данном векторе цен p.

Для модели Фишера вектор p входит лишь в уравнения транспортной задачи, отвечающие переменным v_j. Вследствие этого имеем

$$\partial f(p) = V(p).$$

Используя описание клеток $\Xi(\mathcal{B})$ и $\Omega(\mathcal{B})$, несложно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма. *Для $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B})$ выполняется*

$$V(p) = \{v = \ln(tq) \mid q \in \Xi(\mathcal{B}),\ t \in \mathbb{R}^1\}.$$

В результате с учетом $\Xi(\mathcal{B}) = G(p)$ получаем

$$\partial f(p) = \{\ln(tq) \mid q \in G(p),\ t \in \mathbb{R}^1\}. \tag{4.2}$$

Мы говорим, что f — *потенциальная* функция отображения G (см. [7]).

Введем строго выпуклую функцию h, принимая $h(p) = (p, \ln p)$ для $p \in \sigma^\circ$ и доопределяя ее значением 0 на границе симплекса. Для $p \notin \sigma$ полагаем $h(p) = +\infty$. Для $p \in \sigma^\circ$ имеем

$$\partial h(p) = \{\ln(tp) \mid t \in \mathbb{R}^1\}. \tag{4.3}$$

Функция f является кусочно-линейной вогнутой. Значит, функция $\varphi(p) = h(p) - f(p)$ строго выпуклая и, таким образом, имеет на σ единственную точку минимума, которая ввиду свойств функции h принадлежит σ°.

Следствием (4.2), (4.3) является

Теорема 1 [5, Theorem 7]. *Вектор $\hat{p}$ является равновесным вектором цен модели Фишера тогда и только тогда, когда он задает точку минимума функции $\varphi(p)$.*

Следствие 1. *Модель Фишера имеет единственный вектор равновесных цен.*

5. Двойственный вариант сведения модели Фишера

Образы точек $p \in \sigma$ при отображении G покрывают σ°, не пересекаясь по относительным внутренностям. Следовательно, отображение G обратимо. Мы получим иное сведение модели Фишера к задаче оптимизации, если воспользуемся тем, что неподвижная точка обратного отображения G^{-1} будет таковой и для отображения G.

Введем функцию f^*, сопряженную к функции f, корректируя определение из [19] с учетом вогнутости функции f. Рассмотрим для $q \in \sigma^\circ$ функцию

$$f^*(\ln q) = \inf_p \{(\ln q, p) - f(p)\}.$$

Исходя из того что $f(p) = -\infty$ при $p \notin \sigma$, здесь можно ограничиться лишь $p \in \sigma$. Отметим, что эта функция была введена нами в [1] и использовалась для обоснования алгоритма отыскания равновесия. Приведем новое сведение для модели Фишера.

Теорема 2 [5, Theorem 8]. *Равновесный вектор цен модели Фишера задается точкой максимума на σ° функции $\psi(q) = f^*(\ln q)$.*

Следствие 2. *Ввиду единственности равновесного вектора цен точка минимума функции $\varphi(p)$ является точкой максимума функции $\psi(q)$.*

Утверждение 1 [5, Proposition 2]. *Для функций $\varphi(p)$ и $\psi(q)$ выполняется неравенство*

$$\varphi(p) \geq \psi(q) \quad \forall\, p,\, q \in \sigma^\circ.$$

Это неравенство становится равенством только при $p = q$.

Это утверждение приводится в [5] без доказательства. В [16] оно формулируется и доказывается как утверждение для класса регулярных отображений на симплексе. Но в доказательстве используется лишь факт потенциальности таких отображений, и поэтому доказательство без изменений переносится на модель Фишера. Мы получаем полную аналогию с двойственностью для задач линейного программирования. Доказанные теоремы дают возможность разработать очень простые алгоритмы для отыскания равновесных цен (см. [6]).

Представляет интерес явная формула для функции $\psi(q)$, позволяющая прояснить связь подхода полиэдральной комплементарности с результатом Гейла — Айзенберг (см. [8]).

Утверждение 2 [5, Proposition 1]. *Для функции $\psi(q)$ верна следующая формула*

$$\psi(q) = -\sum_{i\in I} \lambda_i \max_{j\in J} \ln \frac{c^i_j}{q_j}. \tag{5.1}$$

Эта формула приведена в [5] без доказательства.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную точку $\hat{q} \in \sigma^\circ$. Имеем

$$f^*(\ln \hat{q}) = \inf_{p\in\sigma} \{(p, \ln \hat{q}) - f(p)\}.$$

Вектор $\hat{v} = \ln \hat{q}$ и соответствующий вектор $\hat{u}$ с компонентами $\hat{u}_i = \max\limits_{j\in J}\{\ln c^i_j - \hat{v}_j\}$ удовлетворяют условиям двойственной задачи (4.1). Следовательно, верно неравенство

$$f(p) \le \sum_{i\in I} \lambda_i\, \hat{u}_i + \sum_{j\in J} p_j\, \hat{v}_j, \quad p \in \sigma,$$

что эквивалентно

$$(p, \ln \hat{q}) - f(p) \ge -\sum_{i\in I} \lambda_i\, \hat{u}_i, \quad p \in \sigma. \tag{5.2}$$

Мы имеем $\hat{u}_i = \max\limits_j\{\ln c^i_j - \ln \hat{q}_j\}$. Выберем для каждого i некоторый j_i, такой что $\hat{u}_i = \ln c^i_{j_i} - \ln \hat{q}_{j_i}$. Для всех $i \in I$ положим $\hat{z}_{i,j_i} = \lambda_i$ и $\hat{z}_{ij} = 0$ при $j \ne j_i$. В результате получим допустимое решение транспортной задачи $z = z(\dot{p})$ при $p = \dot{p}$ с компонентами $\dot{p}_j = \sum\limits_i \hat{z}_{ij}$. Более того, это решение $z = z(\dot{p})$ является оптимальным, так как для $z(\dot{p})$ и рассматриваемого допустимого решения двойственной задачи выполняются условия дополняющей нежесткости ($\hat{z}_{ij} > 0 \Rightarrow \hat{u}_i + \hat{v} = \ln c^i_j$). Следовательно, $\hat{v}$, $\hat{u}$ образуют оптимальное решение двойственной задачи. Таким образом, неравенство (5.2) для $p = \dot{p}$ становится равенством:

$$(\dot{p}, \ln \hat{q}) - f(\dot{p}) = -\sum_{i\in I} \lambda_i \hat{u}_i.$$

Это означает, что

$$\inf_{p\in\sigma}\{(p, \ln \hat{q}) - f(p)\} = -\sum_{i\in I} \lambda_i \hat{u}_i.$$

С учетом $\hat{u}_i = \max\limits_{j\in J} \ln \dfrac{c^i_j}{\hat{q}_j}$ заключаем, что для произвольного $q = \hat{q}$ формула (5.1) верна.

Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е 1. Формулу (5.1) можно записать иначе:

$$\psi(q) = -\sum_{i\in I} \max_{\zeta^i \in D_i} g_i(q, \zeta^i); \tag{5.3}$$

здесь $g_i(q,\zeta^i) = \sum\limits_{j\in J} \zeta^i_j \ln \dfrac{c^i_j}{q_j}$, а множество D_i задается условиями

$$\sum_{j\in J} \zeta^i_j = \lambda_i, \tag{5.4}$$

$$\zeta^i_j \geq 0, \quad j \in J. \tag{5.5}$$

В таком виде в формуле для $\psi(q)$ проявляется связь с задачами участников и она проще обобщается на другие модели.

Задаче участника (1.1)–(1.3) при $p > 0$ заменой переменных $x^i_j = \dfrac{\zeta^i_j}{p_j}$ также можно придать вид задачи максимизации на множестве D_i функции $\dot{g}_i(p,\zeta^i) = \sum\limits_{j\in J} \zeta^i_j \dfrac{c^i_j}{p_j}$. Таким образом, функцию $g_i(q,\zeta^i)$ можно рассматривать как "модификацию" функции $\dot{g}_i(p,\zeta^i)$.

6. Связь со сведением Гейла — Айзенберг

Связь между подходом полэдральной комплементарности и задачей Гейла — Айзенберг (см. [8]) проясняет анализ соответствующей двойственной задачи. Эта связь была выявлена в работах [14; 15].

Обозначим через $\gamma(x)$ целевую функцию (2.1) в задаче Гейла — Айзенберг. Чтобы сформулировать двойственную задачу, просуммируем условия (2.2), умноженные на некоторые множители $q_j \geq 0$, $\sum\limits_j q_j = 1$, и рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\gamma(x) \to \max_x$$

при условиях

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} q_i x^i_j = 1,$$

$$x^i_j \geq 0, \quad (i,j) \in I \times J.$$

Пусть $\hat{x} = \hat{x}(q)$ является решением этой задачи. Величина $\gamma(\hat{x}(q))$ дает оценку сверху для оптимального значения исходной задачи. Двойственная задача состоит в том, чтобы, варьируя q, получить минимальную из оценок сверху. Запишем условия оптимальности для вспомогательной задачи

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\lambda_i}{(c^i,\hat{x}^i)}\, c^i_j - q_j & \leq & 0, \quad (i,j) \in I \times J, \\ \dfrac{\lambda_i}{(c^i,\hat{x}^i)}\, c^i_j - q_j & = & 0, \quad \text{если} \quad \hat{x}^i_j > 0. \end{array}$$

Отсюда следует $q_j > 0$ и $(c^i,\hat{x}^i) = \lambda_i \max\limits_j \dfrac{c^i_j}{q_j}$. Подставляя это значение для $(c^i,\hat{x}^i)$ в функцию $\gamma(x)$, получаем двойственную задачу

$$\eta(q) = \gamma(\hat{x}(q)) = \sum_{i\in I} \lambda_i \ln\Big(\lambda_i \max_j \frac{c^i_j}{q_j}\Big) \to \min$$

или

$$\eta(q) = \sum_{i\in I} \lambda_i \ln \lambda_i + \sum_{i\in I} \lambda_i \ln \max_j \frac{c^i_j}{q_j} \to \min\,.$$

Функции $\eta(q)$ можно придать иной вид, если учесть, что функция ln строго возрастающая, и потому

$$\ln \max_j \frac{c_j^i}{q_j} = \max_j \ln \frac{c_j^i}{q_j}.$$

Это дает

$$\eta(q) = \sum_{i \in I} \lambda_i \, \ln \lambda_i + \sum_{i \in I} \lambda_i \, \max_j \, \ln \frac{c_j^i}{q_j}.$$

Легко видеть, что в итоге имеем

$$\eta(q) = \sum_{i \in I} \lambda_i \, \ln \lambda_i - \psi(q),$$

где $\psi(q)$ — это функция, введенная ранее при рассмотрении подхода полиэдральной комплементарности и задаваемая формулой (5.1).

7. Модель Фишера с дополнительными ограничениями на затраты при закупках

В последнее время возник интерес к моделям, в которых дополнительно к бюджетному ограничению задаются верхние границы для затрат на закупки отдельных товаров:

$p_j x_j^i \le \beta_j^i$ — spending constraint (см. [20]).

Модель такого типа с фиксированными бюджетами (т. е. вариант модели Фишера) была рассмотрена нами значительно раньше (см. [6]). Было показано, что для подобных моделей предложенный подход полиэдральной комплементарности также приводит к паре двойственных задач, как это имеет место для обычной модели Фишера. Остановимся на этом подробнее.

Для данного случая в задаче участника (1.1)–(1.3) появятся указанные дополнительные ограничения, что в параметрической транспортной задаче модели приведет к ограничениям сверху на переменные:

$$z_{ij} \le \beta_j^i. \tag{7.1}$$

Теперь уже нельзя гарантировать разрешимость задачи при всех $p \in \sigma$, но, как несложно показать, в предположении

$$\sum_{j \in J} \beta_j^i \ge \lambda_i, \quad i \in I, \tag{7.2}$$

множество разрешимости S будет непустым, и, как и прежде, возникает кусочно-линейная вогнутая функция $f(p)$, для которой эффективная область $\operatorname{dom} f$ уже не обязательно совпадает со всем симплексом σ. Для $p \notin S$ принимаем $f(p) = -\infty$. В результате снова получаем функции $\varphi(p) = h(p) - f(p)$ и $\psi(q) = f^*(\ln q)$. Добавленные неравенства не меняют характер вхождения вектора параметров p в ограничения транспортной задачи. Поэтому сохраняется формула для субдифференциала $\partial f(p) = V(p)$, где V — множество оптимальных векторов v в задаче, двойственной к транспортной задаче модели при данном p. В результате остаются справедливыми теоремы 1 и 2, следствие 2, утверждение 1. Таким образом, как и в обычной модели Фишера, отыскание равновесного вектора цен сводится к задачам минимизации функции $\varphi(p)$ или максимизации функции $\psi(q)$.

Получим для этой модели явное представление функции $\psi(q)$.

Утверждение 3. *В модели Фишера с дополнительными ограничениями на затраты при закупках для функции $\psi(q)$ верна следующая формула*

$$\psi(q) = -\sum_{i \in I} \max_{\zeta^i \in \tilde{D}_i} g_i(q, \zeta^i), \tag{7.3}$$

где функция $g_i(q,\zeta^i)$ *та же, что в* (5.3), *множество* $\tilde D_i$ *задается условиями* (5.4) *и*

$$0 \le \zeta^i_j \le \beta^i_j. \tag{7.4}$$

З а м е ч а н и е 2. Таким образом, в формуле (5.3) введено множество $\tilde D_i$ вместо D_i, описание которого отличается от описания D_i заменой условия (5.5) на (7.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем следовать логике рассмотрений утверждения 2 для обычной модели, внося необходимые изменения. Задача, двойственная к транспортной задаче модели, в данном случае будет иметь следующий вид:

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\, u_i + \sum_{j\in J} p_j\, v_j + \sum_{(ij)\in I\times J}\beta^i_j\, w_{ij} \to \min, \tag{7.5}$$

$$u_i + v_j + w_{ij} \ge \ln c^i_j, \quad (i,j)\in I\times J, \tag{7.6}$$

$$w_{ij} \ge 0, \quad (i,j)\in I\times J, \tag{7.7}$$

где w_{ij} — двойственные переменные, отвечающие неравенствам (7.1).

Зафиксируем переменные v_j, полагая $\hat v_j = \ln q_j$ при некотором $q\in\sigma^\circ$. При любом выборе других двойственных переменных с соблюдением условий (7.6), (7.7) для любого p из множества разрешимости S будет выполняться

$$f(p) \le \sum_{i\in I}\lambda_i\, u_i + \sum_{j\in J} p_j\, \ln q_j + \sum_{(ij)\in I\times J}\beta^i_j\, w_{ij},$$

что эквивалентно

$$(p,\ln q) - f(p) \ge -\sum_{i\in I}\lambda_i\, u_i - \sum_{(ij)\in I\times J}\beta^i_j\, w_{ij}, \quad p\in S. \tag{7.8}$$

Распорядимся выбором точки p и значений для u_i, w_{ij}, чтобы получить здесь равенство.

После фиксации $v_j = \ln q_j$ двойственная задача (7.5)–(7.7) переходит в задачу А.

З а д а ч а А:

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\, u_i + \sum_{(ij)\in I\times J}\beta^i_j\, w_{ij} \to \min$$

при условиях неотрицательности переменных w_{ij} и

$$u_i + w_{ij} \ge \ln\frac{c^i_j}{q_j}, \quad (i,j)\in I\times J.$$

При условии (7.2) эта задача разрешима, что вытекает из рассмотрения системы условий двойственной задачи B.

З а д а ч а B:

$$\sum_{(ij)\in I\times J} z_{ij}\, \ln\frac{c^i_j}{q_j} \to \max,$$

$$\sum_{j\in J} z_{ij} = \lambda_i, \quad i\in I,$$

$$0 \le z_{ij} \le \beta^i_j, \quad (i,j)\in I\times J.$$

Из условий задачи следует, что множество ее допустимых решений ограничено, а при условии (7.2) очевидным образом и непусто. Значит, задача А и двойственная к ней задача B разрешимы. Пусть $\{\hat u_i, \hat w_{ij}\}$ и $\{\hat z_{ij}\}$ задают соответствующие решения. Принимая теперь $\hat p = \sum_i \hat z_{ij}$, получаем, что $\hat z_{ij}$ образуют допустимое решение транспортной задачи модели при $p = \hat p$, а

$\hat{u}_i,\ \hat{v}_j, \hat{w}_{ij}$ — допустимое решение двойственной к ней задачи. Более того, это — оптимальные решения, так как для них выполняются условия дополняющей нежесткости.

В результате (7.8) дает формулу для $\psi(q)$:

$$\psi(q) = -\sum_{i\in I} \lambda_i\, \hat{u}_i - \sum_{(ij)\in I\times J} \beta^i_j\, \hat{w}_{ij}.$$

В правой части стоит с минусом оптимальное значение задачи A, которое можно заменить оптимальным значением двойственной к ней задачи B. Получим

$$\psi(q) = -\sum_{ij\in I\times J} \hat{z}_{ij}\, \ln\frac{c^i_j}{q_j}.$$

Остается заметить, что задача B распадается на независимые подзадачи B_i следующего вида.

З а д а ч а B_i.

$$\sum_{j\in J} z_{ij} \ln\frac{c^i_j}{q_j} \to \max,$$

$$\sum_{j\in J} z_{ij} = \lambda_i,$$

$$0 \le z_{ij} \le \beta^i_j, \quad j\in J.$$

В итоге максимум суммы в целевой функции задачи B можно заменить суммой максимумов целевых функций задач B_i. В свою очередь, задача B_i с точностью до обозначения неизвестных совпадает с задачей максимизации функции g_i на множестве $\tilde{D}_i$, фигурирующих в (7.3). Это завершает доказательство требуемой формулы (7.3) для функции $\psi(q)$.

Утверждение доказано.

8. Обобщенная модель Фишера

Двойственность, характеризующая подход полиэдральной комплементарности, прослеживается и при изучении более сложных моделей, в которых наряду с потребителями присутствуют и фирмы, поставляющие на рынок дополнительные объемы товаров (см. [6; 7]). Опишем модель такого типа в предположении фиксированных бюджетов потребителей и доходов фирм.

Рассматривается модель, в которой n продуктов, m участников-потребителей и l участников-фирм. Пусть $J = \{1,\dots,n\},\ I = \{1,\dots,m\}$ и $K = \{m+1,\dots,m+l\}$ — множества номеров товаров, потребителей и фирм соответственно. Отметим, что нумерация для потребителей и фирм общая. Таким образом, $S = I\cup K$ представляет собой множество номеров всех участников модели. Потребитель $i\in I$ описывается, как и прежде, вектором $c^i\in\mathbb{R}^n_+$ и запасом денег λ_i.

Для фирмы $k\in K$ установлен вмененный доход: она должна поставить на рынок товаров на сумму не менее λ_k. План выпуска товаров задается вектором $x^k = (x^k_1,\dots,x^k_n)$. Задан положительный вектор $c^k = (c^k_1,\dots,c^k_n)$, компоненты которого определяют сравнительную шкалу неудовлетворенности от производства различных товаров (например, стоимость производства). Фирма стремится минимизировать значение линейной функции (c^k, x^k).

Таким образом, при заданном векторе цен p фирма делает свой выбор в соответствии с решением следующий оптимизационной задачи: $(c^k,x^k)\to\min$ при условиях

$$(p, x^k) \ge \lambda_k, \tag{8.1}$$

$$x^k \ge 0.$$

Предполагается, что на рынке уже имеется ровно одна единица каждого товара. *Состояние равновесия* задается вектором цен $\tilde{p}$ и совокупностью векторов $\tilde{x}^i$, $i \in I$ и $\tilde{x}^k$, $k \in K$, являющихся решениями соответствующих задач участников модели при $p = \tilde{p}$ и удовлетворяющих условиям баланса товаров, которые в данном случае имеют вид

$$\sum_{i \in I} \tilde{x}^i_j = \sum_{k \in K} \tilde{x}^k_j + 1, \quad j \in J. \tag{8.2}$$

Ясно, что бюджетные ограничения потребителей и ограничения на вмененные доходы фирм (8.1) выполняются как равенства на оптимальных решениях задач участников. Принимая, как и ранее, что $p \in \sigma$, из (8.2) получаем

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{k \in K} \lambda_k + 1.$$

Ранее мы показали, что для такой модели основные результаты подхода полиэдральной комплементарности остаются в силе и развитые для модели Фишера конечные алгоритмы требуют незначительных модификаций при переходе к приведенному обобщенному варианту модели.

Остановимся кратко на некоторых особенностях.

Параметрическая задача модели в этом случае становится сетевой и принимает следующий вид:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c^i_j - \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} z_{kj} \ln c^k_j \ \to \ \max,$$

$$\sum_{j \in J} z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in I,$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} - \sum_{k \in K} z_{kj} = p_j, \quad j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} z_{kj} = \lambda_k, \quad k \in K,$$

$$z_{ij} \geq 0, \quad z_{kj} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K.$$

Несложно показать, что множество Ω тех векторов p, при которых эта задача разрешима, описывается системой условий:

$$\sum_{j \in J} p_j = 1,$$

$$\sum_{j \in Q} p_j \geq -\sum_{k \in K} \lambda_k, \quad Q \subsetneq J.$$

Как легко видеть, $\Omega \supseteq \sigma$ и $\Omega = \sigma$ только в случае $K = \varnothing$, т. е. когда модель является обычной моделью Фишера. В этом — особенность схемы полиэдральной комплементарности для данного случая: клетки комплекса ω, покрывающие множество Ω, могут содержать векторы p с отрицательными компонентами.

На Ω определена вогнутая кусочно-линейная функция $\tilde{f}(p)$, задающая оптимальное значение транспортной задачи. Полагая $\tilde{f}(p) = -\infty$ для $p \notin \Omega$, имеем вогнутую функцию в $\mathbb{R}^n$.

Аналогично модели Фишера для $p, q \in \sigma^\circ$ вводятся функции $\tilde{\varphi}(p) = (p, \ln p) - \tilde{f}(p)$ и $\tilde{\psi}(q) = \tilde{f}^*(\ln q)$. Для этих функций справедливы аналоги утверждений для обычной модели Фишера: теорема 1, теорема 2, следствие 2 и утверждение 1.

Получим явную формулу для функции $\tilde{\psi}(q)$.

Утверждение 4. *Для функции $\tilde{\psi}(q)$ верна следующая формула*

$$\tilde{\psi}(q) = -\sum_{i \in I} \lambda_i \max_{j \in J} \ln \frac{c^i_j}{q_j} + \sum_{k \in K} \lambda_k \min_{j \in J} \ln \frac{c^k_j}{q_j}. \tag{8.3}$$

Это — аналог утверждения 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема проверки указанного утверждения аналогична схеме, использованной в доказательстве формулы (7.3). Остановимся на деталях реализации этой схемы.

Двойственная задача к транспортной задаче модели в данном случае имеет вид

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\, u_i + \sum_{j\in J} p_j\, v_j + \sum_{k\in K}\lambda_k\, u_k \to \min, \tag{8.4}$$

$$u_i + v_j \ge \ln c^i_j, \quad (i,j)\in I\times J, \tag{8.5}$$

$$u_k - v_j \ge -\ln c^k_j, \quad (k,j)\in K\times J. \tag{8.6}$$

Возьмем произвольно $q\in\sigma^\circ$ и зафиксируем $v_j = \hat{\hat{v}}_j = \ln q_j$. При любом $p\in\Omega$ и любых $u_i,\ u_k$ из (8.5), (8.6) получаем неравенство

$$\tilde f(p) \le \sum_{i\in I}\lambda_i\, u_i + \sum_{j\in J} p_j\,\ln q_j + \sum_{k\in K}\lambda_k\, u_k.$$

Отсюда

$$\sum_{j\in J} p_j\,\ln q_j - \tilde f(p) \ge -\sum_{i\in I}\lambda_i\, u_i - \sum_{k\in K}\lambda_k\, u_k. \tag{8.7}$$

Теперь нужно показать, что можно выбрать $u_i,\ u_k$ с соблюдением (8.5), (8.6) и $p\in\Omega$ так, чтобы это неравенство обращалось в равенство. Значение правой части при таких $u_i,\ u_k$ будет равно минимуму левой части по $p\in\Omega$, что по определению задает значение $\tilde f^*(\ln q)$, т. е. $\tilde\psi(q)$.

При $v=\ln q$ задача (8.4)–(8.6) переходит в следующую задачу.

З а д а ч а $\bar{\mathrm{A}}$:

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\, u_i + \sum_{k\in K}\lambda_k\, u_k \to \min$$

при условиях

$$u_i \ge \ln\frac{c^i_j}{q_j}, \quad (i,j)\in I\times J, \quad u_k \ge -\ln\frac{c^k_j}{q_j}, \quad (k,j)\in K\times J.$$

Решением этой задачи очевидным образом будут

$$\hat u_i = \max_j \ln\frac{c^i_j}{q_j}, \quad i\in I, \quad \hat u_k = \max_j\Big\{-\ln\frac{c^k_j}{q_j}\Big\}, \quad k\in K.$$

Двойственная к задаче $\bar{\mathrm{A}}$ задача имеет следующий вид.

З а д а ч а $\bar{\mathrm{B}}$:

$$\sum_{(ij)\in I\times J} z_{ij}\,\ln\frac{c^i_j}{q_j} + \sum_{(kj)\in K\times J} z_{kj}\Big(-\ln\frac{c^k_j}{q_j}\Big) \to \max,$$

$$\sum_{j\in J} z_{ij} = \lambda_i, \quad i\in I,$$

$$\sum_{j\in J} z_{kj} = \lambda_k, \quad k\in K,$$

$$z_{ij}\ge 0, \quad z_{kj}\ge 0, \quad i\in I, \quad j\in J, \quad k\in K.$$

Пусть $\{\hat z_{ij}\},\ \{\hat z_{kj}\}$ задают оптимальное решение этой задачи. Заметим, что оно связано с решением $\{\hat u_i\},\ \{\hat u_k\}$ условиями дополняющей нежесткости. Положим

$$\hat p_j = \sum_{i\in I}\hat z_{ij} - \sum_{k\in K}\hat z_{kj}, \quad j\in J.$$

Отметим, что среди компонент $\hat{p}_j$ могут быть и отрицательные. Справедливо равенство

$$\sum_{j\in J}\hat{p}_j = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\hat{z}_{ij} - \sum_{k\in K}\sum_{j\in J}\hat{z}_{kj} = \sum_{i\in I}\lambda_i - \sum_{k\in K}\lambda_k = 1.$$

Как легко видеть, $\{\hat{z}_{ij}\}$, $\{\hat{z}_{kj}\}$ определяют допустимое решение транспортной задачи модели при $p=\hat{p}$. Более того, это — оптимальное решение, так как оно связано условиями дополняющей нежесткости с допустимым решением двойственной задачи, задаваемым $\{\hat{u}_i\}$, $\{\hat{u}_k\}$ и $\hat{v}=\ln q$. Таким образом, для $\hat{p}$ и $\{\hat{u}_i\}$, $\{\hat{u}_k\}$ неравенство (8.7) обращается в равенство. Из этого уже следует справедливость представления (8.3). Нужно лишь заметить, что

$$-\sum_{k\in K}\lambda_k\,\hat{u}_k = -\sum_{k\in K}\lambda_k\,\max_{j\in J}\Big\{-\ln\frac{c_j^k}{q_j}\Big\} = \sum_{k\in K}\lambda_k\min_{j\in J}\ln\frac{c_j^k}{q_j}.$$

Утверждение 4 доказано.

З а м е ч а н и е 2. Можно придать формуле (8.3) иной вид, используя для участников — функции $g_i(q,\zeta^i)$ и для фирм — функции $g_k(q,\zeta^k)$ по аналогии с преобразованиями формулы (5.1), о чем шла речь в замечании 1.

9. Сведение проблемы равновесия для общей линейной модели обмена

Общая линейная модель обмена, в которой бюджеты участников не фиксированы, более сложная, чем модель Фишера. В этом случае двойственность проявляется лишь в наличии двух двойственных друг другу полиэдральных комплексов и свойстве монотонности возникающего кусочно-постоянного отображения, которое уже не являются потенциальным и принадлежат более широкому классу *квазирегулярных* отображений (Шмырев В.И. Полиэдральная комплементарность на симплексе. Метод встречных путей для убывающих квазирегулярных отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 273–286). Тем не менее подход полиэдральной комплементарности позволяет и в этом случае получить сведение к оптимизационной задаче (см. теорему 6 из [1]).

Теорема 3. *Точка минимума функции*

$$\eta(p) = (p,\ln p) - f(p) + \sum_{i\in I}(p,w^i)\,\max_{j\in J}\ln\frac{c_j^i}{p_j}$$

задает равновесный вектор цен в модели с переменными бюджетами. Оптимальное значение равно нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p — произвольная точка в σ°. Рассмотрим $v=\ln p$ и соответствующий вектор $u=u(v)$ с компонентами $u_i=\max_{j\in J}\{\ln c_j^i - v_j\}$. Мы получаем допустимые двойственные переменные v_j, u_i. Для них и оптимального значения транспортной задачи $f(p)$ выполняется неравенство

$$f(p)\le\sum_{i\in I}(p,w^i)\,u_i + \sum_{j\in J}p_jv_j.$$

Подставляя в него значения переменных u_i и v_j, имеем

$$(p,\ln p) - f(p) + \sum_{i\in I}(p,w^i)\,\max_{j\in J}\ln\frac{c_j^i}{p_j}\ge 0. \tag{9.1}$$

Таким образом, $\eta(p)\ge 0$ для всех $p\in\sigma^\circ$. Но для равновесного вектора $p=\hat{p}$ значения двойственных переменных $\hat{v}_j=\ln\hat{p}_j$ и $\hat{u}_i=\max_j\{\ln c_j^i-\ln\hat{p}_l\}$ являются оптимальными. Поэтому, неравенство (9.1) выполняется как равенство, и мы получаем $\eta(\hat{p}) = 0$. Ясно, что $\hat{p}$ — точка минимума функции η.

Рассмотрим обратное утверждение. Пусть $\eta(\hat{p}) = 0$. Это означает, что неравенство (9.1) выполняется как равенство для $p = \hat{p}$. Поэтому, $\hat{v} = \ln \hat{p}$ и соответствующий $\hat{u} = u(\hat{v})$ образуют оптимальное решение двойственной задачи. Точка $\hat{p}$ принадлежит относительной внутренности одной из клеток комплекса ω: $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B})$. Используя лемму, получаем $\hat{v} = \ln q,\ q \in \Xi(\mathcal{B})$. Но $\hat{v} = \ln \hat{p}$. Следовательно, $p \in \Xi(\mathcal{B})$. Таким образом, $\hat{p} \in \Omega(\mathcal{B}) \cap \Xi(\mathcal{B})$, т. е. $\hat{p}$ — равновесный вектор цен.

Теорема доказана.

Полученный результат имеет теоретическое значение. Он характеризует связанную с моделью задачу полиэдральной комплементарности: возникающее кусочно-постоянное многозначное отображение является убывающим (см. [16]). К настоящему моменту нет алгоритмов, которые бы использовали эту оптимизационную задачу.

В случае модели Фишера $\eta(p) = \varphi(p) - \psi(p)$. Это — выпуклая функция, но ее минимизировать более сложно, чем минимизировать функцию $\varphi(p)$ или максимизировать функцию $\psi(p)$ разработанными специальными алгоритмами (см. [6]).

Заключение

Представлено дальнейшее развитие не имеющего аналогов подхода полиэдральной комплементарности к проблеме равновесия в линейной модели обмена и ее вариациях. Подход позволил разработать конечные алгоритмы отыскания равновесных цен. Для модели обмена с фиксированными бюджетами (модель Фишера) возникающая задача о неподвижной точке сводится к паре оптимизационных задач на симплексе цен. Эти задачи находятся в отношении двойственности аналогично двойственным задачам линейного программирования. В работе предложены явные формулировки двойственных оптимизационных задач для модели Фишера и двух ее обощений: модель с ограничениями на затраты при закупках (spending constraints) и модель с вмененными доходами фирм. Для модели Фишера это позволяет прояснить связь подхода полиэдральной комплементарности с известной редукцией Гейла — Айзенберг. Сведение к оптимизационной задаче получено также для модели обмена с переменными бюджетами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмырев В.И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 5. С. 1062–1066.
2. **Шмырев В. И.** Задача полиэдральной комплементарности. Оптимизация // Сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1988. Вып. 44(61). С. 82–95.
3. **Eaves B.C.** A finite algorithm for linear exchange model // J. Math. Econom. 1976. Vol 3, no. 2. P. 197–203. doi: 10.1016/0304-4068(76)90028-8 .
4. **Gale D.** The linear exchange model // J. Math. Econom. 1976. Vol 3, no. 2. P. 205–209. doi: 10.1016/0304-4068(76)90029-X .
5. **Shmyrev Vadim I.** Polyhedral complementarity approach to equilibrium problem in linear exchange models // Optimization Algorithms. Examples / ed. Jan Valdman. London: IntechOpen, 2018. P. 27–46. doi: 10.5772/intechopen.77206 .
6. **Шмырев В. И.** Алгоритмы полиэдральной комплементарности для отыскания равновесия в линейных моделях конкурентной экономики // Дискрет. анализ и исследование операций. 2014. Vol. 21, no. 2. P. 84–101.
7. **Шмырев В. И.** Полиэдральная комплементарность на симплексе. Потенциальность регулярных отображений // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21., № 1(73). С. 118–128. doi: 10.17377/SIBJIM.2018.21.111 .
8. **Eisenberg E., Gale D.** Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method // Annals Math. Stat. 1959. Vol. 30, no. 1. P. 165–168. doi: 10.1214/aoms/1177706369 .

9. **Devanur N.R., Papadimitriou C.H., Saberi A., Vazirani V.V.** Market equilibrium via a primal-dual algorithm for a convex program // JACM. 2008. Vol. 55, no. 5, art.-no. 22. 18 p. doi: 10.1145/1411509.1411512 .
10. **Birnbaum B., Devanur N.R., Xiao L.** Distributed algorithms via gradient descent for Fisher markets // Proc. 12th ACM Conf. on Electronic Commerce. N Y: ACM, 2011. P. 127–136. doi: 10.1145/1993574.1993594 .
11. **Lemke C. E.** Bimatrix equilibrium points and mathematical programming // Managment Sience. 1965. Vol. 11, no. 7. P. 681–689. doi: 10.1287/mnsc.11.7.681 .
12. **Adsul B., Babu C. S., Gang J., Mehta R., Sohoni M.** A simplex-like algorithm for Fisher markets // Algorithmic Game Theory (SAGT 2010) / eds. S. Kontogiannis, E. Koutsoupias, P.G. Spirakis. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. P. 18–29. (Lecture Notes in Computer Science; vol 6386.) doi: 10.1007/978-3-642-16170-4_3 .
13. **Garg J., Mehta R., Sohoni M., Vishnoi N. K.** Towards polynomial simplex-like algorithms for market equilibria // Proc. 24th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia: SIAM, 2013. P. 1226–1242. doi: 10.1137/1.9781611973105.89 .
14. **Devanur N.R., Jain K., Mai T., Vazirani V.V., Yazdanbod S.** New convex programs for Fisher's market model and its generalizations [e-resource]. 2016. 23 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1603.01257.pdf .
15. **Cole Richard, Devanur Nikhil, Gkatzelis Vasilis, Jain Kamal, Mai Tung, Vazirani Vijay V., Yazdanbod Sadra**. Convex program duality, Fisher markets, and Nash social welfare // Proc. 18th ACM Conf. on Economics and Computation / Massachusets Institute of Technology. 2017. P. 459–460. doi: 10.1145/3033274.3085109 .
16. **Shmyrev Vadim I.** Polyhedral complementarity and fixed points problem of decreasing regular mappings on simplex // Proc. VIII Inter. Conf. on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2017) / eds. Yu. G. Evtushenko, M. Yu. Khachay, O. V. Khamisov, Yu. A. Kochetov, V. U. Malkova, M. A. Posypkin. Petrovac, 2017. Vol. 1987. P. 511–516.
17. **Шмырев В. И.** Введение в математическое программирование. Москва: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2002. 192 с.
18. **Понтрягин Л. С.** Основы комбинаторной топологии. Москва: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит., 1986. 120 с.
19. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 469 с.
20. **Vazirani V. V.** Spending constraint utilities, with applications to the adwords market // Math. Oper. Res. 2010. Vol. 35, no. 2.

Поступила 18.10.2019
После доработки 12.04.2020
Принята к публикации 27.07.2020

Шмырев Вадим Иванович
д-р физ.-мат. наук, вед. научный сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: shvi@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Shmyrev V.I. On an approach to the determination of equilibrium in elementary exchange models. *Sov. Math. Dokl.*, 1983, vol. 27, no. 1, pp. 230–233.
2. Shmyrev V.I. The problem of polyhedral complementarity. *Optimizatsiya*, 1988, vol. 44(61), pp. 82–95 (in Russian).
3. Eaves B.C. A finite algorithm for the linear exchange model. *Journal of Mathematical Economics*, 1976, vol. 3, no. 2, pp. 197–203. doi: 10.1016/0304-4068(76)90028-8 .
4. Gale D. The linear exchange model. *J. Math. Econom.*, 1976, vol. 3, no. 2, pp. 205–209. doi: 10.1016/0304-4068(76)90029-X .
5. Shmyrev V.I. Polyhedral complementarity approach to equilibrium problem in linear exchange models. In: *Optimization Algorithms: Examples*, Jan Valdman (ed), London, United Kingdom: IntechOpen, 2018, pp. 27–46. doi: 10.5772/intechopen.77206 .

6. Shmyrev V.I. Polyhedral complementarity algorithms for finding equilibrium in linear models of competitive economics. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 84–101 (in Russian).
7. Shmyrev V.I. Polyhedral Complementarity on a simplex. Potentiality of regular mappings. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, vol. 12, no. 1, pp. 167–176. doi: 10.1134/S1990478918010155 .
8. Eisenberg E., Gale D. Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method. *Ann. Math. Statist.*, 1959, vol. 30, no. 1, pp. 165–168. doi: 10.1214/aoms/1177706369 .
9. Devanur N.R., Papadimitriou C.H., Saberi A., Vazirani V.V. Market equilibrium via a primal–dual algorithm for a convex program. *Journal of the ACM (JACM)*, 2008, vol. 55, no. 5, art.-no. 22, 18 p. doi: 10.1145/1411509.1411512 .
10. Birnbaum B., Devanur N.R., Xiao L. Distributed algorithms via gradient descent for Fisher markets. In: *Proc. 12th ACM Conf. on Electronic Commerce*, N Y: ACM, 2011, pp. 127–136. doi: 10.1145/1993574.1993594 .
11. Lemke C.E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science*, 1965, vol. 11, no. 7, pp. 681–689. doi: 10.1287/mnsc.11.7.681 .
12. Adsul B., Babu C. S., Gang J., Mehta R., Sohoni M. A simplex-like algorithm for Fisher markets. In: *Algorithmic Game Theory* (SAGT 2010), S. Kontogiannis, E. Koutsoupias, P.G. Spirakis (eds), Berlin; Heidelberg: Springer, 2010, Lecture Notes in Computer Science, vol 6386, pp. 18–29. doi: 10.1007/978-3-642-16170-4_3 .
13. Garg J., Mehta R., Sohoni M., Vishnoi N. K. Towards polynomial simplex-like algorithms for market equilibria. In: *Proc. 24th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Philadelphia: SIAM, 2013, pp. 1226–1242. doi: 10.1137/1.9781611973105.89 .
14. Devanur N.R., Jain K., Mai T., Vazirani V.V., Yazdanbod S. New convex programs for Fisher's market model and its generalizations [e-resource], 2016, 23 p. Available on https://arxiv.org/pdf/1603.01257.pdf .
15. Cole Richard, Devanur Nikhil, Gkatzelis Vasilis, Jain Kamal, Mai Tung, Vazirani Vijay V., Yazdanbod Sadra. Convex program duality, Fisher markets, and Nash social welfare. In: *Proc. 18th ACM Conf. on Economics and Computation*, 2017, Massachusets Institute of Technology, pp. 459–460. doi: 10.1145/3033274.3085109 .
16. Shmyrev V.I. Polyhedral complementarity and fixed points problem of decreasing regular mappings on simplex. In: *Proc. VIII Inter. Conf. on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2017), Petrovac, Montrnegro, 2017*, Yu.G. Evtushenko, M.Yu. Khachay, O.V. Khamisov, Yu.A. Kochetov, V.U. Malkova, M.A. Posypkin (eds), 2017, vol. 1987, pp. 511–516.
17. Shmyrev V.I. *Vvedenie v matematicheskoe programmirovanie* [Introduction to mathematical programming]. Moscow: Inst. Komp. Issl. Publ., 2002, 192 p.
18. Pontryagin L.S. *Foundations of combinatorial topology.* N Y: Dover Publ., 2015, 112 p. ISBN: 978-0-486-40685-5 . Original Russian text published in Pontryagin L.S. *Osnovy kombinatornoi topologii*, Moscow: Nauka Publ., 1986, 120 p.
19. Rockafellar R. *Convex analysis.* Princeton: Princeton University Press, 1970, 451 p. ISBN: 0691015864 . Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1973, 469 p.
20. Vazirani V.V. Spending constraint utilities, with applications to the adwords market. *Math. Oper. Research*, 2010, vol. 35, no. 2, pp. 458–478. doi: 10.1287/moor.1100.0450 .

Received October 18, 2019
Revised April 12, 2020
Accepted July 27, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-010-00910 A) and by the Programme for Fundamental Scientific Research of SB RAS No. I.5.1 (project 0314-2019-0018) .

Vadim Ivanovich Shmyrev, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: shvi@math.nsc.ru .

Cite this article as: V. I. Shmyrev. Duality in linear economic models of exchange, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 258–274.