ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 512.556

АВТОМОРФИЗМЫ ПОЛУКОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ И РЕШЕТОК ЕГО ПОДАЛГЕБР

В. В. Сидоров

Коммутативное полукольцо с нулем и единицей, отличное от кольца, каждый ненулевой элемент которого обратим, называется полуполем с нулем. Пусть $\mathbb{R}_+^\vee$ — полуполе с нулем неотрицательных действительных чисел с операциями max-сложения и умножения. Для произвольных положительных чисел a и s обозначим через $\psi_{a,s}$ автоморфизм полукольца многочленов $\mathbb{R}_+^\vee[x]$, действующий по правилу $\psi_{a,s}\colon a_0 \vee a_1x \vee \ldots \vee a_nx^n \mapsto a_0^s \vee a_1^s(ax) \vee \ldots \vee a_n^s(ax)^n$. Доказано, что автоморфизмы полукольца многочленов $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ — это в точности автоморфизмы $\psi_{a,s}$. Кольцо $C(X)$ непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, является алгеброй над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Подалгеброй в $C(X)$ будет любое его непустое подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения функций и выдерживающее умножение на константы из $\mathbb{R}$. По аналогии непустое подмножество $A \subseteq \mathbb{R}_+^\vee[x]$ назовем подалгеброй полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$, если $f \vee g$, fg, $rf \in A$ для всех $f, g \in A$ и $r \in \mathbb{R}_+^\vee$. Доказано, что произвольный автоморфизм решетки подалгебр полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ индуцируется некоторым автоморфизмом полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$. Аналогичный результат верен для решетки подалгебр с единицей полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$. Применяется техника однопорожденных подалгебр.

Ключевые слова: полукольцо многочленов, решетка подалгебр, автоморфизм, max-сложение.

V. V. Sidorov. Automorphisms of the semiring of polynomials $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ and lattices of its subalgebras.

A commutative semiring with zero and unity different from a ring where each nonzero element is invertible is called a semifield with zero. Let $\mathbb{R}_+^\vee$ be the semifield with zero of nonnegative real numbers with operations of max-addition and multiplication. For any positive real numbers a and s, denote by $\psi_{a,s}$ the automorphism of the semiring of polynomials $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ defined by the rule $\psi_{a,s}\colon a_0 \vee a_1x \vee \ldots \vee a_nx^n \mapsto a_0^s \vee a_1^s(ax) \vee \ldots \vee a_n^s(ax)^n$. It is proved that the automorphisms of the semiring $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ are exactly the automorphisms $\psi_{a,s}$. The ring $C(X)$ of continuous $\mathbb{R}$-valued functions defined on an arbitrary topological space X is an algebra over the field $\mathbb{R}$ of real numbers. A subalgebra of $C(X)$ is any nonempty subset closed under addition and multiplication of functions and under multiplication by constants from $\mathbb{R}$. Similarly, we call a nonempty subset $A \subseteq \mathbb{R}_+^\vee[x]$ a subalgebra of $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ if $f \vee g, fg, rf \in A$ for any $f, g \in A$ and $r \in \mathbb{R}_+^\vee$. It is proved that an arbitrary automorphism of the lattice of subalgebras of $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ is induced by some automorphism of $\mathbb{R}_+^\vee[x]$. The same result also holds for the lattice of subalgebras with unity of the semiring $\mathbb{R}_+^\vee[x]$. The technique of one-generated subalgebras is applied.

Keywords: semiring of polynomials, lattice of subalgebras, automorphism, max-addition.

MSC: 06B05, 16S60, 54H99

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-171-186

1. Введение

Исходные понятия. *Полукольцом* называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$, где $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа и умножение дистрибутивно относительно сложения. Если существуют нейтральные элементы по сложению и умножению, то они называются *нулем* и *единицей* и обозначаются через 0 и 1. При наличии нуля дополнительно требуется, чтобы $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ для всех $a \in S$. Полукольцо S с нулем и единицей, отличное от кольца, называется *полуполем с нулем*, если $\langle S\backslash\{0\}, \cdot\rangle$ — коммутативная группа.

Множества $\mathbb{R}_+$ неотрицательных действительных чисел и многочленов $\mathbb{R}_+[x]$ с обычными операциями сложения и умножения образуют полуполе с нулем и полукольцо соответственно.

Для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$ положим $a \vee b = \max\{a, b\}$. Заменив в $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_+[x]$ обычное сложение на max-сложение $\vee$, получим полуполе с нулем $\mathbb{R}_+^\vee$ и полукольцо многочленов $\mathbb{R}_+^\vee[x]$.

Множество непрерывных $\mathbb{R}_+^\vee$-значных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, с поточечными операциями max-сложения и умножения функций образует полукольцо, которое обозначается через $C^\vee(X)$. Кольцо $C(X)$ непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на X является алгеброй над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Подалгеброй кольца $C(X)$ будет любое его непустое подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения функций и выдерживающее умножение на константы из $\mathbb{R}$. По аналогии непустое подмножество A полукольца $C^\vee(X)$ или $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ назовем его *подалгеброй*, если $f \vee g, fg, rf \in A$ для всех $f, g \in A$ и $r \in \mathbb{R}_+^\vee$. Таким образом, мы будем употреблять термин «подалгебра» в более широком смысле, нежели кольцо, одновременно являющееся векторным пространством.

Важнейшим примером подалгебры служит наименьшая подалгебра, которая содержит произвольный элемент f. Она называется *однопорожденной* и обозначается через $\langle f \rangle$. Наименьшая подалгебра с единицей, которая содержит элемент f, называется *однопорожденной подалгеброй с единицей* и обозначается через $[f]$.

Для произвольной подалгебры A обозначим через $\mathbb{A}(A)$ *решетку подалгебр, включенных в* A и упорядоченных по включению (под $\subset$ будем понимать строгое включение). Если $1 \in A$, то через $\mathbb{A}_1(A)$ обозначим *решетку подалгебр с единицей, включенных в* A.

Замечание 1. Легко видеть, что точная нижняя грань произвольного непустого семейства подалгебр $\{A_i\}_{i \in I}$ равна их пересечению $\bigcap_{i \in I} A_i$, а точная верхняя грань состоит из конечных max-сумм произведений вида $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$, где $f_1, \ldots, f_n \in \bigcup_{i \in I} A_i$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда, в частности, получаем, что решетки $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ — *полные,* т. е. любое непустое подмножество их элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани.

Мотивировка и основные результаты. В теории колец $C(X)$ интересен вопрос о том, насколько топологическое пространство X или отдельные его свойства определяются теми или иными алгебраическими свойствами кольца $C(X)$ и других связанных с ним алгебраических систем. Сюда же относится *задача определяемости топологических пространств.*

Пусть каждому топологическому пространству X поставлена в соответствие каким-либо образом алгебраическая структура $A(X)$. Это соответствие подразумевается инвариантным, т. е. гомеоморфным пространствам соответствуют изоморфные структуры. Ситуацию, когда верно обратное, описывает следующее определение. Говорят, что *топологическое пространство* $X \in K$ *определяется* (однозначно с точностью до гомеоморфизма) в классе K топологических пространств алгебраической структурой $A(X)$, если для произвольного топологического пространства $Y \in K$ изоморфизм $A(Y) \cong A(X)$ влечет гомеоморфизм $Y \approx X$. Понятие *определяемости алгебраической структуры* $A(X)$ в классе K топологических пространств производной алгебраической структурой $A'(X)$ вводится аналогичным образом.

В 1939 г. И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров доказали одну из первых теорем определяемости топологических пространств (см. [1, теорема 2]): произвольный компакт X определяется кольцом $C(X)$. Этот результат послужил образцом для различных обобщений и углублений как в сторону расширения класса определяемых пространств с класса компактов, так и в сторону ослабления структуры $C(X)$ и привлечения новых объектов $A(X)$. Так, в 1948 г. Э. Хьюитт установил (см. [2, теорема 57]) определяемость кольцом $C(X)$ произвольного действительного-компактного (называемого часто хьюиттовским) пространства X, а в 1997 г. Е. М. Вечтомов доказал (см. [3, теорема 1]) определяемость X решеткой $\mathbb{A}(C(X))$ подалгебр кольца $C(X)$, что является усилением результата Хьюитта, так как изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$ влечет изоморфизм решеток их подалгебр. Отсюда следует (см. [3, теорема 2]), что для любого топологического пространства X кольцо $C(X)$ определяется решеткой $\mathbb{A}(C(X))$.

При исследовании полуколец $C^\vee(X)$ большое внимание уделяется методам и результатам, которые удается перенести из теории колец $C(X)$, в том числе связанным с определяемостью. В 2019 г. мы перенесли (см. [4, теоремы 1 и 2]) перечисленные выше результаты на случай полукольца $C^\vee(X)$ и решеток его подалгебр $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$. В частности, мы доказали, что для любых топологических пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(C^\vee(Y))$ или их подрешеток $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^\vee(Y))$ влечет изоморфизм полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$.

Ключевую роль в рассуждениях играет *техника однопорожденных подалгебр*, суть которой заключается в том, что многие свойства произвольной подалгебры удается описать в терминах решеточных свойств однопорожденных подалгебр, точной верхней гранью которых она является. В основе данной техники лежит следующий факт (см. [4, предложение 3]): однопорожденные подалгебры полукольца $C^\vee(X)$ описываются в терминах свойств решетки $\mathbb{A}(C^\vee(X))$. Поэтому если α — изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(C^\vee(Y))$, то образом произвольной однопорожденной подалгебры $\langle f\rangle$ служит некоторая подалгебра $\langle g\rangle$. Ясно, что ограничение α на решетку $\mathbb{A}(\langle f\rangle)$ подалгебр, включенных в $\langle f\rangle$, будет изоморфизмом решеток $\mathbb{A}(\langle f\rangle)$ и $\mathbb{A}(\langle g\rangle)$. Факт изоморфности этих решеток накладывает ограничение на сами подалгебры $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$. Это наблюдение может быть использовано при описании изоморфизмов α, так как они однозначно задаются образами однопорожденных подалгебр. Приходим к задаче описания изоморфизмов решеток $\mathbb{A}(\langle f\rangle)$ и $\mathbb{A}(\langle g\rangle)$, решение которой естественно начать с описания автоморфизмов решетки $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ подалгебр полукольца многочленов $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ от формальной переменной x, так как функции подалгебры $\langle f\rangle$ записываются многочленами полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[f]$. Аналогично задача описания изоморфизмов решеток $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^\vee(Y))$ приводит к задаче описания автоморфизмов решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Эти задачи интересны и вне описанного нами контекста.

Цель настоящей работы — описать автоморфизмы полукольца многочленов $\mathbb{R}_+^\vee[x]$, а также решеток его подалгебр $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$.

Ранее в работе [5] было установлено, что автоморфизмы решеток подалгебр $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+[x])$ полукольца многочленов $\mathbb{R}_+[x]$ индуцируются автоморфизмами самого полукольца, которые, в свою очередь, получаются заменами вида $x\mapsto ax$, $a>0$. Поскольку операции обычного сложения и max-сложения многочленов существенно различаются, случай полукольца многочленов $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ разбирается принципиально иным способом.

Приступим к формулировке основных результатов работы.

Легко видеть, что для любых положительных чисел a и s правило $\psi_{a,s}$, где

$$\psi_{a,s}\colon a_0\vee a_1x\vee\ldots\vee a_nx^n\mapsto a_0^s\vee a_1^s(ax)\vee\ldots\vee a_n^s(ax)^n,$$

задает автоморфизм полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$. Более того, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Автоморфизмы полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ — это в точности автоморфизмы $\psi_{a,s}$.*

Выясним, как связаны между собой автоморфизмы полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ и автоморфизмы решеток его подалгебр $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$.

Лемма 1. *Произвольный автоморфизм $\psi_{a,s}$ полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ индуцирует автоморфизмы решеток его подалгебр $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$.*

Доказательство. Для произвольных $f,g,r\in\mathbb{R}_+^\vee[x]$ и $A,B\subseteq\mathbb{R}_+^\vee[x]$ обозначим через f',g',r' и A',B' соответственно их образы при автоморфизме $\psi_{a,s}$. Заметим, что условия $r\in\mathbb{R}_+^\vee$ и $r'\in\mathbb{R}_+^\vee$ равносильны, так как $\psi_{a,s}(\mathbb{R}_+^\vee)=\mathbb{R}_+^\vee$. Поэтому

$$r'f'\in A' \text{ для любых } f'\in A', r'\in\mathbb{R}_+^\vee \iff rf'\in A' \text{ для любых } f'\in A, r\in\mathbb{R}_+^\vee.$$

Отсюда и из того, что $\psi_{a,s}$ — автоморфизм полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$, получаем

$$f\vee g, fg, rf\in A \text{ для всех } f,g\in A, r\in\mathbb{R}_+^\vee \iff f'\vee g', f'g', rf'\in A' \text{ для всех } f',g'\in A', r\in\mathbb{R}_+^\vee.$$

Поэтому подмножество A полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ является его подалгеброй тогда и только тогда, когда подалгеброй служит его образ A'. Кроме того, включения $A\subset B$ и $A'\subset B'$ равносильны, так как $\psi_{a,s}$ является преобразованием полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$. Следовательно, автоморфизм $\psi_{a,s}$ полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ индуцирует автоморфизм решетки его подалгебр $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$, а значит, и ее подрешетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$, поскольку $\psi_{a,s}(1)=1$. □

Итак, произвольный автоморфизм $\psi_{a,s}$ полукольца индуцирует автоморфизмы решеток его подалгебр $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$, которые обозначим через $\alpha_{\psi_{a,s}}$ и $\alpha_{1,\psi_{a,s}}$ соответственно.

Следующая теорема является центральным результатом работы.

Теорема 2. *Автоморфизмы решеток подалгебр* $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ *и* $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ — *это в точности автоморфизмы* $\alpha_{\psi_{a,s}}$ *и* $\alpha_{1,\psi_{a,s}}$ *соответственно.*

Перейдем к доказательству теорем 1 и 2.

2. Доказательство теоремы 1

Произвольное соответствие $\psi_{a,s}$ задает автоморфизм полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$. Покажем, что для любого автоморфизма ψ полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ найдутся такие $a, s > 0$, что $\psi = \psi_{a,s}$.

Докажем, что существует такое $s > 0$, что

$$\psi(a) = a^s \text{ для всех } a \in \mathbb{R}_+^\vee. \tag{2.1}$$

Заметим, что $\psi(0)\psi(f) = \psi(0 \cdot f) = \psi(0)$ и $\psi(1)\psi(f) = \psi(1 \cdot f) = \psi(f)$ для всех $f \in \mathbb{R}_+^\vee[x]$, Отсюда $\psi(0) = 0$ и $\psi(1) = 1$. Следовательно, $\psi(a)\psi(1/a) = \psi(a \cdot 1/a) = \psi(1) = 1$ для любого ненулевого $a \in \mathbb{R}_+^\vee$. Поэтому $\psi(a) \in \mathbb{R}_+^\vee$. Аналогично $\psi^{-1}(a) \in \mathbb{R}_+^\vee$. Значит, $\psi(\mathbb{R}_+^\vee) = \mathbb{R}_+^\vee$.

Далее, автоморфизм ψ сохраняет порядок на $\mathbb{R}_+^\vee$, так как

$$a \geq b \Longleftrightarrow a \vee b = a \Longleftrightarrow \psi(a) \vee \psi(b) = \psi(a) \Longleftrightarrow \psi(a) \geq \psi(b) \text{ для любых } a, b \in \mathbb{R}_+^\vee. \tag{2.2}$$

Кроме того, $\psi(0) = 0$ и $\psi(1) = 1$. Следовательно, $\psi([0,1]) = [0,1]$, где $[0,1]$ — единичный отрезок.

Выберем произвольное c, $1 > c > 0$. Тогда $1 > \psi(c) > 0$, т. е. $\psi(c) = c^s$ для некоторого $s > 0$. Заметим: для любых $i \in \mathbb{N}$ и a, $1 > a > 0$, найдется такое $n_i \in \mathbb{N}_0$, что $c^{1+n_i} < a^i \leq c^{n_i}$ или (это равносильно) $0 \leq \log_c a - n_i/i < 1/i$. Обозначим через $n_i(c,a)$ показатель n_i. Тогда

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{n_i(c,a)}{i} = \log_c a. \tag{2.3}$$

Из (2.2), (2.3) и $\psi(c) = c^s$ находим, что $\psi(a) = a^s$, так как

$$\log_c a = \lim_{i\to+\infty} \frac{n_i(c,a)}{i} = \lim_{i\to+\infty} \frac{n_i(\psi(c),\psi(a))}{i} = \lim_{i\to+\infty} \frac{n_i(c^s,\psi(a))}{i} = \log_{c^s} \psi(a).$$

Наконец, если $a > 1$, то $1 > 1/a > 0$. Поэтому $\psi(1/a) = (1/a)^s$. Отсюда и из $\psi(1) = 1$ находим, что $\psi(a)/a^s = \psi(a)\psi(1/a) = \psi(1) = 1$. Значит, $\psi(a) = a^s$.

Поскольку $\psi(\mathbb{R}_+^\vee) = \mathbb{R}_+^\vee$, $\deg \psi(x) \geq 1$. Если $\deg \psi(x) \geq 2$ или $\psi(x)$ — многочлен со свободным членом, то $\deg \psi(f) \geq 2$ или $\psi(f)$ — многочлен со свободным членом для всех $f \in \mathbb{R}_+^\vee[x]$, $\deg f \geq 1$; противоречие с сюръективностью ψ. Следовательно, $\psi(x) = ax$ для некоторого $a > 0$. Отсюда и из (2.1) получаем, что для любого многочлена $f = a_0 \vee a_1 x \vee \ldots \vee a_n x^n \in \mathbb{R}_+^\vee[x]$

$$\psi(f) = \psi(a_0) \vee \psi(a_1)\psi(x) \vee \ldots \vee \psi(a_n)\psi(x^n) = a_0^s \vee a_1^s(ax) \vee \ldots \vee a_n^s(ax)^n.$$

Таким образом, $\psi = \psi_{a,s}$.

3. Доказательство теоремы 2: вспомогательные результаты

В данный раздел мы вынесли все необходимые для доказательства теоремы 2 результаты.

Однопорожденные подалгебры. Все элементы решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ являются подалгебрами с единицей. Поэтому при работе в решетке $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ однопорожденные подалгебры $[f]$ с единицей для краткости будем называть однопорожденными. Многочлены подалгебр $\langle f \rangle$ и $[f]$

будем записывать по возрастающим степеням f, а их коэффициенты обозначать символами a, b, c, d, e и r (часто с индексами). Легко видеть, что

$$\langle f\rangle = \{a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n \colon a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\vee, a_n > 0, n \in \mathbb{N}\},$$
$$[f] = \{a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n \colon a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\vee, a_n > 0, n \in \mathbb{N}_0\} = \langle f\rangle \vee \mathbb{R}_+^\vee.$$

Будем говорить, что в решетке имеется *решеточная характеризация некоторого свойства,* если данное свойство можно описать в терминах этой решетки.

Пример. Подалгебра $[x]$ имеет решеточную характеризацию в решетках $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$, а именно подалгебра $[x]$ — единица этих решеток.

Элемент решетки с нулем называется *атомом,* если меньше его лишь нулевой элемент.

Дадим решеточные характеризации подалгебры $\mathbb{R}_+^\vee$ в решетках $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$.

Лемма 2. $\mathbb{R}_+^\vee$ *— единственный атом решетки* $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ *и нуль решетки* $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$.

Доказательство. Подалгебра $\mathbb{R}_+^\vee$ — нуль решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и атом решетки $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$, так как для любой подалгебры A условия $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A$ и $\mathbb{R}_+^\vee \cap A \neq \{0\}$ равносильны.

Далее, пусть A — атом решетки $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$, т. е. A — минимальная подалгебра. Выберем ненулевой многочлен $f \in A$. Тогда $\langle f^2\rangle \subseteq A$, т. е. $A = \langle f^2\rangle$ в силу минимальности A. Поэтому $f \in \langle f^2\rangle$ и многочлен f имеет вид $a_1 f^2 \vee \ldots \vee a_n (f^2)^n$. Отсюда $1 = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^{2n-1} \in A$, т. е. $1 \in A$, так как $f \in A$. В этом случае $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A$. Следовательно, $A = \mathbb{R}_+^\vee$ в силу минимальности A. Значит, подалгебра $\mathbb{R}_+^\vee$ — единственный атом решетки $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. □

Элемент A полной решетки (см. замечание 1) называется *компактным,* если для любого непустого семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ ее элементов из $A \leq \bigvee_{i\in I} A_i$ получаем $A \leq \bigvee_{i\in J} A_i$ для некоторого конечного подмножества $J \subseteq I$. Элемент A решетки называется $\vee$*-неразложимым,* если из $A = B \vee C$ имеем $A = B$ или $A = C$.

Дадим решеточную характеризацию подалгебр $\langle f\rangle$ и $[f]$.

Лемма 3. *Подалгебры* $\langle f\rangle$ *и* $[f]$ *— это в точности* $\vee$*-неразложимые компактные элементы решеток* $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ *и* $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ *соответственно.*

Доказательство. Докажем решеточную характеризацию подалгебр $[f]$.

Пусть подалгебра $[f]$ такая, что $[f] \subseteq \bigvee_{i\in I} A_i$ для некоторого семейства подалгебр $\{A_i\}_{i\in I}$ с единицей. Тогда найдутся такие подалгебры $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m} \in \{A_i\}_{i\in I}$, $m \in \mathbb{N}$, и многочлены $f_1, \ldots, f_n \in A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m}$, $n \in \mathbb{N}$, что $f \in \mathbb{R}_+^\vee[f_1, \ldots, f_n]$. Значит, $[f] \subseteq A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_m}$, т. е. подалгебра $[f]$ компактна.

Допустим, $[f] = A \vee B$ для некоторых подалгебр $A, B \subset [f]$ с единицей. Поскольку $f \in A \vee B$, $f = u_1 v_1 \vee \ldots \vee u_n v_n$ для некоторых многочленов $u_1, \ldots, u_n \in A \cap \mathbb{R}_+^\vee[f]$ и $v_1, \ldots, v_n \in B \cap \mathbb{R}_+^\vee[f]$. Тогда $f = u_i v_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Отсюда $f = a u_i$ или $f = a v_i$ для некоторого $a > 0$, т. е. $[f] \subseteq A$ или $[f] \subseteq B$; противоречие с $A, B \subset [f]$. Следовательно, подалгебра $[f]$ $\vee$-неразложима.

Обратно, пусть подалгебра A — $\vee$-неразложимый компактный элемент решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Поскольку A компактна и $A = \bigvee_{f\in A}[f]$, $A = [f_1] \vee \ldots \vee [f_n]$ для некоторых многочленов $f_1, \ldots, f_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Не умаляя общности, будем считать, что n принимает наименьшее возможное значение. Если $n \geq 2$, то $A = [f_1] \vee ([f_2] \vee \ldots \vee [f_n])$. Поскольку A — $\vee$-неразложимый элемент, $A = [f_1]$ или $A = [f_2] \vee \ldots \vee [f_n]$; противоречие с выбором n. Значит, $n = 1$, т. е. $A = [f]$ для некоторого многочлена $f \in A$.

Решеточная характеризация подалгебр $\langle f\rangle$ доказывается аналогично. □

Замечание 2. Для устранения громоздкости текста работы в записи решеточной характеризации некоторых свойств будем использовать условия, которые сформулированы не в терминах решетки, но их решеточная характеризация была получена ранее. Без специальных ссылок на леммы 2, 3 и пример будем использовать существование в решетках $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и

$\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ решеточных характеризаций подалгебр $[x]$, $\mathbb{R}_+^\vee$ и однопорожденных подалгебр. Обороты "существует решеточная характеризация" и "решеточная характеризация" часто будем сокращать до "с. р. х." и "р. х." соответственно.

Решим вопрос о равенстве однопорожденных подалгебр.

Лемма 4. *Для любых многочленов $f, g \in \mathbb{R}_+^\vee[x]$ справедливы следующие утверждения:*
1) $\langle f\rangle = \langle g\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $f = g = 0$ *или* $f = rg$ *для некоторого* $r > 0$;
2) $[f] = [g]$ *тогда и только тогда, когда* $f, g \in \mathbb{R}_+^\vee$ *или* $f = rg$ *для некоторого* $r > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если подалгебры $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ — нулевые, то $f = g = 0$. Пусть подалгебры $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ равны и ненулевые. Тогда $f = u(g)$ и $g = v(f)$ для некоторых многочленов $u \in \mathbb{R}_+^\vee[g]$ и $v \in \mathbb{R}_+^\vee[f]$ не ниже первой степени. Отсюда $f = (u \circ v)(f)$, т. е. u и v — одночлены первой степени. Значит, $f = rg$ для некоторого $r > 0$. Обратное утверждение очевидно.

Утверждение 2) доказывается аналогично. □

З а м е ч а н и е 3. До конца раздела будем работать в решетке $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Подалгебры с единицей для краткости будем называть подалгебрами.

Лемма 5. *Для любой подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$ и любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^\vee$ имеем*

$$[r_2 \vee f] \subset [r_1 \vee f] \Longleftrightarrow r_2 > r_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $r_2 > r_1$, то $r_2 \vee f = r_2 \vee (r_1 \vee f) \in [r_1 \vee f]$. Поэтому $[r_2 \vee f] \subseteq [r_1 \vee f]$. Кроме того, $[r_2 \vee f] \neq [r_1 \vee f]$ по лемме 4. Значит, $[r_2 \vee f] \subset [r_1 \vee f]$.

Необходимость следует из достаточности. □

Характеристики $\operatorname{Supp} f$, $\operatorname{mindeg} f$, $\deg f$ **и** $\operatorname{lp} f$. Для произвольного многочлена

$$f = a_{i_1}x^{i_1} \vee \ldots \vee a_{i_n}x^{i_n},\ a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} > 0,\ i_n > \ldots > i_1 \geq 0,\ n \in \mathbb{N},$$

числа i_1, i_n, n и множество $\{i_1, \ldots, i_n\}$ обозначим через $\operatorname{mindeg} f$, $\deg f$, $\operatorname{lp} f$ и $\operatorname{Supp} f$ соответственно. Для $f = 0$ положим $\operatorname{Supp} f = \{0\}$, $\operatorname{mindeg} f = \deg f = 0$ и $\operatorname{lp} f = 1$. Например, если $f = 1 \vee x^3$, то $\operatorname{Supp} f = \{0, 3\}$, $\operatorname{mindeg} f = 0$, $\deg f = 3$ и $\operatorname{lp} f = 2$.

З а м е ч а н и е 4. В силу леммы 4 характеристики $\operatorname{mindeg} f$, $\deg f$, $\operatorname{lp} f$ и $\operatorname{Supp} f$ не зависят от выбора многочлена f, задающего подалгебру $[f]$.

Дадим р. х. $\operatorname{mindeg} f$, $\deg f$, $\operatorname{lp} f$ и $\operatorname{Supp} f$ для произвольной подалгебры $[f]$. Попутно получим и другие необходимые для доказательства теоремы 2 утверждения.

Лемма 6. *Для произвольных подалгебр $[f]$ и $[g]$, где $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$ и $[f] \subset [g]$, справедливы следующие утверждения:*
1) *если* $\operatorname{mindeg} g = 0$, *то* $\operatorname{mindeg} f = 0$;
2) $\deg f \geq \deg g$;
3) *если* $\operatorname{mindeg} f \geq 1$, *то* $\deg f \geq 2 \deg g$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$ и $[f] \subset [g]$, многочлен f имеет вид

$$f = a_0 \vee a_1 g \vee \ldots \vee a_n g^n,\ a_n > 0,\ n \geq 1.$$

Отсюда $\deg f \geq \deg g$. Кроме того, если $\operatorname{mindeg} g = 0$, то $\operatorname{mindeg} a_n g^n = 0$. Значит, $\operatorname{mindeg} f = 0$.

Далее, $[g] \neq \mathbb{R}_+^\vee$, так как $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$ и $[f] \subset [g]$. Следовательно, $\deg g \geq 1$. Если $\operatorname{mindeg} f \geq 1$, то $a_0 = 0$ и, как было доказано ранее, $\operatorname{mindeg} g \geq 1$. Кроме того, $n \geq 2$, так как в противном случае, $[f] = [g]$. Значит, $\deg f = \deg a_n g^n = n \deg g \geq 2 \deg g$. □

Доказательство следующей леммы опирается на лемму 6.

Лемма 7. *Для любой подалгебры $[f]$ с. р. х равенства* $\operatorname{mindeg} f = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $[f] = \mathbb{R}_+^\vee$, то $\operatorname{mindeg} f = 0$.

Пусть $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$. Докажем, что $\operatorname{mindeg} f = 0$ тогда и только тогда, когда

$$[f] \subset \ldots \subset [f_{i+1}] \subset [f_i] \subset \ldots \subset [f_1] \text{ для некоторого семейства подалгебр } \{[f_i]\}_{i\in\mathbb{N}}. \tag{3.1}$$

Допустим, $\operatorname{mindeg} f = 0$. Поскольку $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$, многочлен f имеет вид

$$f = a_0 \vee a_1x \vee \ldots \vee a_nx^n,\ a_0, a_n > 0,\ n \geq 1.$$

Положим $f_i = ((1-1/i)a_0) \vee a_1x \vee \ldots \vee a_nx^n,\ i \in \mathbb{N}$. Тогда по лемме 5 условие (3.1) выполняется.

Обратно, пусть условие (3.1) выполняется. Если $\operatorname{mindeg} f_i \geq 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то по лемме 6

$$\deg f \geq \deg f_{i+1},\ \deg f_{i+1} \geq 2\deg f_i,\ \deg f_i \geq 2\deg f_{i-1}, \ldots, \deg f_2 \geq 2\deg f_1 \geq 2.$$

Отсюда $\deg f \geq 2^{i-1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$; противоречие. Следовательно, $\operatorname{mindeg} f_i = 0$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Значит, $\operatorname{mindeg} f = 0$ по лемме 6, так как $[f] \subset [f_i]$. □

Лемма 8. *С. р. х. подалгебр* $[a_0 \vee x], a_0 > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 7 с. р. х множества подалгебр

$$M = \{[f]\colon [f] \neq \mathbb{R}_+^\vee,\ \operatorname{mindeg} f = 0\}.$$

Рассмотрим подалгебру $[x]$ — единицу решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Для любой подалгебры $[f] \in M$

$$\deg f \geq 2 \Longleftrightarrow [f] \subset [g] \subset [x] \text{ для некоторой подалгебры } [g] \notin M \cup \{\mathbb{R}_+^\vee\}.$$

Действительно, пусть $[f] \in M$ и $\deg f \geq 2$. Тогда многочлен f имеет вид

$$f = a_0 \vee a_1x \vee \ldots \vee a_nx^n,\ a_0, a_n > 0, n \geq 2.$$

Положим $g = a_1x \vee \ldots \vee a_nx^n$. Тогда $[g] \notin M \cup \{\mathbb{R}_+^\vee\}$, так как $\operatorname{mindeg} g \geq 1$. Кроме того, $[f] \subset [g] \subset [x]$, поскольку $f = a_0 \vee g \in [g]$, $g \in [x]$ и $[f] \neq [g] \neq [x]$ по лемме 4.

Обратно, пусть $[f] \subset [g] \subset [x]$ для некоторой подалгебры $[g] \notin M \cup \{\mathbb{R}_+^\vee\}$, в частности $\operatorname{mindeg} g \geq 1$. Значит, $\deg f \geq \deg g \geq 2$ по лемме 6.

Итак, с. р. х. множества подалгебр $N = \{[f] \in M\colon \deg f \geq 2\}$. Остается заметить, что

$$M \backslash N = \{[a_0 \vee a_1x]\colon a_0, a_1 > 0\} = \{[a_0 \vee x]\colon a_0 > 0\}.$$ □

З а м е ч а н и е 5. Для любой подалгебры $[f] \subseteq \mathbb{R}_+^\vee[x]$ решетка $\mathbb{A}_1([f])$ является подрешеткой решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. В силу леммы 2 для любой подалгебры $[f]$ решетка $\mathbb{A}_1([f])$ имеет р. х. в решетке $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Кроме того, если $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$, то правило $x \mapsto f$ задает изоморфизм полуколец $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ и $\mathbb{R}_+^\vee[f]$, который индуцирует изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[f])$.

Из леммы 8 и замечания 5 получаем

Следствие 1. *Для любой подалгебры* $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$ *с. р. х. подалгебр* $[a_0 \vee f], a_0 > 0$, *в решетке* $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[f])$, *а значит, и в решетке* $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$.

Лемма 9. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *с. р. х. подалгебр* $[a_0 \vee a_1x \vee \ldots \vee a_nx^n]$, *где* $a_0, a_n > 0$ *и* $n \geq 1$;

2) *для любой подалгебры* $[a_0 \vee a_1x \vee \ldots \vee a_nx^n]$, *где* $a_0, a_n > 0$ *и* $n \geq 1$, *с. р. х. подалгебры* $[a_1x \vee \ldots \vee a_nx^n]$.

Доказательство. 1) Искомыми являются подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$, $\operatorname{mindeg} f = 0$, которые имеют р. х. по лемме 7.

2) Пусть дана подалгебра $[f]$, где $f = a_0 \vee a_1 x \vee \ldots \vee a_n x^n$ и $a_0, a_n > 0, n \geq 1$. По лемме 7 с. р. х. множества подалгебр $M = \{[g]\colon \operatorname{mindeg} g \geq 1\}$. Для произвольной подалгебры $[g] \in M$ по следствию 1 с. р. х. множества подалгебр $N_{[g]} = \{[b_0 \vee g]\colon b_0 > 0\}$. Тогда по лемме 4

$$\begin{aligned}
&[f] \in N_{[g]} \text{ для некоторой подалгебры } [g] \in M \iff \\
&\qquad a_0 \vee a_1 x \vee \ldots \vee a_n x^n = r(b_0 \vee g) \text{ для некоторых } r, b_0 > 0 \iff \\
&\qquad\qquad a_1 x \vee \ldots \vee a_n x^n = rg \text{ для некоторого } r > 0 \iff [a_1 x \vee \ldots \vee a_n x^n] = [g].
\end{aligned}$$

Значит, для подалгебры $[f]$ искомой будет такая подалгебра $[g] \in M$, что $[f] \in N_{[g]}$. □

Лемма 10. *Для любой подалгебры* $[f], \operatorname{mindeg} f \geq 1$, *равносильны следующие условия*:
1) $\operatorname{lp} f \geq 2$;
2) *для любой подалгебры* $[a_0 \vee f], a_0 > 0$, *существуют такие подалгебры* $[g]$ *и* $[h]$, *что*

$$[g], [h] \neq \mathbb{R}_+^\vee,\ \operatorname{mindeg} g = \operatorname{mindeg} h = 0,\ [r \vee f] \subseteq [g] \vee [h],\ [r \vee f] \nsubseteq [g], [h]. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{lp} f \geq 2$. Многочлен f имеет вид

$$f = a_m x^m \vee \ldots \vee a_n x^n,\ a_m, a_n > 0, n > m \geq 1,$$

так как по условию $\operatorname{mindeg} f \geq 1$. Для произвольного $a_0 > 0$ положим

$$g = a_0 \vee a_m x^m \vee \ldots \vee \frac{a_n}{2} \cdot x^n, \quad h = a_0 \vee a_n x^n.$$

Тогда $[g], [h] \neq \mathbb{R}_+^\vee$, $\operatorname{mindeg} g = \operatorname{mindeg} h = 0$ и $[a_0 \vee f] \subseteq [g] \vee [h]$, так как $a_0 \vee f = g \vee h$.

Допустим, $[a_0 \vee f] \subseteq [g]$. Тогда $a_0 \vee f = b_0 \vee b_1 g$ для некоторых $b_0 \geq 0$ и $b_1 > 0$, поскольку $\deg(a_0 \vee f) = \deg g = n$. Исходя из этого $a_0 = b_0 \vee b_1 a_0$ и $a_n = (b_1 a_n)/2$, т. е. $b_1 \leq 1$ и $b_1 = 2$; противоречие. Следовательно, $[r \vee f] \nsubseteq [g]$.

Аналогично если $[a_0 \vee f] \subseteq [h]$, то $a_0 \vee f = c_0 \vee c_1 g$ для некоторых $c_0 \geq 0$ и $c_1 > 0$, так как $\deg(a_0 \vee f) = \deg h = n$. Поэтому $a_m = c_1 \cdot 0 = 0$; противоречие. Следовательно, $[r \vee f] \nsubseteq [h]$.

Обратно, пусть условие 2) выполняется, но $\operatorname{lp} f = 1$. Поскольку $\operatorname{mindeg} f \geq 1$, $f = a_n x^n$ для некоторых $a_n > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Для подалгебры $[1 \vee a_n x^n]$ рассмотрим подалгебры $[g]$ и $[h]$, для которых выполняется условие (3.2). Заметим, что $\operatorname{lp} g, \operatorname{lp} h \geq 2$, так как $[g], [h] \neq \mathbb{R}_+^\vee$ и $\operatorname{mindeg} g = \operatorname{mindeg} h = 0$. Поэтому $\operatorname{lp} g^i h^j \geq 3$ для любых $i, j \in \mathbb{N}_0$, $i + j \geq 2$. Кроме того, $\operatorname{lp}(1 \vee a_n x^n) = 2$ и $[1 \vee a_n x^n] \subseteq [g] \vee [h]$. Значит, $1 \vee a_n x^n = a \vee bg \vee ch$ для некоторых $a, b, c \geq 0$, причем $b, c > 0$, так как $[1 \vee a_n x^n] \nsubseteq [g], [h]$ согласно (3.2). Отсюда и из $\operatorname{lp} g, \operatorname{lp} h \geq 2$ находим, что $g = b_0 \vee b_n x^n$ и $h = c_0 \vee c_n x^n$ для некоторых $b_0, b_n, c_0, c_n > 0$. Следовательно, $1 = a \vee bb_0 \vee cc_0$ и $a_n = bb_n \vee cc_n$. Не умаляя общности, будем считать, что $a_n = bb_n$.

Если $a_n b_0 / b_n \leq 1$, то $[1 \vee a_n x^n] \subseteq [g]$, так как $1 \vee a_n x^n = 1 \vee a_n g / b_n \in [g]$; противоречие с $[1 \vee a_n x^n] \nsubseteq [g]$. Поэтому $a_n b_0 / b_n > 1$. Отсюда и из $a_n = bb_n$ находим, что $bb_0 > 1$, что противоречит $1 = a \vee bb_0 \vee cc_0$. Значит, $\operatorname{lp} f \geq 2$. □

Лемма 11. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *с. р. х. подалгебры* $[x^n]$, *а значит, для любой подалгебры* $[f]$ *с. р. х. условий* $\operatorname{lp} f = 1$ *и* $\operatorname{lp} f \geq 2$.

Доказательство. По лемме 10 с. р. х. множества подалгебр

$$M = \{[f]\colon [f] \neq \operatorname{mindeg} f \geq 1, \operatorname{lp} f = 1\} = \{[x^n]\colon n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Дадим р. х. подалгебры $[x^2]$, а именно докажем, что для любой подалгебры $[f] \in M \backslash \{[x]\}$ равносильны следующие условия:

1.1) $[f] = [x^2]$;

1.2) $[g] \subseteq [f] \vee [h]$ или $[h] \subseteq [f] \vee [g]$ для любых подалгебр $[g], [h] \in M \backslash \{[x], [f]\}$.

Пусть $[f] = [x^2]$ и $[g], [h] \in M \backslash \{[x], [f]\}$. Тогда $[g] = [x^m]$ и $[h] = [x^n]$ для некоторых $m, n \geq 3$.

Если $m = 2k$ или $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то $[g] \subseteq [f] \vee [h]$ или $[h] \subseteq [f] \vee [g]$, так как $[g] = \big[(x^2)^k\big]$ или $[h] = \big[(x^2)^k\big]$ соответственно.

Пусть m, n — нечетные. Если $m \geq n$, то $[g] \subseteq [f] \vee [h]$, в связи с тем что $x^m = x^n \cdot (x^2)^{(m-n)/2}$. Аналогично если $n \geq m$, то $[h] \subseteq [f] \vee [g]$, так как $x^n = x^m \cdot (x^2)^{(n-m)/2}$.

Обратно, пусть условие 1.2) выполняется, но $[f] \neq [x^2]$. Тогда $[f] = [x^m]$ для некоторого $m \geq 3$, так как $[f] \in M \backslash \{[x]\}$. Положим $[g] = [x^{m+2}]$ и $[h] = [x^{m+4}]$.

Если $[g] \subseteq [f] \vee [h]$, то $x^{m+2} = (x^m)^i (x^{m+4})^j$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}_0$ или, что равносильно, $m + 2 = im + j(m + 4)$; противоречие с $m \geq 3$. Следовательно, $[g] \nsubseteq [f] \vee [h]$. Аналогично $[h] \nsubseteq [f] \vee [g]$; противоречие с условием 1.2). Значит, $[f] = [x^2]$.

2. Дадим р. х. множества подалгебр $P = \{[x^p] \colon p\text{ — простое}\}$, а именно докажем, что для произвольной подалгебры $[x^m] \in M \backslash \{[x]\}$ показатель m — составное число тогда и только тогда, когда $[x^m] \subset [x^n]$ для некоторой подалгебры $[x^n] \in M \backslash \{[x], [x^m]\}$.

Если $m = nk$, где $n, k \geq 2$, то $[x^m] \subset [x^n]$, так как $[x^m] \neq [x^n]$ по лемме 4 и $x^m = (x^n)^k$.

Обратно, если $[x^m] \subset [x^n]$ для некоторой подалгебры $[x^n] \in M \backslash \{[x], [x^m]\}$, то $n \geq 2$ и $x^m = (x^n)^k$ для некоторого $k \geq 2$. Отсюда $m = nk$, где и $n, k \geq 2$. Значит, m — составное.

3. Для произвольных различных подалгебр $[x^{p_1}], [x^{p_2}] \in P \backslash \{[x^2]\}$ дадим р. х. неравенства $p_1 > p_2$, а именно докажем, что $p_1 > p_2$ равносильно $[x^{p_1}] \subseteq [x^{p_2}] \vee [x^2]$.

Если $[x^{p_1}] \subseteq [x^{p_2}] \vee [x^2]$, то $x^{p_1} = (x^{p_2})^i (x^2)^j$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}_0$. Отсюда $p_1 = ip_2 + 2j$, причем $i \geq 1$, так как p_1, p_2 — нечетные. Значит, $p_1 > p_2$.

Обратное утверждение следует из доказанного.

4. Из пп. 1–3 находим, что простые показатели p подалгебр $[x^p] \in P$ можно решеточно упорядочить, а значит, для любого простого p с. р. х. подалгебры $[x^p]$. Отсюда и из замечания 5 получаем, что для любой подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}_+^\vee$ и любого простого p с. р. х. подалгебры $[f^p]$.

5. Пусть n — составное. Тогда $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ для некоторых простых $p_1, \ldots, p_k$, $k \geq 2$. Для подалгебр $[x]$, $[x^{p_1}], \ldots, \big[x^{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}}\big]$ и показателей $p_1, \ldots, p_k$ в силу п. 4 с. р. х. подалгебр $[x^{p_1}]$, $\big[(x^{p_1})^{p_2}\big] = [x^{p_1 p_2}], \ldots, \big[x^{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}\big] = [x^n]$ соответственно. Значит, с. р. х. подалгебры $[x^n]$. □

Лемма 12. *Для любой подалгебры* $[f]$ *с. р. х.* $\deg f$.

Доказательство. По лемме 11 с. р. х. равенства $\operatorname{lp} f = 1$, а также $\deg f$ в случае $\operatorname{lp} f = 1$. Поэтому достаточно разобрать случай $\operatorname{lp} f \geqslant 2$.

Докажем, что для подалгебры $[f], \operatorname{lp} f \geqslant 2$, равносильны следующие условия:

1) $\deg f = n$;

2) n — наибольшая такая степень, что для некоторой подалгебры $[g]$

$$[f] \subseteq [g] \vee [x^n], \ [f] \nsubseteq [g]. \tag{3.3}$$

Пусть $\deg f = n$. Поскольку $\operatorname{lp} f \geqslant 2$, многочлен f имеет вид

$$f = a_m x^m \vee \ldots \vee a_n x^n, \ a_m, a_n > 0, n > m \geq 0.$$

Положим $g = a_m x^m \vee \ldots \vee a_n/2 \cdot x^n$. Тогда $[f] \nsubseteq [g]$ и $[f] \subseteq [g] \vee [x^n]$, так как $f = g \vee a_n x^n$.

Далее, если $[f] \subseteq [g] \vee [x^m]$ и $[f] \nsubseteq [g]$ для некоторых подалгебр $[g]$ и $[x^m]$, $m \in \mathbb{N}$, то многочлен f имеет вид

$$f = a_{00} \vee a_{10} g \vee a_{01} x^m \vee \ldots \vee a_{kl} g^k (x^m)^l,$$

причем $a_{ij} > 0$ для некоторых $i \geq 0$ и $j \geq 1$, т. е. $n \geq i \deg g + jm \geq m$.

Обратно, пусть условие 2) выполняется. Тогда из (3.3), как было доказано выше, следует, что $\deg f \geq n$. Кроме того, $n \geqslant \deg f$, в связи с тем что если

$$f = a_m x^m \vee \ldots \vee a_k x^k,\ a_m, a_k > 0, k > m \geq 0,$$

то для $g = a_m x^m \vee \ldots a_k/2 \cdot x^k$ имеем $f = g \vee a^k x^k \in [g] \vee [x^k]$ и $[f] \nsubseteq [g]$. Значит, $\deg f = n$. □

Лемма 13. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *с. р. х. подалгебр* $[a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m \vee a_n x^n]$, *где* $a_m, a_n > 0$ *и* $n > m \geq 1$;

2) *для любой подалгебры* $[f] = [a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m \vee a_n x^n]$, *где* $a_m, a_n > 0$ *и* $n > m \geq 1$, *с. р. х. подалгебры* $[a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m]$.

Доказательство. 1) Искомыми будут подалгебры $[f]$, где $\operatorname{mindeg} f \geq 1$ и $\operatorname{lp} f \geq 2$, р. х. которых существует в силу лемм 7 и 10.

2) Пусть $[f] = [a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m \vee a_n x^n]$, где $a_m, a_n > 0$ и $n > m \geq 1$; в частности, $l \notin \operatorname{Supp} f$ для всех l, $n > l > m$. В силу лемм 7 и 12 для подалгебры $[f]$ с. р. х. подалгебры $[x^n]$ и множества подалгебр $M = \{[g] \colon n > \deg g \geq \operatorname{mindeg} g \geq 1\}$. Докажем, что для любой подалгебры $[g] \in M$ равносильны следующие условия:

1) $[g] = [a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m]$;

2) $[f] \subseteq [g] \vee [x^n]$ и $\deg g \geq \deg h$ для любой такой подалгебры $[h] \in M$, что $[f] \subseteq [h] \vee [x^n]$.

Если $[g] = [a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m]$, то $[g] \in M$ и $[f] \subseteq [g] \vee [x^n]$, так как $f = (a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m) \vee x^n$.

Допустим, $[f] \subseteq [h] \vee [x^n]$ для некоторой подалгебры $[h] \in M$. Тогда многочлен f имеет вид

$$f = b_1 h \vee \ldots \vee b_k h^k \vee b x^n,\ b_k, b > 0, k \geq 1, \tag{3.4}$$

так как $\operatorname{mindeg} f \geq 1$ и $\deg h^i (x^n)^j > n$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$.

Допустим, $\deg h > m$. Если $\operatorname{lp} h = 1$, то

$$\operatorname{mindeg}(b_1 h \vee \ldots \vee b_k h^k) \geq \operatorname{mindeg} h = \deg h > m \geq \operatorname{mindeg} f;$$

противоречие с (3.4). Значит, $\operatorname{lp} h \geq 2$.

Если $k = 1$, то $\deg h \in \operatorname{Supp} h \subseteq \operatorname{Supp} f$; противоречие с $n > \deg h > m$.

Если $k \geq 2$, то в силу (3.4), $\operatorname{mindeg} h \geq 1$ и $n > \deg h > m$ имеем

$$k \deg h = n, \quad \operatorname{mindeg} h + (k-1) \deg h \in \operatorname{Supp} b_k h^k \subseteq \operatorname{Supp}(b_1 h \vee \ldots \vee b_k h^k) \subseteq \operatorname{Supp} f;$$

противоречие с $n > \operatorname{mindeg} h + (k-1)\deg h > m$. Значит, $m \geq \deg h$ и условие 2) выполняется.

Обратно, пусть условие 2) выполняется. Положим $h = a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m$. Тогда $[h] \in M$ и $[f] \subseteq [h] \vee [x^n]$, так как $f = h \vee a_n x^n$. Отсюда $\deg g \geq m$. Кроме того, поскольку $[f] \subseteq [g] \vee [x^n]$, $\operatorname{mindeg} f \geq 1$ и $\deg g^i (x^n)^j > n$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$, многочлен f имеет вид

$$f = b_1 g \vee \ldots \vee b_k g^k \vee b x^n,\ b_k, b > 0, k \geq 1. \tag{3.5}$$

Если $k = 1$, то из $\deg g < n$ и (3.5) находим, что $b_1 > 0$ и $[g] = [b_1 g] = [a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m]$.

Допустим, $k \geq 2$. Если $\operatorname{lp} g \geq 2$, то в силу (3.5), $n > \deg g \geq m$ и $\operatorname{mindeg} g \geq 1$ получаем

$$k \deg g = n, \quad \operatorname{mindeg} g + (k-1) \deg g \in \operatorname{Supp} b_k g \subseteq \operatorname{Supp}(b_1 g \vee \ldots \vee b_k g^k) \subseteq \operatorname{Supp} f;$$

противоречие с $n > \operatorname{mindeg} g + (k-1)\deg g > m$. Значит, $\operatorname{lp} g = 1$. Поскольку $\operatorname{mindeg} g \geq 1$,

$$\operatorname{mindeg}(b_2 g^2 \vee \ldots \vee b_k g^k) \geq \operatorname{mindeg} g^2 > \operatorname{mindeg} g = \deg g \geq m.$$

Отсюда и из (3.5) находим, что $b_1 > 0$ и $[g] = [b_1 g] = [a_1 x \vee \ldots \vee a_m x^m]$. □

Лемма 14. *Для любой подалгебры* $[f]$ *с. р. х.* $\operatorname{Supp} f$ *и, следовательно,* $\operatorname{mindeg} f$ *и* $\operatorname{lp} f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $[f]=\mathbb{R}_+^\vee$ утверждение тривиально.
Пусть $[f]\neq\mathbb{R}_+^\vee$. Тогда многочлен f имеет вид

$$f=a_{i_1}x^{i_1}\vee\ldots\vee a_{i_n}x^{i_n},\ a_{i_1},\ldots,a_{i_n}>0,\ i_n>\ldots>i_1\geq 0,\ n\geq 1.$$

1. Если $\operatorname{mindeg} f\geq 1$ (см. лемму 7), то по лемме 13 для подалгебры $[f]$ с. р. х. подалгебр

$$[f_{n-1}]=\bigl[a_{i_1}x^{i_1}\vee\ldots\vee a_{i_{n-1}}x^{i_{n-1}}\bigr],\ldots,[f_{i_1}]=\bigl[a_{i_1}x^{i_1}\bigr].$$

Поскольку $\operatorname{Supp} f=\{\deg f,\deg f_{n-1},\ldots,\deg f_{i_1}\}$, по лемме 12 с. р. х. множества $\operatorname{Supp} f$.

2. Пусть $\operatorname{mindeg} f=0$. Тогда по лемме 9 для подалгебры $[f]$ с. р. х. подалгебры $[g]=\bigl[a_{i_1}x^{i_2}\vee\ldots\vee a_{i_n}x^{i_n}\bigr]$. Для подалгебры $[g]$ согласно п. 1 с. р. х. множество $\operatorname{Supp} g$. Значит, множество $\operatorname{Supp} f$ имеет р. х., так как $\operatorname{Supp} f=\{0\}\cup\operatorname{Supp} g$. □

Лемма 15. *Для любой подалгебры* $[f]\neq\mathbb{R}_+^\vee$ *и любого* $m\in\mathbb{Z}$, $m\geqslant -\operatorname{mindeg} f$, *с. р. х. подалгебры* $[fx^m]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\operatorname{lp} f=1$ утверждение верно по лемме 11. Пусть $\operatorname{lp} f\geqslant 2$.

1. Допустим, $m\geqslant 1+\deg f$ (см. лемму 12). Поскольку $[f]\neq\mathbb{R}_+^\vee$ и $m\geqslant 1+\deg f$,

$$\operatorname{mindeg} fx^m>\deg f,\ \operatorname{lp} f^i>\operatorname{lp} fx^m \text{ при } i\geq 2,\ \deg x^{jm}>\deg fx^m \text{ при } j\geq 2. \tag{3.6}$$

Докажем, что для произвольной подалгебры $[g]$ равенство $[g]=[fx^m]$ равносильно условию

$$\operatorname{Supp} g=\operatorname{Supp} fx^m,\quad [g]\subseteq[f]\vee[x^m],\quad [g]\nsubseteq[a_0\vee f]\vee[x^m] \text{ для всех } a_0>0, \tag{3.7}$$

которое является решеточным в силу лемм 1 и 14.

Допустим, $[g]=[fx^m]$, но условие (3.7) не выполняется. Тогда $[g]\subseteq[a_0\vee f]\vee[x^m]$ для некоторого $a_0>0$, так как $\operatorname{Supp} g=\operatorname{Supp} fx^m$ и $[g]\subseteq[f]\vee[x^m]$. Из (3.6) и $[fx^m]\subseteq[a_0\vee f]\vee[x^m]$ находим, что $fx^m=ax^m\vee b(a_0\vee f)x^m$ для некоторых $a\geq 0$ и $b>0$. Отсюда $f=a\vee b(a_0\vee f)$ или, что равносильно, $f\in\mathbb{R}_+^\vee$; противоречие с $[f]\neq\mathbb{R}_+^\vee$. Значит, условие (3.7) выполняется.

Обратно, пусть условие (3.7) выполняется. Вместе с (3.6) это означает, что $g=ax^m\vee bfx^m$ для некоторых $a\geq 0$ и $b>0$. Если $a>0$, то $[g]\subseteq[a/b\vee f]\vee[x^m]$, так как $g=b(a/b\vee f)x^m$; противоречие с условием (3.7). Отсюда, $a=0$, т. е. $[g]=[fx^m]$.

2. Пусть $m\geqslant -\operatorname{mindeg} f$. По лемме 14 с. р. х. множества подалгебр

$$M=\{[g]\colon\ \deg g=m+\deg f,\ \operatorname{lp} g\geqslant 2\}.$$

Остается заметить, что по лемме 4 для произвольной подалгебры $[g]$ равенство $[g]=[fx^m]$ равносильно равенству $\bigl[gx^{1+m+3\deg f}\bigr]=\bigl[fx^{1+2m+3\deg f}\bigr]$, которое имеет р. х. согласно п. 1, так как $1+m+3\deg f>1+\deg g=1+m+\deg f$ и $1+2m+3\deg f\geq 1+\deg f$. □

Запись $A_1,\ldots,A_m\xrightarrow{P_1,\ldots,P_n}B_1,\ldots,B_k$ будет означать, что для объектов $A_1,\ldots,A_m$ в силу утверждений $P_1,\ldots,P_n$ существует решеточная характеризация объектов $B_1,\ldots,B_k$. В качестве объектов будут выступать не только подалгебры, но и свойства подалгебр или функций.

Лемма 16. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *для любой подалгебры* $[f]=[a_0\vee a_1x\vee\ldots\vee a_mx^m\vee a_nx^n]$, *где* $a_n,a_m>0$ *и* $n>m\geq 0$, *с. р. х. подалгебр* $[a_0\vee a_1x\vee\ldots\vee a_mx^m]$ *и* $[a_mx^m\vee a_nx^n]$;

2) *для любых подалгебр* $[g]=[a_kx^k\vee\ldots\vee a_mx^m]$ *и* $[h]=[b_mx^m\vee b_nx^n]$, *где* $a_m,a_k,b_n,b_m>0$ *и* $n>m>k\geq 0$, *с. р. х. подалгебры* $[a_kx^k\vee\ldots\vee a_mx^m\vee a_m(b_n/b_m)x^n]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Положим $g=a_0\vee a_1x\vee\ldots\vee a_mx^m$. Тогда

$$[f]\xrightarrow{\text{лемма 15}}[fx]\xrightarrow{\text{лемма 13}}[gx]\xrightarrow{\text{лемма 15}}[(gx)x^{-1}]=[g].$$

Дадим р. х. подалгебры $[a_m x^m \vee a_n x^n]$. Пусть $\operatorname{Supp} f = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $i_k > \ldots > i_1 \geq 0$ и $k \geq 2$. Через $[f_{l,\ldots,k}]$, $1 \leq l \leq k-1$, обозначим подалгебру $[f_{l,\ldots,k}] = \big[a_{i_l} x^{i_l} \vee \ldots \vee a_{i_k} x^{i_k}\big]$. Для подалгебры $[f_{l,\ldots,k}]$ с. р. х. подалгебры $[f_{l+1,\ldots,k}]$, так как

$$[f_{l,\ldots,k}] \xrightarrow{\text{лемма 15}} \big[f x^{-i_l}\big] \xrightarrow{\text{лемма 13}} \big[f_{l+1,\ldots,k} x^{-i_l}\big] \xrightarrow{\text{лемма 15}} \big[\big(f_{l+1,\ldots,k} x^{-i_l}\big) x^{i_l}\big] = [f_{l+1,\ldots,k}]. \tag{3.8}$$

Значит,

$$[f] = [f_{1,\ldots,k}] \xrightarrow{(3.8)} [f_{2,\ldots,k}] \xrightarrow{(3.8)} \ldots \xrightarrow{(3.8)} [f_{k-1,k}] = [a_m x^m \vee a_n x^n].$$

2) По лемме 14 с. р. х. множества подалгебр

$$M = \Big\{[c_k x^k \vee \ldots \vee c_m x^m \vee c_n x^n]\colon c_n, c_m, c_k > 0,\ n > m > k \geq 0\Big\}.$$

По лемме 4 для подалгебр $[g]$, $[h]$ и любой подалгебры $[c_k x^k \vee \ldots \vee c_m x^m \vee c_n x^n] \in M$ с. р. х. равенств $[g] = [c_k x^k \vee \ldots \vee c_m x^m]$ и $[h] = [c_m x^m \vee c_n x^n]$. Остается заметить, что по лемме 4

$$\begin{cases} [c_k x^k \vee \ldots \vee c_m x^m] = [g], \\ [c_m x^m \vee c_n x^n] = [h] \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_k x^k \vee \ldots \vee c_m x^m = a(a_k x^k \vee \ldots \vee a_m x^m), \\ c_m x^m \vee c_n x^n = b(b_m x^m \vee b_n x^n) \end{cases} \text{для некоторых } a, b > 0 \Longleftrightarrow$$

$$c_k x^k \vee \ldots \vee c_m x^m \vee c_n x^n = a\left(a_k x^k \vee \ldots \vee a_m x^m \vee \frac{a_m b_n}{b_m} \cdot x^n\right) \text{ для некоторого } a > 0 \Longleftrightarrow$$

$$[c_k x^k \vee \ldots \vee c_m x^m \vee c_n x^n] = \left[a_k x^k \vee \ldots \vee a_m x^m \vee \frac{a_m b_n}{b_m} \cdot x^n\right].$$

□

Лемма 17. *Для любой подалгебры* $[r \vee x]$, $r > 0$, *и любого* $n \in \mathbb{N}$ *с. р. х. подалгебры* $[r^n \vee x^n]$.

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Пусть $n \geqslant 2$. В силу леммы 14 достаточно показать, что для произвольной подалгебры $[r' \vee x^n]$, $r' > 0$, равенство $r' = r^n$ выполняется тогда и только тогда, когда найдется такая подалгебра $[f]$, $\operatorname{Supp} f = \{1, \ldots, n-1\}$, что

$$[(r \vee x)^n x^{n+1}] \subseteq [(r' \vee x^n) x^{n+1}] \vee [f x^{n+1}]. \tag{3.9}$$

Допустим, $r' = r^n$. Положим $f = r^{n-1} x \vee \ldots \vee r x^{n-1}$. Тогда включение (3.9) верно, так как

$$(r \vee x)^n x^{n+1} = (r^n \vee r^{n-1} x \vee \ldots \vee r x^{n-1} \vee x^n) x^{n+1} = (r^n \vee x^n) x^{n+1} \vee f x^{n+1}.$$

Обратно, пусть условие (3.9) выполняется для некоторой подалгебры $[f]$, где

$$f = a_1 x \vee \ldots \vee a_n x^n,\ a_1, \ldots, a_n > 0.$$

Заметим, что

$$\deg \big((r' \vee x^n) x^{n+1}\big)^i \big(f x^{n+1}\big)^j > 2n + 1 \text{ для всех } i, j \in \mathbb{N}_0,\ i + j \geqslant 2.$$

Поэтому из (3.9) находим, что

$$(r \vee x)^n x^{n+1} = a(r' \vee x^n) x^{n+1} \vee b f x^{n+1} \text{ для некоторых } a, b > 0.$$

Следовательно,

$$r^n \vee r^{n-1} x \vee \ldots \vee r x^{n-1} \vee x^n = a(r' \vee x^n) \vee b(a_1 x \vee \ldots \vee a_{n-1} x^{n-1}).$$

Отсюда $a r' = r^n$ и $a = 1$. Значит, $r' = r^n$. □

Лемма 18. *Для любых подалгебр* $[a \vee x], [b \vee x]$, $b > a > 0$, *и любого* $s \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$[a \vee x], [b \vee x] \to [a^{1-s} b^s \vee x]. \tag{3.10}$$

Доказательство. Для $s = 0$ и $s = 1$ утверждение тривиально. Пусть $s \notin \{0, 1\}$.

Случай 1: $s = n/(n-1), n \geq 2$. Заметим, что

$$[a \vee x], [b \vee x] \xrightarrow{\text{леммы 15,17}} [(a \vee x)x^n] = [ax^n \vee x^{n+1}], [b^n \vee x^n],$$
$$[b^n \vee x^n] \xrightarrow{\text{следствие 1}} [r \vee x^n], r > b^n.$$

Кроме того, по лемме 14 с. р. х. множества подалгебр $M = \{[f] \colon \operatorname{Supp} f = \{n, n+1, 2n, 2n+1\}\}$. Значит, для произвольной подалгебры $[f] \in M$ следующее условие является решеточным:

$$[f] \subseteq [ax^n \vee x^{n+1}] \vee [b^n \vee x^n], \quad [f] \nsubseteq [ax^n \vee x^{n+1}] \vee [r \vee x^n] \text{ для всех } r > b^n. \tag{3.11}$$

Докажем, что с. р. х. равенства

$$[f] = \left[ab^n x^n \vee b^n x^{n+1} \vee ax^{2n} \vee x^{2n+1}\right], \tag{3.12}$$

а именно установим, что оно равносильно условию (3.11).

Пусть равенство (3.12) выполняется. Тогда $[f] \subseteq [ax^n \vee x^{n+1}] \vee [b^n \vee x^n]$, так как

$$ab^n x^n \vee b^n x^{n+1} \vee ax^{2n} \vee x^{2n+1} = (ax^n \vee x^{n+1})(b^n \vee x^n).$$

Допустим, что $[f] \subseteq [ax^n \vee x^{n+1}] \vee [r \vee x^n]$ для некоторого $r > b^n$. Заметим, что

$$\deg(ax^n \vee x^{n+1})^i > 2n + 1 \text{ для всех } i \geq 2, \ 0 \in \operatorname{Supp}(r \vee x^n)^j \text{ для всех } j \geq 1. \tag{3.13}$$

Поэтому для некоторых $c > 0$ и $d \geq 0$ имеем

$$ab^n x^n \vee b^n x^{n+1} \vee ax^{2n} \vee x^{2n+1} = c(ax^n \vee x^{n+1})(r \vee x^n) \vee d(ax^n \vee x^{n+1}).$$

Приравняв коэффициенты при x^{n+1} и x^{2n+1}, находим, что $b^n = cr \vee d$ и $c = 1$, т. е. $b^n = r \vee d$; противоречие с $r > b^n$. Значит, $[f] \nsubseteq [ax^n \vee x^{n+1}] \vee [r \vee x^n]$ для всех $r > b^n$.

Обратно, пусть условие (3.11) выполняется. Из $[f] \subseteq [ax^n \vee x^{n+1}] \vee [b^n \vee x^n]$, принимая во внимание $\operatorname{Supp} f = \{n, n+1, 2n, 2n+1\}$ и (3.13), получаем, что многочлен f имеет вид

$$f = c(ax^n \vee x^{n+1})(b^n \vee x^n) \vee d(ax^n \vee x^{n+1}), \ c > 0, \ d \geq 0.$$

Отсюда $f = c(ax^n \vee x^{n+1})(d/c \vee b^n \vee x^n)$. Если $d/c > b^n$, то $[f] \subseteq [ax^n \vee x^{n+1}] \vee [r \vee x^n]$, где $r = d/c > b^n$; противоречие с (3.11). Следовательно, $d/c \leq b^n$, т. е.

$$[f] = [c(ax^n \vee x^{n+1})(b^n \vee x^n)] = \left[ab^n x^n \vee b^n x^{n+1} \vee ax^{2n} \vee x^{2n+1}\right].$$

Итак, $[a \vee x], [b \vee x] \to \left[ab^n x^n \vee b^n x^{n+1} \vee ax^{2n} \vee x^{2n+1}\right]$. Кроме того,

$$[ab^n x^n \vee b^n x^{n+1} \vee ax^{2n} \vee x^{2n+1}] \xrightarrow{\text{лемма 16}} [ab^n x^n \vee b^n x^{n+1} \vee ax^{2n}] \xrightarrow{\text{лемма 16}}$$
$$[b^n x^{n+1} \vee ax^{2n}] \xrightarrow{\text{лемма 15}} \left[(b^n x^{n+1} \vee ax^{2n})x^{-(n+1)}\right] = [b^n \vee ax^{n-1}].$$

Следовательно, $[a \vee x], [b \vee x] \to [b^n \vee ax^{n-1}]$. Вместе с леммами 14 и 17 это означает, что с. р. х. такой подалгебры $[a_0 \vee x], a_0 > 0$, что $[a_0^{n-1} \vee x^{n-1}] = [b^n \vee ax^{n-1}]$. По лемме 4

$$[a_0^{n-1} \vee x^{n-1}] = [b^n \vee ax^{n-1}] \iff a_0^{n-1} = a^{-1} b^n \iff [a_0 \vee x] = \left[a^{\frac{-1}{n-1}} b^{\frac{n}{n-1}} \vee x\right].$$

Утверждение (3.10) для $s = n/(n-1)$ доказано.

С л у ч а й 2: $s = m/n, m > n \geq 1$. Тогда $s = s_{n+1} \cdot \ldots \cdot s_m$, где $s_i = i/(i-1)$, $i = n+1, \ldots, m$, и

$$[a \vee x], [b \vee x] \xrightarrow{\text{случай 1}} [a \vee x], \left[a^{1-s_{n+1}} b^{s_{n+1}} \vee x\right] \xrightarrow{\text{случай 1}}$$
$$[a \vee x], \left[a^{1-s_{n+2}} \left(a^{1-s_{n+1}} b^{s_{n+1}}\right)^{s_{n+2}} \vee x\right] = \left[a^{1-s_{n+1}s_{n+2}} b^{s_{n+1}s_{n+2}} \vee x\right] \xrightarrow{\text{случай 1}} \ldots \xrightarrow{\text{случай 1}}$$
$$[a \vee x], \left[a^{1-s_{n+1}s_{n+2}\cdot\ldots\cdot s_m} b^{s_{n+1}s_{n+2}\cdot\ldots\cdot s_m} \vee x\right] = [a^{1-s} b^s \vee x].$$

С л у ч а й 3: $s = m/n, n > m \geq 1$. Положим $t = n/m$. По лемме 4 для любого $r > 0$

$$[a^{1-t} r^t \vee x] = [b \vee x] \Longleftrightarrow a^{1-t} r^t = b \Longleftrightarrow r = a^{1-s} b^s.$$

Кроме того, по лемме 14 с. р. х. подалгебр $[r \vee x], r > 0$, и $t > 1$. Значит, с. р. х искомой подалгебры $[r \vee x], r = a^{1-s} b^s$, — это такая подалгебра, что

$$[a \vee x], [r \vee x] \xrightarrow{\text{случай 2}} [a^{1-t} r^t \vee x].$$

С л у ч а й 4: $s > 0$. Выберем произвольные последовательности $\{s_i^+\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{s_i^-\}_{i\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$s_i^-, s_i^+ \in \mathbb{Q},\ 0 < s_i^- \leq s \leq s_i^+ \text{ для всех } i \in \mathbb{N},\ \lim_{i\to+\infty} s_i^- = \lim_{i\to+\infty} s_i^+ = s. \tag{3.14}$$

Тогда

$$[a \vee x], [b \vee x] \xrightarrow{\text{случаи 2, 3}} \left[a^{1-s_i^-} b^{s_i^-} \vee x\right], \left[a^{1-s_i^+} b^{s_i^+} \vee x\right], i \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

По условию $b > a > 0$. Поэтому из (3.14) получаем

$$a^{1-s_i^-} b^{s_i^-} \leq a^{1-s} b^s \leq a^{1-s_i^+} b^{s_i^+},\ \lim_{i\to+\infty} a^{1-s_i^-} b^{s_i^-} = \lim_{i\to+\infty} a^{1-s_i^+} b^{s_i^+} = a^{1-s} b^s.$$

Следовательно, в силу лемм 4 и 5 для произвольной подалгебры $[r \vee x]$ имеем

$$[r \vee x] = [a^{1-s} b^s \vee x] \Longleftrightarrow r = a^{1-s} b^s \Longleftrightarrow a^{1-s_i^-} b^{s_i^-} \leq r \leq a^{1-s_i^+} b^{s_i^+} \text{ для всех } i \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow$$
$$\left[a^{1-s_i^+} b^{s_i^+} \vee x\right] \subseteq [r \vee x] \subseteq \left[a^{1-s_i^-} b^{s_i^-} \vee x\right] \text{ для всех } i \in \mathbb{N}.$$

Из (3.15) и лемм 5, 14 получаем, что с.р.х. искомой подалгебры $[a^{1-s} b^s \vee x]$ — это такая подалгебра $[r \vee x], r > 0$, что

$$\left[a^{1-s_i^-} b^{s_i^-} \vee x\right] \subseteq [r \vee x] \subseteq \left[a^{1-s_i^+} b^{s_i^+} \vee x\right] \text{ для всех } i \in \mathbb{N}.$$

С л у ч а й 5: $s < 0$. Положим $t = 1 - 1/s$. По лемме 4 для любого $r, a > r > 0$,

$$[r^{1-t} a^t \vee x] = [b \vee x] \Longleftrightarrow r^{1-t} a^t = b \Longleftrightarrow r = a^{1-s} b^s.$$

Кроме того, в силу лемм 5 и 14 с. р. х. подалгебр $[r \vee x], a > r > 0$, и $t > 0$. Значит, с. р. х искомой подалгебры $[r \vee x], r = a^{1-s} b^s$. Ей будет такая подалгебра, что

$$[r \vee x], [a \vee x] \xrightarrow{\text{случай 4}} [r^{1-t} a^t \vee x].$$

□

4. Завершение доказательства теоремы 2

По лемме 1 любой автоморфизм полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ индуцирует автоморфизмы решеток его подалгебр $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Докажем обратное утверждение.

Автоморфизмы решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Пусть α_1 — автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Тогда в силу лемм 5 и 14 для произвольных подалгебр $[b\vee x]$ и $[c\vee x]$, где $c>b>0$, имеем

$$\alpha_1\colon [b\vee x]\mapsto[d\vee x],\ [c\vee x]\mapsto[d\vee x] \text{ для некоторых } d>e>0. \tag{4.1}$$

Положим $s=\log_{c/b} e/d$ и $a=b^s/d$. Докажем, что $\alpha_1=\alpha_{1,\psi_{a,s}}$, где $s=\log_{c/b} e/d$ и $a=b^s/d$. Поскольку $A=\bigvee_{f\in A}[f]$ для любой подалгебры A с единицей, достаточно показать, что

$$\alpha_1([f])=\alpha_{1,\psi_{a,s}}([f]) \text{ для любой подалгебры } [f]. \tag{4.2}$$

Доказательство проведем индукцией по $\operatorname{lp} f$.

Если $\operatorname{lp} f=1$, то по лемме 14 для любых $a_0\ge 0$, $a_n>0$ и $n\ge 1$ найдутся такие $b_0\ge 0$ и $b_n>0$, что $\alpha_1([a_0])=[b_0]$ и $\alpha_1([a_nx^n])=[b_nx^n]$. Кроме того, $[b_0]=[a_0^s]$ и $[b_nx^n]=[a_n^s(ax)^n]$ по лемме 4. Значит, $\alpha_1([a_0])=[a_0^s]$ и $\alpha_1([a_nx^n])=[a_n^s(ax)^n]$ для любых $a_0\ge 0$, $a_n>0$ и $n\ge 1$.

Пусть $\operatorname{lp} f=2$. Для любых $a_0,a_1>0$ найдется такое $t\in\mathbb{R}$, что $a_0/a_1=b^{1-t}c^t$. Из (4.1) и леммы 18 получаем, что $\alpha_1([b^{1-t}c^t\vee x])=([d^{1-t}e^t\vee x])$. Кроме того, $[a_0/a_1\vee x]=([a_0\vee a_1x])$ и $[a_0^s/a_1^sa\vee x]=[a_0^s\vee a_1^s(ax)]$ по лемме 4, и $d^{1-t}e^t=a_0^s/a_1^sa$, так как $d=b^s/a$ и $e=c^s/a$. Отсюда $\alpha_1([a_0\vee a_1x])=[a_0^s\vee a_1^s(ax)]$ для любых $a_0,a_1>0$. В частности, $\alpha_1\colon \big[a_0^{1/n}\vee a_1^{1/n}x\big]\mapsto \big[a_0^{s/n}\vee a_1^{s/n}(ax)\big]$ для любого $n\ge 1$. Следовательно, $\alpha_1\colon [a_0\vee a_1x^n]\mapsto\big[a_0^s\vee a_1^s(ax)^n\big]$ по лемме 17. Таким образом, $\alpha_1\colon [a_m\vee a_nx^{n-m}]\mapsto[a_m^s\vee a_n^s(ax)^{n-m}]$ для любых $a_m,a_n>0$, $n>m\ge 0$. Отсюда по лемме 15

$$\alpha_1\colon \big[(a_m\vee a_nx^{n-m})x^m\big]\mapsto\big[(a_m^s\vee a_n^s(ax)^{n-m})x^m\big] \text{ для любых } a_m,a_n>0, n>m\ge 0.$$

Значит,

$$\alpha_1\colon \big[a_mx^m\vee a_nx^n\big]\mapsto\big[a_m^s(ax)^m\vee a_n^s(ax)^n\big] \text{ для любых } a_m,a_n>0, n>m\ge 0.$$

Пусть утверждение (4.2) верно для всех подалгебр $[f]$, $\operatorname{lp} f\le l$, $l\ge 2$. Допустим,

$$[f]=\big[a_kx^k\vee\ldots\vee a_mx^m\vee a_nx^n\big],\ a_k,a_m,a_n>0,\ n>m>k\ge 0,\ \operatorname{lp} f=l+1.$$

По индукционному предположению

$$\alpha_1\colon [a_kx^k\vee\ldots\vee a_mx^m]\mapsto\big[a_k^s(ax)^k\vee\ldots\vee a_m^s(ax)^m\big],\ [a_mx^m\vee a_nx^n]\mapsto\big[a_m^s(ax)^m\vee a_n^s(ax)^n\big].$$

Таким образом, по лемме 16

$$\alpha_1\colon [a_kx^k\vee\ldots\vee a_mx^m\vee a_nx^n]\mapsto\big[a_k^s(ax)^k\vee\ldots\vee a_m^s(ax)^m\vee a_n^s(ax)^n\big].$$

Автоморфизмы решетки $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Пусть α — автоморфизм решетки $\mathbb{A}(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. В силу леммы 2 ограничение α на решетку $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$ будет автоморфизмом решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}_+^\vee[x])$. Поэтому, как было доказано ранее, найдется такой автоморфизм $\psi_{a,s}$ полукольца $\mathbb{R}_+^\vee[x]$, что $\alpha([f])=\alpha_{1,\psi_{a,s}}([f])$ для любой подалгебры $[f]$. Заметим, что $\alpha_{1,\psi_{a,s}}([f]]=\psi_{a,s}([f])=\alpha_{\psi_{a,s}}([f]]$. Следовательно,

$$\alpha([f])=\alpha_{\psi_{a,s}}([f]] \text{ для любой подалгебры } [f]. \tag{4.3}$$

Докажем, что $\alpha=\alpha_{\psi_{a,s}}$. Поскольку $A=\bigvee_{f\in A}\langle f\rangle$ для любой подалгебры A, достаточно показать, что для любой подалгебры $\langle f\rangle$ имеем $\langle f_1\rangle=\langle f_2\rangle$, где $\alpha(\langle f\rangle)=\langle f_1\rangle$ и $\alpha_{\psi_{a,s}}(\langle f\rangle)=\langle f_2\rangle$.

Если $[f]\ne\mathbb{R}_+^\vee$, то $[f_1],[f_2]\ne\mathbb{R}_+^\vee$ в силу леммы 2. Кроме того, $[f_1]=[f_2]$ в силу (4.3). Значит, $\langle f_1\rangle=\langle f_2\rangle$, так как по лемме 4 равенства $[f_1]=[f_2]$ и $\langle f_1\rangle=\langle f_2\rangle$ равносильны.

Наконец, если $[f]=\mathbb{R}_+^\vee$, т. е. $\langle f\rangle=\langle 0\rangle$ или $\langle f\rangle=\mathbb{R}_+^\vee$, то, очевидно, $\langle f_1\rangle=\langle f_2\rangle$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н.** О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22. № 1. С. 11–15.
2. **E. Hewitt.** Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 64, no. 1. P. 45–99. doi: 10.1090/S0002-9947-1948-0026239-9 .
3. **Вечтомов Е. М.** Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Мат. заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 687–693.
4. **Sidorov V. V.** Determinability of semirings of continuous nonnegative functions with max-plus by the lattices of their subalgebras // Lobachevskii J. Math. 2019. Vol. 40. P. 90–100. doi: 10.1134/S1995080219010128 .
5. **Сидоров В. В.** Автоморфизмы решётки всех подалгебр полукольца многочленов от одной переменной // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, вып. 3. С. 85–96.

Поступила 2.05.2020
После доработки 20.05.2020
Принята к публикации 1.06.2020

Сидоров Вадим Вениаминович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Вятский государственный университет
г. Киров
e-mail: sedoy_vadim@mail.ru

REFERENCES

1. Gelfand I.M., Kolmogorov A.N. On rings of continuous functions on topological spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1939, vol. 22, no. 1, pp. 11–15.
2. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1948, vol. 64, no. 1, pp. 45–99. doi: 10.1090/S0002-9947-1948-0026239-9 .
3. Vechtomov E.M. Lattice of subalgebras of the ring of continuous functions and Hewitt spaces. *Math. Notes*, 1997, vol. 62, pp. 575–580. doi: 10.1007/BF02361295 .
4. Sidorov V.V. Determinability of semirings of continuous nonnegative functions with max-plus by the lattices of their subalgebras. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, pp. 90–100. doi: 10.1134/S1995080219010128 .
5. Sidorov V.V. Automorphisms of the lattice of all subalgebras of the semiring of polynomials in one variable. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 187, no. 2, pp. 169–176. doi: 10.1007/s10958-012-1060-4 .

Received May 2, 2020
Revised May 20, 2020
Accepted June 1, 2020

Vadim Veniaminovich Sidorov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Vyatka State University, Kirov, 610000 Russia, e-mail: sedoy_vadim@mail.ru .

V. V. Sidorov. Automorphisms of the semiring of polynomials $\mathbb{R}_+^\vee[x]$ and lattices of its subalgebras, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 171–186 .