ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 519.853

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ В МЕТОДЕ КВАЗИРЕШЕНИЙ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

Работа посвящена нахождению аппроксимационных решений несобственных задач выпуклого программирования (НЗ ВП). Для таких задач рассматривается корректирующая модель как задача минимизации целевой функции исходной проблемы на множестве экстремальных точек штрафной функции, которая агрегирует несовместные ограничения. В качестве штрафной функции выбрана точная штрафная функция Еремина — Зангвилла. В условиях приближенного задания исходной информации обобщенное решение НЗ ВП получается в результате применения известного из теории некорректных задач метода квазирешений. Приводятся оценки, характеризующие качество коррекции. Предлагаются итерационные схемы, реализующие данный подход.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод точной штрафной функции, метод квазирешений.

V. D. Skarin. On the choice of parameters in the quasisolution method for the correction of improper convex programs.

The paper is devoted to finding approximation solutions of improper convex programs. For such programs, a correction model is considered in the form of the problem of minimizing the objective function of the original problem on the set of extremal points of a penalty function, which aggregates the inconsistent constraints. For the penalty function, the Eremin–Zangwill exact penalty function is chosen. Under an approximately given input, a generalized solution of the improper convex program is obtained by applying the quasisolution method known in the theory of ill-posed problems. Estimates characterizing the quality of the correction are given. Iterative schemes implementing this approach are proposed.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, exact penalty function method, quasisolution method.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-187-197

Введение

Данная работа продолжает исследования автора, связанные с применением методов регуляризации некорректно поставленных оптимизационных задач для коррекции несобственных задач (см. [1]) выпуклого программирования.

Важнейший класс несобственных задач линейного и выпуклого программирования составляют модели с противоречивыми ограничениями. Причинами несовместности ограничений в задаче оптимизации могут служить неточности в задании исходных данных, многокритериальный характер задачи, дефицит необходимых ресурсов и т. п. Поскольку противоречивость ограничений — обычное явление при моделировании реальных задач экономики и управления, то важное значение приобретает развитие теории и методов численной аппроксимации (коррекции) несобственных моделей. В процессе коррекции данная НЗ ВП погружается в параметрическое семейство разрешимых задач ВП, и в этом семействе отыскивается оптимальная относительно значения параметра модель (оптимальная коррекция). Решение найденной задачи принимается за обобщенное (аппроксимационное) решение исходной НЗ.

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре, и поддержана РФФИ, проект 19-07-01243.

Исследования по несобственным задачам математического программирования были инициированы академиком И. И. Ереминым [1]. Они интенсивно развивались и сохраняют свою актуальность в современной теории оптимизации. Это нашло отражение в многочисленных публикациях по данной тематике; из относительных недавних работ отметим [2–6].

Несобственные задачи часто порождаются моделями с приближенным заданием исходной информации. Подобные же задачи являются предметом теории и методов некорректных оптимизационных задач (см. [7; 8]). Поэтому естественными выглядят попытки использовать при анализе НЗ стандартные методы регуляризации некорректных моделей, такие как метод Тихонова (см. [9; 10]), метод невязки (см. [3]), метод квазирешений.

В данной работе в качестве коррекции для НЗ ВП рассматривается задача минимизации целевой функции исходной проблемы на множестве экстремальных точек штрафной функции, которая агрегирует несовместные ограничения. В качестве штрафной функции избрана точная штрафная функция Еремина — Зангвилла (см. [11; 12]). В условиях приближенного задания исходной информации обобщенное решение НЗ ВП получается в результате применения метода квазирешений [8]. Выведены оценки, характеризующие качество коррекции НЗ. Предлагаются итерационные схемы, реализующие данный подход.

1. Оптимальная коррекция НЗ ВП

Рассмотрим задачу ВП
$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$
где $X = \{x \mid f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Несобственной (см. [1]) называется задача (1), для которой не выполняется соотношение двойственности
$$\inf_x \sup_{\lambda\ge 0} L(x,\lambda) = \sup_{\lambda \ge 0} \inf_x L(x,\lambda),$$
где $L(x,\lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}^m_+)$ — функция Лагранжа для задачи (1). Чаще всего НЗ ВП возникают в случае, когда $X = \varnothing$, т. е. когда в задаче (1) несовместна система ограничений.

Естественный способ оптимальной коррекции НЗ ВП заключается в минимальной коррекции вектора правых частей ограничений задачи (1) относительно некоторой векторной нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$, т. е. вместо (1) исследуется задача
$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar\xi}\}, \tag{2}$$
где $\bar\xi = \bar\xi_p = \arg\min\{\|\xi\|_p \colon \xi \in E\}$, $E = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+ \mid X_\xi \equiv \{x \mid f(x) \le \xi\} \ne \varnothing\}$, $\|\cdot\|_p$ — символ нормы. Для p чаще всего выбирают значения:
$$p = 1 \ \Bigl(\|z = [z_1, \dots, z_m]\|_1 = \sum_{i=1}^m |z_i|\Bigr);\ \ p = 2 \ \Bigl(\|z\|_2 = \bigl(\sum_{i=1}^m z_i^2\bigr)^{1/2}\Bigr);\ \ p = \infty \ \bigl(\|z\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |z_i|\bigr).$$

Если в задаче (1) $X \ne \varnothing$, то $\bar\xi = 0$ и задачи (1) и (2) совпадают. В противном случае оптимальный вектор задачи (2) принимается за обобщенное решение НЗ (1).

Задачу (2) можно обобщить следующим образом. Рассмотрим меру несовместности системы $f(x) \le 0$ в виде
$$\bar\varphi = \inf_x \varphi(x), \tag{3}$$
где $\varphi(x) = \omega(f^+(x))$, $\omega(z)$ — выпуклая неубывающая функция, определенная на $\mathbb{R}^m_+$, такая что
$$\omega(0) = 0, \quad \omega(z) > 0 \quad (\forall z \in \mathbb{R}^m_+,\ z \ne 0). \tag{4}$$

Пусть величина $\bar{\varphi}$ достигается в точке $\bar{x}$: $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x})$. Тогда $X \neq \varnothing$ в том и только в том случае, когда $\bar{\varphi} = 0$. Если $\bar{\varphi} > 0$ и $\bar{\varphi} = \omega(f^+(\bar{x}))$, то можно определить коррекцию НЗ ВП (1) в виде

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\tilde{\xi}}\}, \tag{5}$$

где $\tilde{\xi} = f^+(\bar{x})$. Примером функции $\varphi(x)$ в (3) является $\varphi(x) = \varphi_p(x) = \|f^+(x)\|_p$, $p = 1, 2, \infty$.

Сразу возникает вопрос о связи задач (2) и (5) при $\varphi(x) = \varphi_p(x)$. Пусть в (2) $p = 2$ и вектор $\bar{\xi} = \bar{\xi}_2$ существует (для этого, например, достаточно, чтобы множество X_ξ было непусто и ограничено для некоторого $\xi = \xi_0$ — в этом случае будет выпуклым и замкнутым множество E, что обеспечивает существование и единственность вектора $\bar{\xi}$). Нетрудно показать, что при $p = 2$ задачи (2) и (5) совпадают.

В самом деле, пусть $x^* \in X_{\bar{\xi}}$. Тогда $f^+(x^*) \leq \bar{\xi}$, $\|f^+(x^*)\|_2 \leq \|\bar{\xi}\|_2$, т.е. по определению $\bar{\xi}$ $\|f^+(x^*)\|_2 = \|\bar{\xi}\|_2$. В силу единственности евклидовой проекции $0 \in \mathbb{R}^m$ на выпуклое замкнутое множество E имеем $\bar{\xi} = f^+(x^*)$. С другой стороны, так как

$$\|f^+(\bar{x})\| \leq \|f^+(x)\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

то

$$\|\tilde{\xi}\| = \|f^+(\bar{x})\| \leq \|f^+(x^*)\| = \|\bar{\xi}\|.$$

Поэтому $\tilde{\xi} = \bar{\xi}$, $\bar{x} \in X_{\bar{\xi}}$ и $X_{\bar{\xi}} = \bar{X} = \operatorname{Arg}\min\limits_{x} \varphi(x)$.

Если в задаче (2) $p = 1$ или $p = \infty$, функция $\varphi(x) = \|f^+(x)\|_p$ в (3) определяется с помощью кусочно-линейных норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$, то равенство $\bar{\xi} = \tilde{\xi}$ может не выполняться.

П р и м е р. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\min\{2x_1 + x_2 \mid x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_1 + x_2 \geq 2\}.$$

Здесь $X = \varnothing$. Минимизируем вначале функцию

$$\varphi_2(x) = \|f^+(x)\| = \left(x_1^{+^2} + x_2^{+^2} + (2 - x_1 - x_2)^{+^2}\right)^{1/2}.$$

Получим $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_2 = \min \varphi_2(x) = \sqrt{3}/3 = \varphi_2(\bar{x})$, где $\bar{x} = [2/3, 2/3]$. Тогда

$$\bar{\xi} = f^+(\bar{x}) = [2/3, 2/3, 2/3], \quad X_{\bar{\xi}} = \{x \mid f(x) \leq \bar{\xi}\} = \{\bar{x}\} = \operatorname{Arg}\min \varphi_2(x).$$

Для функции

$$\varphi_1(x) = \|f^+(x)\|_1 = x_1^+ + x_2^+ + (2 - x_1 - x_2)^+$$

имеем $\bar{\varphi}_1 = \min \varphi_1(x) = 2$, $\bar{X}_1 = \operatorname{Arg}\min \varphi_1(x) = \{x = [x_1, x_2]\colon x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 2\}$. В качестве $\tilde{\xi}$ в задаче (5) можно взять любой вектор $f^+(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \bar{X}_1$. Например, при $\tilde{x}_1 = [0, 0]$ имеем $\tilde{\xi}_1^1 = [0, 0, 2]$, при $\tilde{x}_2 = [1, 0]$ — $\tilde{\xi}_1^2 = [1, 0, 1]$, при $\tilde{x}_3 = [1, 1]$ — $\tilde{\xi}_1^3 = [1, 1, 0]$. Очевидно, $X_{\tilde{\xi}_1^1} = \{\tilde{x}_1\}$, $X_{\tilde{\xi}_1^2} = \{\tilde{x}_2\}$, $X_{\tilde{\xi}_1^3} = \{\tilde{x}_3\}$. Таким образом, вектор $\tilde{\xi}_1$ в задаче (5) определяется неоднозначно, но для каждого $\tilde{\xi}_1$ будет выполняться $\|\tilde{\xi}_1\|_1 = 2 = \bar{\varphi}_1$, $X_{\tilde{\xi}_1} \subset \bar{X}_1$.

2. Метод квазирешений

Поскольку вектор $\tilde{\xi}$ в задаче (5) при использовании некоторых норм может определяться неоднозначно, то целесообразно формулировать оптимальную коррекцию НЗ ВП в виде задачи

$$\min\{f_0(x) \mid x \in \widetilde{X}\}, \tag{6}$$

где $\widetilde{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq \bar{\varphi}\}$.

Задача (6) — более общая постановка по сравнению с (5). Если $\widetilde{X} \neq \varnothing$, $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, $\tilde{\xi} = f^+(\tilde{x})$, то всегда $X_{\tilde{\xi}} \subset \widetilde{X}$. Действительно, пусть $x' \in X_{\tilde{\xi}}$, т. е. $f(x') \leq f^+(\tilde{x})$. Тогда

$$\varphi(x') = \omega(f^+(x')) \leq \omega(f^+(\tilde{x})) = \bar{\varphi}.$$

Пустота допустимого множества X в (1) часто возникает вследствие приближенного задания функций исходной задачи. Пусть в задаче (1) вместо функций $f_i(x)$ известны их приближения $f_i^\varepsilon(x)$ такие, что

$$|f_i^\varepsilon(x) - f_i(x)| \leq \varepsilon \tag{7}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Тогда задача коррекции (6) запишется в форме

$$\min\{f_0^\varepsilon(x) \mid x \in \widetilde{X}_\varepsilon\}, \tag{8}$$

где $\widetilde{X}_\varepsilon = \operatorname{Arg}\min\limits_x \varphi^\varepsilon(x)$, $\varphi^\varepsilon(x) = \omega(f^{\varepsilon^+}(x))$, функция $\omega(z)$ удовлетворяет условиям (4).

Для того чтобы с помощью анализа возмущенной задачи (8) получить решение задачи коррекции (6), необходимо применить некоторый метод регуляризации из теории некорректных задач оптимизации. Привлечем для этой цели идеологию известного метода квазирешений (см. [8]).

Выберем вначале стабилизатор (см. [8]) задачи (1) как выпуклую неотрицательную функцию $\Omega(x)$, определенную на $\mathbb{R}^n$, для которой множество $Q(C) = \{x \mid \Omega(x) \leq C\}$ ограничено для всех C таких, что $Q(C) \neq \varnothing$.

Ограничения возмущенной задачи (1) будем агрегировать с помощью штрафной функции $\varphi_\beta^\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x))^\beta$, $\beta \geq 1$, типичной для метода “внешних” штрафных функций из теории ВП.

Метод квазирешений (см. [8]) состоит в нахождении точки $x_{rd}^{\varepsilon\delta}$ приближенного решения задачи

$$\min_x\{F^\varepsilon(x, r) = f_0^\varepsilon(x) + r\varphi_\beta^\varepsilon(x) \mid x \in S_d\}, \tag{9}$$

где $F^\varepsilon(x_{rd}^{\varepsilon\delta}, r) \leq \bar{F} + \delta$, $\bar{F} = \bar{F}(r, d, \varepsilon) = \inf\limits_x\{F^\varepsilon(x, r) \mid x \in S_d\}$, $S_d = \{x \mid \Omega(x) \leq d\}$, $r > 0$, $d > 0$, $\delta \geq 0$.

Примером штрафной функции $\varphi_\beta^\varepsilon(x)$ в (9) могут служить такие распространенные в методе штрафных функций конструкции, как $\varphi_1^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^m f_i^{\varepsilon^+}(x)$ — точная штрафная функция, $\varphi_2^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x))^2$ — квадратичная штрафная функция (см. [11]).

В данной работе в качестве функции $\varphi_\beta^\varepsilon(x)$ в (9) будет рассматриваться $\varphi_1^\varepsilon(x)$. Метод точных штрафных функций выгодно выделяется (см. [11; 12]) наличием порогового значения штрафного коэффициента r, начиная с которого обеспечивается эквивалентность исходной задачи ВП и задачи минимизации штрафной функции.

Простоты ради будем считать в задаче (9) $\delta = 0$, что не очень существенно для идеологии рассматриваемого подхода к коррекции НЗ ВП. Ограничение $x \in S_d$ в (9) также уберем с помощью соответствующего штрафного слагаемого. В итоге метод квазирешений для коррекции НЗ ВП (1) сводится к анализу задачи

$$\min_x\{F^\varepsilon(x, R, d) = f_0^\varepsilon(x) + r\varphi_1^\varepsilon(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^+\}, \tag{10}$$

где $R = [r, \rho] > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$.

Для краткости записи обозначим $s = [r, \rho, d, \varepsilon]$, $r > 0$, $\rho > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$; $F_s(x) = F^\varepsilon(x, R, d)$.

Вначале исследуем вопрос существования решения задачи (10).

Лемма 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнено условие*

$$\exists\, \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0\colon f_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\Omega(x) \geq \sigma > -\infty \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{11}$$

Тогда задача (10) *разрешима для любого* $s = [r, \rho, d, \varepsilon]$, $r > \alpha_1$, $\rho \geq \alpha_2 + 1$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$|f_i^{\varepsilon+}(x) - f_i^+(x)| \le |f_i^\varepsilon(x) - f_i(x)| \le \varepsilon \quad (i = 0, 1, \dots, m),$$

то $\varphi_1(x) \le \varphi_1^\varepsilon(x) + m\varepsilon$ $(\forall x)$. Следовательно,

$$F^0(x, R, d) = f_0(x) + r\varphi_1(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^+$$
$$\le f_0^\varepsilon(x) + r\varphi_1^\varepsilon(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^+ + \varepsilon(1 + mr) = F_s(x) + \varepsilon(1 + mr).$$

Обозначим $M(C_1) = \{x \mid F_s(x) \le C_1\}$, $C_1 = \mathrm{const}$. Пусть $M(C_1) \ne \varnothing$ и $x' \in M(C_1)$. Тогда

$$C_1 + \varepsilon(1 + mr) \ge f_0(x') + \alpha_1\varphi_1(x') + \alpha_2\Omega(x') + (r - \alpha_1)\varphi_1(x') + \rho\,(\Omega(x') - d)^+ - \alpha_2\Omega(x')$$
$$\ge \sigma + (\rho - \alpha_2)\Omega(x') - \rho\, d.$$

Отсюда

$$\Omega(x') \le \frac{\rho\, d}{\rho - \alpha_2} + \frac{C_1 - \sigma + \varepsilon(1 + mr)}{\rho - \alpha_2} \le (1 + \alpha_2)d + C_1 - \sigma + \varepsilon(1 + mr),$$

т. е.

$$M(C_1) \subset Q(C_2) = \{x \mid \Omega(x) \le C_2\},$$

где $C_2 = (1+\alpha_2)d + C_1 - \sigma + \varepsilon(1+mr)$. По определению стабилизатора $\Omega(x)$ множество $M(C_1)$ ограничено. Так как $M(C_1)$ замкнуто и $\inf\limits_x F_s(x) = \min\{F_s(x) \mid x \in M(C_1)\}$, то из непрерывности функции $F_s(x)$ по x и ограниченности множества $M(C_1)$ следует справедливость леммы.

Лемма доказана.

Отметим важные частные случаи выполнения условия (11):

1) функция $f_0(x)$ ограничена снизу на $\mathbb{R}^n$: $f_0(x) \ge \sigma > -\infty$ $(\forall x)$;

2) стабилизатор $\Omega(x)$ — равномерно выпуклая (см. [8]) функция на $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2. *Пусть* $l(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda\,(\varphi_1(x) - \bar\varphi_1)$ — *функция Лагранжа для задачи оптимальной коррекции* (6) *имеет седловую точку* $[\bar x, \bar\lambda]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$. *Если в задаче* (10) $r \ge \bar\lambda$, $\rho > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \ge 0$, *то существует точка* $\bar x_s = \arg\min\limits_x F_s(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество $M^0_{Rd} = \{x \mid F^0(x, R, d) \le F^0(\bar x, R, d)\}$ и пусть $x' \in M^0_{Rd}$. Другими словами, имеет место неравенство

$$f_0(x') + r\varphi_1(x') + \rho(\Omega(x') - d)^+ \le f_0(\bar x) + r\varphi_1(\bar x) + \rho(\Omega(\bar x) - d)^+. \tag{12}$$

Из определения седловой точки следует, что $\bar x$ — решение задачи (6), $\varphi_1(\bar x) = \bar\varphi_1$,

$$\bar f = f_0(\bar x) \le f_0(x) + \bar\lambda\,(\varphi_1(x) - \bar\varphi_1) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{13}$$

С учетом (13) из (12) вытекает

$$\rho(\Omega(x') - d)^+ \le \bar f - f_0(x') + r(\bar\varphi_1 - \varphi_1(x')) + \rho(\Omega(\bar x) - d)^+$$
$$\le (\bar\lambda - r)(\varphi_1(x') - \bar\varphi_1) + \rho(\Omega(\bar x) - d)^+.$$

Если при этом $d \ge \Omega(\bar x)$, то из верхнего неравенства выводим, что при $r \ge \bar\lambda$ будет $\Omega(x') \le d$. Если же $0 < d < \Omega(\bar x)$, то при $r \ge \bar\lambda$ имеем $\Omega(x') \le \Omega(\bar x)$. Таким образом, $M^0_{Rd} \subset Q(C_3) = \{x \mid \Omega(x) \le C_3\}$, где $C_3 = \max\{d, \Omega(\bar x)\}$, и, следовательно, множество M^0_{Rd} ограничено при $r \ge \bar\lambda$, $\rho > 0$, $d > 0$.

Пусть теперь $\bar M_s = \{x \mid F_s(x) \le F_s(\bar x)\}$, $y \in \bar M_s$. Тогда $F^0(y, R, d) \le F_s(y) + \varepsilon(1 + mr)$, т. е. $\bar M_s \subset M_{Rd}(C_4) = \{x \mid F^0(x, R, d) \le C_4\}$, где $C_4 = F_s(\bar x) + \varepsilon(1 + mr)$. Поэтому множество $\bar M_s$ ограничено. Ограниченность и замкнутость $\bar M_s$ обеспечивают существование точки $\bar x_s = \arg\min\limits_x F_s(x)$ при $r \ge \bar\lambda$, $\rho > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \ge 0$.

Лемма доказана.

3. Сходимость метода

Исследуем сходимость метода квазирешений (10) для случая, когда задача оптимальной коррекции (6) при $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ имеет решение.

Теорема 1. *Пусть $\bar{x}$ — решение задачи* (6) *и выполнены условия леммы* 1. *Тогда для любых значений $r > \alpha_1$, $\rho > \alpha_2$, $d > 0$ и $\varepsilon \geq 0$ справедливы оценки*:

$$\Omega(\bar{x}_s) \leq d + \frac{1}{\rho - \alpha_2}\,(\bar{f} - \sigma + \alpha_1\bar{\varphi}_1 + \alpha_2 d + B_1(\bar{x}, s)); \tag{14}$$

$$\varphi_1(\bar{x}_s) \leq \bar{\varphi}_1 + \frac{1}{r - \alpha_1}\,(\bar{f} - \sigma + \alpha_1\bar{\varphi}_1 + \rho d + B_1(\bar{x}, s)); \tag{15}$$

$$f_0(\bar{x}_s) \leq \bar{f} + B_1(\bar{x}, s)), \tag{16}$$

где $\bar{f} = f_0(\bar{x})$, $\bar{x}_s$ — решение задачи (10), *$B_1(\bar{x}, s) = \rho(\Omega(\bar{x}) - d)^+ + 2\,\varepsilon(1 + mr)$, константы α_1, α_2 и σ — из* (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства $F_s(\bar{x}_s) \leq F_s(\bar{x})$ имеем

$$f_0(\bar{x}_s) + r\varphi_1(\bar{x}_s) + \rho(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ \leq \bar{f} + r\bar{\varphi}_1 + B_1(\bar{x}, s). \tag{17}$$

Отсюда с учетом (11) вытекает

$$\sigma + (r - \alpha_1)\varphi_1(\bar{x}_s) + \rho(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ - \alpha_2\Omega(\bar{x}_s) \leq \bar{f} + (r - \alpha_1)\bar{\varphi}_1 + \alpha_1\bar{\varphi}_1 + B_1(\bar{x}, s).$$

Поэтому

$$(r - \alpha_1)(\varphi_1(\bar{x}_s) - \bar{\varphi}_1) + (\rho - \alpha_2)(\Omega(\bar{x}_s) - d) \leq \bar{f} - \sigma + \alpha_1\bar{\varphi}_1 + \alpha_2 d + B_1(\bar{x}, s). \tag{18}$$

Если $r > \alpha_1$, $\rho > \alpha_2$, то из (18) получим оценку (14):

$$(\rho - \alpha_2)(\Omega(\bar{x}_s) - d) \leq \bar{f} - \sigma + \alpha_1\bar{\varphi}_1 + \alpha_2 d + B_1(\bar{x}, s).$$

Так как $(\rho - \alpha_2)(\Omega(\bar{x}_s) - d) \geq -(\rho - \alpha_2)d$, то из (18) следует

$$(r - \alpha_1)(\varphi(\bar{x}_s) - \bar{\varphi}_1) \leq \bar{f} - \sigma + \alpha_1\bar{\varphi}_1 + \rho d + B_1(\bar{x}, s),$$

что приводит к оценке (15).

Оценку (16) непосредственно выводим из неравенства (17).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Любая предельная точка последовательности $\{\bar{x}_s\}$ при $r \to \infty$, $\rho = \bar{\rho} > \alpha_2$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon r \to 0$, $d \to \Omega(\bar{x})$ решает задачу* (6).

Действительно, из оценки (14) делаем заключение об ограниченности последовательности $\{\bar{x}_s\}$ и существовании у нее предельной точки $\tilde{x}$. В силу (15) $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ и $f_0(\tilde{x}) \geq \bar{f}$. Согласно (16) $f_0(\tilde{x}) \leq \bar{f}$, т. е. $\tilde{x}$ — решение задачи (6).

Следствие 2. *Пусть в* (10) *$r \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon r \to 0$, параметры ρ и d фиксированы: $\rho = \bar{\rho} > \alpha_2$, $d = \bar{d} \geq \Omega(\bar{x})$. Тогда любая предельная точка последовательности $\{\bar{x}_s\}$ будет решением задачи* (6).

При выполнении условий данного следствия в силу того, что $B_1(\bar{x}, s) = 2\,\varepsilon(1 + mr)$, оценки (14)–(16) в теореме 1 несколько упрощаются.

Теорема 2. *Пусть для задачи* (6) *с* $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ *выполнены условия леммы* 2, $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ — *седловая точка функции* $l(x, \lambda)$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$ *и параметры* r, ρ *из задачи* (10) *выбраны так, чтобы* $r = \bar{r} \geq \bar{\lambda} + 1$, $\rho = \bar{\rho} > 0$. *Справедливы соотношения*:

$$\varphi_1(\bar{x}_s) - \bar{\varphi}_1 \leq B_1(\bar{x}, s); \tag{19}$$

$$(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ \leq \frac{1}{\bar{\rho}}\, B_1(\bar{x}, s); \tag{20}$$

$$|f_0(\bar{x}_s) - \bar{f}| \leq B_1(\bar{x}, s)\, \max\{1, \bar{\lambda}\}, \tag{21}$$

где $\bar{f} = f_0(\bar{x})$, $B_1(\bar{x}, s)$ — *из теоремы* 1.

Если $r = \bar{r}$, $\rho = \bar{\rho}$, $\varepsilon \to 0$, $d \to \Omega(\bar{x})$, *то любая предельная точка последовательности* $\{\bar{x}_s\}$ *будет решением задачи коррекции* (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в неравенстве (12) $x' = \bar{x}_s$. С учетом (12) и (13) получим

$$F_s(\bar{x}_s) \geq \bar{f} + r\varphi_1(\bar{x}_s) - \bar{\lambda}\,(\varphi_1(\bar{x}_s) - \bar{\varphi}_1) + \rho(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ - \varepsilon(1 + mr). \tag{22}$$

С другой стороны,

$$F_s(\bar{x}_s) \leq F^0(\bar{x}, R, d) + \varepsilon(1 + mr) = \bar{f} + r\bar{\varphi}_1 + \rho(\Omega(\bar{x}) - d)^+ + \varepsilon(1 + mr), \tag{23}$$

что вместе с (22) дает

$$(r - \bar{\lambda})(\varphi_1(\bar{x}_s) - \bar{\varphi}_1) + \rho(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ \leq \rho(\Omega(\bar{x}) - d)^+ + 2\,\varepsilon(1 + mr) = B_1(\bar{x}, s).$$

Отсюда при $r = \bar{r}$, $\rho = \bar{\rho}$ приходим к следующим результатам:

$$\varphi_1(\bar{x}_s) - \bar{\varphi}_1 \leq B_1(\bar{x}, s), \quad (\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ \leq \frac{1}{\bar{\rho}}\, B_1(\bar{x}, s),$$

т. е. справедливы оценки (19) и (20). Применяя эти оценки к неравенству (13) при $x = \bar{x}_s$, выводим $\bar{f} - f_0(\bar{x}_s) \leq \bar{\lambda} B_1(\bar{x}, s)$. Кроме того, из соотношения (23) следует $f_0(\bar{x}_s) - \bar{f} \leq B_1(\bar{x}, s)$. Поэтому имеет место и оценка (21).

Пусть в задаче (10) $r = \bar{r} \geq \bar{\lambda} + 1$, $\rho = \bar{\rho} > 0$, $\varepsilon \to 0$, $d \to \Omega(\bar{x})$. Тогда в силу (20) и свойств стабилизатора $\Omega(x)$ последовательность $\{\bar{x}_s\}$ ограничена. Обозначим через $\tilde{x}$ ее предельную точку. Тогда из оценок (19) и (21) вытекает: $\varphi_1(\tilde{x}) \leq \bar{\varphi}_1$, $f_0(\tilde{x}) = \bar{f}$, т. е. $\tilde{x}$ — решение задачи (6). Если $\bar{x}$ — единственное Ω-нормальное решение задачи (6), то $\lim \bar{x}_s = \bar{x}$.

Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 формулировались при условии, что задача оптимальной коррекции (6) имеет решение $\bar{x}$, т. е. $\widetilde{X} \neq \varnothing$ и $f_0(\bar{x}) \leq f_0(x)$ $(\forall x \in \widetilde{X})$. Рассмотрим случай, когда значение $\bar{\varphi}_1$ в (6) не достигается. Очевидно, тогда $\widetilde{X} = \varnothing$. Применим для отыскания $\bar{\varphi}_1$ некоторый монотонно убывающий итерационный метод минимизации функций многих переменных: $\varphi_1(x_k) \searrow \bar{\varphi}_1$ $(k \to \infty)$. Описание релаксационных субградиентных алгоритмов для минимизации выпуклой функции $\varphi_1(x)$ можно найти, например, в [13].

Пусть $\bar{k}$ — номер члена последовательности $\{x_k\}$, для которого $\bar{\varphi}_k = \varphi_1(x_{\bar{k}}) \leq \bar{\varphi}_1 + \omega$, где $\omega > 0$ — заданная точность. Определим оптимальную коррекцию для НЗ ВП (1) как задачу

$$\min\{f_0(x) \mid \varphi_1(x) \leq \bar{\varphi}_k\}. \tag{24}$$

В случае разрешимости задачи оптимальной коррекции (6) можно надеяться, что при достаточно большом $\bar{k}$ решение задачи (24) будет хорошей аппроксимацией для (6).

Так как $\varphi_1(x_{\bar{k}+1}) < \varphi_1(x_{\bar{k}})$, то точка $x_{\bar{k}+1}$ будет удовлетворять условию Слейтера для задачи (24). Если точка $\bar{x}_k$ — решение задачи (24), то функция Лагранжа для этой задачи $l_k(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda\,(\varphi_1(x) - \bar{\varphi}_k)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^1_+$ будет иметь в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$ седловую точку $[\bar{x}_k, \bar{\lambda}_k]$.

Пусть в задаче (1) функции $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, определены с точностью (7), функция $l_k(x, \lambda)$ имеет в области $X \times \mathbb{R}^1_+$ седловую точку $[\bar{x}_k, \bar{\lambda}_k]$. Применим для анализа задачи (24) метод квазирешений (10).

Теорема 3. *Пусть в задаче* (10) $r \geq \bar{\lambda}_k + 1$, $\rho > 0$, $\varepsilon \geq 0$, $d > 0$. *Тогда существует точка* $\tilde{x}_s$ — *решение задачи* (10), *при этом справедливы соотношения*:

$$\varphi_1(\tilde{x}_s) - \bar{\varphi}_k \leq B_2; \quad \varphi_1(\tilde{x}_s) - \bar{\varphi}_1 \leq B_2 + \omega;$$

$$(\Omega(\tilde{x}_s) - d)^+ \leq \frac{1}{\rho}\,[B_2 + (r - \bar{\lambda}_k)\omega]; \quad |f_0(\tilde{x}_s) - f_0(\bar{x}_k)| \leq \max\{\bar{\lambda}_k B_2, r\omega + B_2\},$$

где $B_2 = B_2(s, \bar{k}) = \rho(\Omega(\bar{x}_k) - d)^+ + 2\varepsilon(1 + mr)$.

Доказательство данного утверждения опускается. Его можно провести, следуя схеме доказательств леммы 2 и теоремы 2 с учетом определения величины $\bar{\varphi}_k$ и аналога неравенства (13): $f_0(\bar{x}_k) \leq f_0(x) + \bar{\lambda}_k\,(\varphi_1(x) - \bar{\varphi}_k)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$.

Следствие 3. *Пусть при выполнении условий теоремы* 3 $r = \bar{r} \geq \bar{\lambda}_k + 1$, $\rho = \bar{\rho} > 0$, $\varepsilon \to 0$, $d \to \Omega(\bar{x}_k)$. *Тогда любая предельная точка последовательности* $\{\tilde{x}_s\}$ *допустима в задаче* (24), *при этом* $\Omega(\tilde{x}) \leq \Omega(\bar{x}_k)$, $f_0(\bar{x}_k) \leq f_0(\tilde{x}) \leq \bar{r}\omega + f_0(\bar{x}_k)$.

4. Итеративный алгоритм коррекции НЗ ВП

Из приведенной выше теоремы 3 следует, что для сходимости предлагаемого метода коррекции НЗ ВП необходимо, чтобы $\varepsilon \to 0$, параметры r и ρ были фиксированными числами (r достаточно большим) и $d \to \Omega(\bar{x}_k)$. При практической реализации метода наибольшая трудность ожидается в обеспечении сходимости $d \to \Omega(\bar{x}_k)$.

Далее предлагается алгоритм управления параметрами задачи (10) (прежде всего параметром d), обеспечивающий требуемое качество аппроксимации.

Пусть $\{x_k\}$ — минимизирующая последовательность для $\varphi_1(x)$: $\varphi_1(x_k) \searrow \bar{\varphi}_1 = \inf\limits_x \varphi_1(x)$ $(k \to \infty)$ и известен номер $\bar{k}$ такой, что $\bar{\varphi}_k = \varphi_1(x_{\bar{k}}) \leq \bar{\varphi}_1 + \omega$, $\omega > 0$. Обозначим через $[\bar{x}_k, \bar{\lambda}_k]$ седловую точку функции Лагранжа $l_k(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda\,(\varphi_1(x) - \bar{\varphi}_k)$ для задачи (24), $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^1_+$.

Определим последовательность положительных чисел τ_n так, чтобы $\tau_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$. Выберем начальное значение d_0 параметра d из условия $d_0 \geq \Omega(\bar{x}_k) + \tau_0$. Положим

$$d_{n+1} = d_n - (\Omega(\tilde{x}_n) - d_n + \tau_n)^+, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{25}$$

где $\tilde{x}_n = \arg\min\limits_x \Phi_n(x)$,

$$\Phi_n(x) = \Phi^{\varepsilon_n}_{d_n}(x, r_n, \rho_n, \tau_n) = f^{\varepsilon_n}_0(x) + r_n\varphi^{\varepsilon_n}_1(x) + \rho_n(\Omega(x) - d_n + \tau_n)^+,$$

$r_n > 0$, $\rho_n > 0$, $\varepsilon_n \geq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Теорема 4. *Пусть параметры* τ_n, r_n, ρ_n, ε_n *в алгоритме* (25) *определены так, чтобы*

$$\tau_n \searrow 0, \quad r_n = \bar{r} \geq \bar{\lambda}_k + 1, \quad \rho_n \nearrow +\infty, \quad \sigma_n = \rho_n(\tau_n - \tau_{n+1}) \nearrow +\infty \quad (n \to \infty).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d^* \geq \Omega(\bar{x}_k)$ *и для любой предельной точки* $\tilde{x}$ *последовательности* $\{\tilde{x}_n\}$ *выполняются соотношения*: $\varphi_1(\tilde{x}) \leq \bar{\varphi}_k$, $|f_0(\tilde{x}) - f_0(\bar{x}_k)| \leq \bar{r}\omega$.

Доказательство. Следуя схеме доказательства леммы 2, делаем вывод о существовании точки $\tilde{x}_n = \arg\min\limits_x \Phi_n(x)$. Из неравенства $\Phi_n(\tilde{x}_n) \leq \Phi_n(\bar{x}_k)$ вытекает

$$\begin{aligned} f_0(\tilde{x}_n) - f_0(\bar{x}_k) + r_n(\varphi_1(\tilde{x}_n) - \bar{\varphi}_k) + \rho_n(\Omega(\tilde{x}_n) - d_n + \tau_n)^+ \\ \leq \rho_n(\Omega(\bar{x}_k) - d_n + \tau_n)^+ + 2\varepsilon_n(1 + mr_n). \end{aligned} \tag{26}$$

Отсюда с учетом определения седловой точки $[\bar{x}_k, \bar{\lambda}_k]$ получаем

$$(r_n - \bar{\lambda}_k)(\varphi_1(\tilde{x}_n) - \varphi_{\bar{k}}) + \rho_n(\Omega(\tilde{x}_n) - d_n + \tau_n)^+ \le \rho_n(\Omega(\bar{x}_k) - d_n + \tau_n)^+ + 2\varepsilon_n(1 + mr_n). \quad (27)$$

Так как $\varphi_{\bar{k}} < \bar{\varphi}_1 + \omega$, то из (27) следует

$$\rho_n(\Omega(\tilde{x}_n) - d_n + \tau_n)^+ \le \rho_n(\Omega(\bar{x}_k) - d_n + \tau_n)^+ + 2\varepsilon_n(1 + mr_n) + (r_n - \bar{\lambda}_k)\omega. \quad (28)$$

По аналогии с $n = 0$, когда $d_0 \ge \Omega(\bar{x}_k) + \tau_0$, предположим, что и $d_n \ge \Omega(\bar{x}_k) + \tau_n$. Покажем, что тогда $d_{n+1} \ge \Omega(\bar{x}_k) + \tau_{n+1}$. В самом деле, поскольку $\Omega(\bar{x}_k) - d_n + \tau_n \le 0$, то $|\Omega(\bar{x}_k) - d_n + \tau_n| = d_n - \Omega(\bar{x}_k) - \tau_n$. Поэтому из (25) и (28) вытекает, что

$$d_{n+1} = d_n - (\Omega(\tilde{x}_n) - d_n + \tau_n)^+ \ge \Omega(\bar{x}_k) + \tau_n - \frac{1}{\rho_n}[2\varepsilon_n(1 + mr_n) + (r_n - \bar{\lambda}_k)\omega]. \quad (29)$$

Согласно условиям теоремы для достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$\rho_n(\tau_n - \tau_{n+1}) \ge 2\varepsilon_n(1 + mr_n) + (r_n - \bar{\lambda}_k)\omega.$$

Поэтому из (25) и (29) следует $d_n \ge d_{n+1} \ge \Omega(\bar{x}_k) + \tau_{n+1}$, т.е. последовательность $\{d_n\}$ не возрастает и ограничена снизу. Обозначая $d^* = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, получаем $d^* \ge \Omega(\bar{x}_k)$ и

$$\lim_{n\to\infty}(\Omega(\tilde{x}_n) - d_n + \tau_n)^+ = \lim_{n\to\infty}(d_n - d_{n+1}) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\Omega(\tilde{x}_n) \le d^*. \quad (30)$$

Из (30) имеем ограниченность последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ и существование у нее предельной точки $\tilde{x}$. В силу (27) $\varphi_1(\tilde{x}) \le \varphi_{\bar{k}}$, т.е. точка $\tilde{x}$ допустима в задаче (24) и $f_0(\bar{x}_k) \le f_0(\tilde{x})$. С учетом (26) выводим

$$\begin{aligned} f_0(\tilde{x}_n) - f_0(\bar{x}_k) &\le r_n(\varphi_1(\bar{x}_k) - \varphi_1(\tilde{x}_n)) + 2\varepsilon_n(1 + mr_n) \\ &\le r_n(\bar{\varphi}_1 + \omega - \varphi(\tilde{x}_n)) + 2\varepsilon_n(1 + mr_n) \le r_n\omega + 2\varepsilon_n(1 + mr_n). \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка $f_0(\bar{x}_k) \le f_0(\tilde{x}) \le f_0(\bar{x}_k) + \bar{r}\omega$.

Теорема доказана.

В качестве последовательностей τ_n, r_n, ρ_n, ε_n, удовлетворяющих условиям теоремы 4, можно взять: $r_n = \bar{r} \ge \bar{\lambda}_k + 1$, $\tau_n = \varepsilon_n = \alpha^{n+1}$, $\rho_n = 1/\gamma^{n+1}$, где $0 < \gamma < \alpha < 1$. Например, можно положить $\alpha = 1/2$, $\gamma = 1/3$.

Метод (25) вырабатывает числовую последовательность $\{d_n\}$, сходящуюся к пределу d^* монотонно убывая. Можно предложить аналогичный метод, который будет порождать монотонно возрастающую последовательность $\{d_n\}$. Опишем новый алгоритм применительно к задаче оптимальной коррекции (6).

Пусть задача (6) имеет решение $\bar{x}$. Определим по аналогии с (25) числовую последовательность $\tau_n > 0$, $\tau_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$. Выберем начальное значение d_0 параметра d из условия $d_0 \le \Omega(\bar{x}) - \tau_0$. Положим

$$d_{n+1} = d_n + (\Omega(\approx{x}_n) - d_n - \tau_n)^+, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad (31)$$

где $\approx{x}_n = \arg\min\limits_x \{\widetilde{\Phi}_n(x) = f_0^{\varepsilon_n}(x) + r_n\varphi_1^{\varepsilon_n}(x) + \rho_n(\Omega(x) - d_n - \tau_n)^+\}$, $r_n > 0$, $\rho_n > 0$, $\varepsilon_n \ge 0$.

Теорема 5. *Пусть функция Лагранжа для задачи* (6) $l(x,\lambda) = f_0(x) + \lambda(\varphi_1(x) - \bar{\varphi}_1)$ *имеет в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$ *седловую точку* $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$, *параметры* τ_n, r_n, ρ_n, ε_n *в алгоритме* (31) *выбраны так, чтобы*

$$\tau_n \searrow 0, \quad r_n = \bar{r} \ge \bar{\lambda} + 1, \quad \rho_n \nearrow +\infty, \quad \sigma_n = \rho_n(\tau_n - \tau_{n+1}) \nearrow +\infty \quad (n \to \infty).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d^* \le \Omega(\bar{x})$ *и любая предельная точка последовательности* $\{\approx{x}_n\}$ *является решением задачи* (6).

Сходимость алгоритма (31) проверяется по схеме доказательства теоремы 4 с естественной заменой величин $\bar{\varphi}_k$ на $\bar{\varphi}_1$, $\bar{x}_k$ на $\bar{x}$, $\bar{\lambda}_k$ на $\bar{\lambda}$, ω на 0.

Заключение

В работе исследуются возможности применения одного из стандартных способов регуляризации некорректных задач оптимизации — метода квазирешений для построения методов оптимальной коррекции несобственных задач линейного и выпуклого программирования. Ранее автором с этой же целью рассматривались подходы к коррекции на основе метода стабилизирующих функций, метода невязки (см. [3]). В настоящей работе исходная задача ВП с возможно несовместной системой ограничений заменяется аппроксимирующей моделью, которая представляет собой минимизацию целевой функции исходной проблемы на множестве точек минимума точной штрафной функции, агрегирующей ограничения задачи. Такой подход обобщает естественные способы коррекции относительно минимума нормы вектора правых частей ограничений. В условиях приближенного задания информации о функциях исходной проблемы корректирующая задача подвергается регуляризации по методу квазирешений. Это позволяет упростить вопросы, связанные с существованием решений возникающих задач и сходимостью к обобщенному решению. При этом с очевидностью проявляются преимущества точной штрафной функции, известные из теории ВП (см. [11; 12]), а именно, простота конструкции и наличие фиксированных значений штрафного параметра, обеспечивающего эквивалентность анализируемых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Попов Л. Д., Скарин В. Д.** Лексикографическая регуляризация и двойственность для несобственных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, №3. С. 279–291.
3. **Skarin V. D.** On the application of the residual method for the correction of inconsistent problems of convex programming // Proc. Steklov Institute Math. 2015. Vol. 289, Suppl. 1. P. S182–S191. doi: 10.1134/S0081543815050168 .
4. **Волков В. В., Ерохин В. И., Красников А. С., Разумов А. В., Хватов М. Н.** Минимальная по евклидовой норме матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 11. С. 1788–1803.
5. **Муравьева О. В.** Определение радиусов совместности и несовместности систем линейных уравнений и неравенств по матричной норме l_1 // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 6. С. 873–882.
6. **Васильев Ф. П., Потапов М. М., Артемьева Л. А.** Экстраградиентный метод коррекции противоречивых задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 12. С. 1992–1998.
7. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
8. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации: Кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
9. **Golub G. N., Hansen P. C., O'Leary D. P.** Tikhonov regularization and total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1999. Vol. 21, № 1. P. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432 .
10. **Renaut R. A., Guo N.** Efficient algorithms for solution of regularized total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, № 2. P. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .
11. **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
12. **Burke J. V.** An exact penalization viewpoint of constrained optimization // SIAM J. Contr. Optim. 1991. Vol. 29, № 4. P. 968–998. doi: 10.1137/0329054 .
13. **Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

Поступила 3.03.2020
После доработки 6.04.2020
Принята к публикации 20.04.2020

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук, зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Eremin I.I., Mazurov V.D., and Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper Problems of Linear and Convex Programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.
2. Popov L.D., Skarin V.D. Lexicographic regularization and duality for improper linear programming problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 295, suppl. 1, pp. 131–144. doi: 10.1134/S0081543816090145 .
3. Skarin V.D. On the application of the residual method for the correction of inconsistent problems of convex programming. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 289, suppl. 1, pp. 182–191. doi: 10.1134/S0081543815050168 .
4. Volkov V.V., Erokhin V.I., Krasnikov A.S., Razumov A.V., Khvostov M.N. Minimum-Euclidean-norm matrix correction for a pair of dual linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2017, vol. 57, no. 11, pp. 1757–1770. doi: 10.1134/S0965542517110148 .
5. Murav'eva O.V. Determination of consistency and inconsistency radii for systems of linear equations and inequalities using the matrix l_1 norm. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 6, pp. 840–849. doi: 10.1134/S0965542518060106 .
6. Vasil'ev F.P., Potapov M.M., Artem'eva L.A. Extragradient method for correction of inconsistent linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 1919–1925. doi: 10.1134/S0965542518120163 .
7. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
8. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: MTsNMO Publ., 2011. Vol. 1: 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2 ; Vol. 2: 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9 .
9. Golub G.N., Hansen P.C., O'Leary D.P. Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1999, vol. 21, no. 1, pp. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432 .
10. Renaut R.A., Guo N. Efficient algorithms for solution of regularized total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, vol. 26, no. 2, pp. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .
11. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu linejnogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 192 p.
12. Burke J. An exact penalization viewpoint of constrained optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization,* 1991, vol. 29, no. 4, pp. 968–998. doi: 10.1137/0329054 .
13. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nondifferentiable Optimization.* N Y: Springer-Verlag, 1985, 452 p. ISBN: 978-0-387-90951-6 . Original Russian text published in Dem'yanov V.F. Vasil'ev L.V., *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya*, Moscow: Nauka Publ., 1981, 384 p.

Received March 3, 2020
Revised April 6, 2020
Accepted April 20, 2020

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-07-01243).

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: skavd@imm.uran.ru .

V. D. Skarin. On the choice of parameters in the quasisolution method for the correction of improper convex programs, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 187–197 .