ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.9, 51-72

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвиряков

Изучается переопределенная система, состоящая из уравнений Навье — Стокса и уравнения несжимаемости. Система уравнений описывает установившиеся сдвиговые пространственно неоднородные течения вязкой несжимаемой жидкости. Нетривиальное точное решение рассматриваемой системы определяется в классе Линя — Сидорова — Аристова. Получено условие разрешимости системы для поля скоростей следующего вида:

$$V_x = U\,(z) + u_1\,(z)\,x + u_2\,(z)\,y, \quad V_y = V\,(z) + v_1\,(z)\,x + v_2\,(z)\,y, \quad V_z = 0.$$

При исследовании точного решения было уставлено, что разрешимость системы уравнений возможна при алгебраической связи горизонтальных градиентов (пространственных ускорений) скоростей u_1, u_2, v_1, v_2 с компонентами давления P_{11}, P_{12}, P_{22}. Давление является квадратичной формой относительно координат x и y. Установлено, что компоненты давления и пространственные ускорения являются постоянными величинами. В этом случае в зависимости от значений параметров получено точное решение для скоростей U и V. Полученные точные решения могут описывать неоднородное течение Куэтта — Пуазейля — Экмана.

Ключевые слова: слоистые течения, сдвиговые течения, точные решения, параметр Кориолиса, переопределенная система, условия совместности.

N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid.

We study an overdetermined system consisting of the Navier–Stokes equations and the incompressibility equation. The system of equations describes steady spatially inhomogeneous shear flows of a viscous incompressible fluid. The nontrivial exact solution of the system under consideration is determined in the Lin–Sidorov–Aristov class. A condition for the solvability of the system for the velocity field of the form

$$V_x = U\,(z) + u_1\,(z)\,x + u_2\,(z)\,y, \quad V_y = V\,(z) + v_1\,(z)\,x + v_2\,(z)\,y, \quad V_z = 0$$

is obtained. In the study of the exact solution, it is stated that the solvability of the system of equations is possible under an algebraic connection between the horizontal gradients (spatial accelerations) of the velocities u_1, u_2, v_1, v_2 and the pressure components P_{11}, P_{12}, P_{22}. Pressure is a quadratic form with respect to the coordinates x and y. It is established that the pressure components and spatial accelerations are constant. In this case, depending on the values of the parameters, an exact solution is obtained for the velocities U and V. The exact solutions obtained can describe the inhomogeneous Poiseuille–Couette–Ekman flow.

Keywords: layered flows, shear flows, exact solutions, Coriolis parameter, overdetermined system, compatibility conditions.

MSC: 35N10, 76D05, 76D17, 76U05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87

Введение

Для описания крупномасштабных течений вязких несжимаемых жидкостей используется приближение тонкого слоя, позволяющее построить квазидвумерные модели движения сред [1]. Применение приближения тонкого слоя характерно для изучения слоистых и сдвиговых течений в Мировом океане, в решении задач при описании циркуляции несжимаемого воздуха в атмосфере [1; 2]. В этом случае при интегрировании уравнений Навье — Стокса, дополненных уравнением несжимаемости, полагают равной нулю одну из компонент вектора скорости $\mathbf{V} = (V_x(x,y,z,t), V_y(x,y,z,t), 0)$ — гидростатическое приближение [1–5]. После осуществления такой редукции система разрешающих уравнений становится переопределенной, поскольку для вычисления двух компонент вектора скорости и давления имеется, вообще говоря, четыре уравнения [4; 5]. Указанная выше проблема имеет место и для изобарических течений жидкости [4–6]. Численное интегрирование переопределенной системы квадратично нелинейных уравнений в частных производных без анализа разрешимости практически невозможно, поэтому очень трудно переоценить теоретическое исследование переопределенной редуцированной системы уравнений Навье — Стокса, дополненной уравнением несжимаемости.

В статьях Р. Беркера [7] и Ю. Д. Шмыглевского [8] впервые начато изучение переопределенной системы, описывающей плоское изобарическое движение жидкости (поле скоростей $\mathbf{V} = (V_x(x,y,t), V_y(x,y,t), 0)$ двумерно и зависит от двух координат и времени), и построено много точных нетривиальных решений. Дальнейшее обобщение пионерских исследований [7; 8] показало существование нетривиальных решений для поля скоростей $V_x(x,y,z,t), V_y(x,y,z,t), 0$ (см. [4]) в классе Линя — Сидорова — Аристова [9–11]. В статье [6] приведено условие разрешимости в терминах функции тока, определение которой базируется на интегрировании уравнений Монжа — Ампера. Исследование переопределенных систем уравнений, описывающих градиентные и конвективные крупномасштабные течения, приведены в [12; 13]. Результаты, анонсированные в [4–6; 12; 13], справедливы в инерциальной системе координат. В силу того что приближение тонкого слоя используется для решения задач геофизической гидродинамики, актуальной является задача по нахождению точных решений, описывающих установившиеся пространственно неоднородные течения жидкости. В статье приводятся новые точные решения уравнений Навье — Стокса для вращающихся жидкостей, которые могут быть полезными при описании неоднородного течения Экмана. Актуальность рассматриваемой задачи подчеркивают также работы [14–17], в которых изучаются различные эффекты, вызванные с учетом силы Кориолиса.

1. Постановка задачи

Рассмотрим установившееся изотермическое сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Полагаем, что вращение описывается одним параметром Кориолиса f, то есть используется традиционное приближение для вектора угловой скорости [2; 3]. Для моделирования этого процесса используем уравнения Навье — Стокса и уравнение несжимаемости [18]:

$$\begin{gathered}(\mathbf{V},\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{V} = -\nabla P + \nu\triangle\mathbf{V},\\ \nabla\cdot\mathbf{V} = 0.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{V} = (V_x\,(x,y,z,t)\,, V_y\,(x,y,z,t)\,, V_z\,(x,y,z,t))$ — вектор скорости; $P\,(x,y,z,t)$ — нормированное на плотность редуцированное давление, полученное из истинного давления p вычитанием центробежной составляющей $\rho\left((\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\,,(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\right)/2$ и учетом потенциальных массовых сил; ν — кинематическая вязкость жидкости; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)\,, \triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — операторы Гамильтона и Лапласа соответственно. Для установившихся слоистых течений ($\mathbf{V} = (V_x(x,y,z), V_y(x,y,z), 0)$) система (1.1) в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ принимает более простой вид

$$\begin{gathered}V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} - fV_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\Big(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\Big),\\ V_x\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial y} + fV_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\Big(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\Big),\\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Уравнения системы (1.2) содержат конвективную производную, потому система (1.2) является квадратично нелинейной. Кроме того, число уравнений, входящих в систему (1.2), превосходит число неизвестных гидродинамических полей, следовательно, система (1.2) является переопределенной. Переопределенность системы (1.2) можно снять, если тождественно удовлетворить "лишнему" уравнению. Рассмотрим далее поле скоростей и поле давления, которые описываются соответственно линейной и квадратичной формами относительно горизонтальных (продольных) координат x и y:

$$V_x = U(z) + u_1(z)\,x + u_2(z)\,y, \quad V_y = V(z) + v_1(z)\,x + v_2(z)\,y, \tag{1.3}$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)\,x + P_2(z)\,y + P_{12}(z)\,xy + P_{11}(z)\,\frac{x^2}{2} + P_{22}(z)\,\frac{y^2}{2}. \tag{1.4}$$

Коэффициенты в формулах (1.3) и (1.4) зависят от вертикальной (поперечной) координаты z. Условие разрешимости переопределенной системы типа (1.2) для класса скоростей вида (1.3) в случае изобарических течений невращающихся жидкостей было изучено в [4]. Класс решений (1.4) для поля давления позволяет описывать квадратично нелинейное распределение этого поля по продольным (горизонтальным) координатам. Давление P_0 называется *фоновым*, оно соответствует, например, атмосферному давлению. Компоненты P_1, P_2 есть горизонтальные градиенты давления, компоненты P_{11}, P_{12}, P_{22} — слагаемые, характеризующие локальную кривизну поля давления. Точные решения системы (1.2), полученные в рамках класса (1.3), могут описывать неоднородное течение Куэтта — Пуазейля — Экмана. Под этим термином понимаем такие обобщения классических движений жидкости, которые существуют только для одной или двух горизонтальных (продольных) скоростей жидкости, зависящих от трех координат (двух продольных и поперечной). Неоднородное изобарическое течение Куэтта в классе (1.3) изучено в статьях [4; 5], неоднородное градиентное течение Пуазейля рассмотрено в [12]. Исследования неоднородных течений Экмана и их суперпозиции с движениями Куэтта и Пуазейля к настоящему времени отсутствуют.

Подставим представление гидродинамических полей (1.3) и (1.4) в систему уравнений (1.2) и применим принцип неопределенных коэффициентов для получившихся полиномов относительно независимых переменных x, y. В результате несложных преобразований придем к системе уравнений следующего вида относительно компонент гидродинамических полей, входящих в разложение (1.3), (1.4):

$$\begin{gathered} u_1^2 + u_2 v_1 - f v_1 = -P_{11} + \nu u_1'', \\ u_1 u_2 + u_2 v_2 - f v_2 = -P_{12} + \nu u_2'', \\ u_1 v_1 + v_1 v_2 + f u_1 = -P_{12} + \nu v_1'', \\ u_2 v_1 + v_2^2 + f u_2 = -P_{22} + \nu v_2'', \\ u_1 + v_2 = 0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} U u_1 + V u_2 - f V = -P_1 + \nu U'', \\ U v_1 + V v_2 + f U = -P_2 + \nu V''. \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = \frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{\partial P_2}{\partial z} = \frac{\partial P_{12}}{\partial z} = \frac{\partial P_{11}}{\partial z} = \frac{\partial P_{22}}{\partial z} = 0. \tag{1.7}$$

В системе (1.5)–(1.7) штрихом обозначено взятие производной по вертикальной координате z. В уравнениях (1.7) поле давления зависит только от горизонтальных координат x и y. Таким образом, компоненты $P_0, P_1, P_2, P_{12}, P_{11}, P_{22}$ поля давления P могут быть однозначным образом найдены из граничного условия. Отметим, что системы уравнений для определения компонент полей, аналогичные системе (1.5), (1.6), в случае, когда $f = 0$, были рассмотрены, например, в [4; 5; 13].

2. Анализ разрешимости

После того, как компоненты поля давления P найдены из граничных условий, систему уравнений (1.5), (1.6) можно рассматривать как систему семи уравнений относительно шести неизвестных (четыре пространственных ускорения u_1, u_2, v_1, v_2 и две скорости U, V) при заданном распределении давления. Получившаяся система (1.5), (1.6) в этом смысле является переопределенной, поэтому встает вопрос о ее разрешимости (о существовании нетривиального решения). При этом уравнения системы (1.6) являются зависимыми в том смысле, что их решение может быть получено только после того, как решена система (1.5). Если система (1.5) решена, то получаем, что система (1.6) состоит из двух линейных дифференциальных уравнений относительного двух неизвестных функций (скорости U, V) с известными коэффициентами. Получается, что основная сложность нахождения компонент поля скорости состоит в том, чтобы решить переопределенную систему (1.5).

Теорема. *Если существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что выполняется равенство*

$$\alpha^2 f^2 + 2\alpha f^3 - P_{11}^2 - 4P_{12}^2 - 2f^2\left(P_{11} - P_{22}\right) + 2P_{11}P_{22} + P_{22}^2 = 0,$$

то переопределенная система (1.5) *является разрешимой, при этом функции u_1, u_2, v_1, v_2 принимают постоянные значения*

$$u_1 = -\frac{P_{12}}{f}, \quad u_2 = \frac{P_{11} - P_{22} - f\alpha}{f}, \quad v_1 = \frac{P_{11} - P_{22} + f\alpha}{f}, \quad v_2 = \frac{P_{12}}{f}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнения системы (1.5) относительно пространственных ускорений u_1, u_2, v_1, v_2 и разобьем эти уравнения на три подсистемы:

$$\begin{aligned} u_1u_2 + u_2v_2 - fv_2 &= -P_{12} + \nu u_2'', \\ u_1v_1 + v_1v_2 + fu_1 &= -P_{12} + \nu v_1'', \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2v_1 - fv_1 &= -P_{11} + \nu u_1'', \\ u_2v_1 + v_2^2 + fu_2 &= -P_{22} + \nu v_2'', \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$u_1 + v_2 = 0. \tag{2.3}$$

Сложим уравнения (2.1) и с учетом уравнения (2.3) получим следующее дифференциальное соотношение $\nu\left(u_2 + v_1\right)'' = 2P_{12} + 2fu_1$. Далее вычтем уравнения группы (2.1) друг из друга, получим $\left(u_2 - v_1\right)'' = 0$.

Совершим теперь аналогичные преобразования с уравнениями группы (2.2) посредством их сложения и вычитания, принимая во внимание соотношение (2.3). В этом случае подсистема (2.2) запишется следующим образом:

$$P_{11} + P_{22} + 2u_1^2 + 2u_2v_1 + f\left(u_2 - v_1\right) = 0,$$

$$2\nu u_1'' = P_{11} - P_{22} - f\left(u_2 + v_1\right).$$

Таким образом, получаем, что система (2.1)–(2.3) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} v_1'' &= u_2'', \\ \nu u_2'' &= P_{12} + fu_1, \\ 2\nu u_1'' &= P_{11} - P_{22} - f\left(u_2 + v_1\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$P_{11} + P_{22} + 2u_1^2 + 2u_2v_1 + f\left(u_2 - v_1\right) = 0. \tag{2.5}$$

Уравнения подсистемы (2.4) позволяют определить общий вид пространственных ускорений u_1, u_2, v_1, уравнение (2.5) представляет собой условие совместности этих решений.

Продифференцируем дважды второе уравнение системы (2.4): $\nu u_2^{(4)} = f u_1''$. Затем правую часть получившегося уравнения заменим в силу третьего уравнения:

$$\nu u_2^{(4)} = \frac{f}{2\nu}\left[P_{11} - P_{22} - f\left(u_2 + v_1\right)\right]. \tag{2.6}$$

Проинтегрировав дважды первое уравнение системы (2.4), найдем связь между компонентами v_1, u_2 поля скоростей (1.3)

$$v_1 = u_2 + c_1 z + c_2. \tag{2.7}$$

Здесь c_1, c_2 — произвольные постоянные. Подставим это соотношение в (2.6) и получим следующее дифференциальное уравнение:

$$u_2^{(4)} + \frac{f^2}{\nu^2} u_2 = \frac{f}{2\nu^2}\left[P_{11} - P_{22} - f\left(c_1 z + c_2\right)\right]. \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) является обыкновенным неоднородным линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами относительно функции u_2. Его общее решение представимо в виде суммы $u_2 = u_{21} + u_{22}$, где u_{21} — общее решение соответствующего однородного уравнения, а u_{22} — некоторое частное решение уравнения (2.8).

Для определения слагаемого u_{21} имеем уравнение

$$u_{21}^{(4)} + \frac{f^2}{\nu^2} u_{21} = 0.$$

Общее решение уравнений такого типа согласно [19, разд. 4.1.2, с. 663] имеет вид

$$u_{21} = c_3 \cosh(kz)\cos(kz) + c_4 \cosh(kz)\sin(kz) + c_5 \sinh(kz)\cos(kz) + c_6 \sinh(kz)\sin(kz),$$

здесь $k^4 = f^2/\left(4\nu^2\right)$, c_3, c_4, c_5, c_6 — постоянные интегрирования. Частное решение уравнения (2.8) легко определяется:

$$u_{22} = \frac{P_{11} - P_{22} - f\left(c_1 z + c_2\right)}{2f} = az + b,$$

причем $a = -c_1/2, b = \left(P_{11} - P_{22} - f c_2\right)/\left(2f\right)$. Следовательно, точное решение уравнения (2.8) имеет вид

$$u_2 = c_3 \cosh(kz)\cos(kz) + c_4 \cosh(kz)\sin(kz) + c_5 \sinh(kz)\cos(kz) + c_6 \sinh(kz)\sin(kz) + az + b.$$

Учитывая (2.7), получим выражение

$$\begin{aligned} v_1 = {} & c_3 \cosh(kz)\cos(kz) + c_4 \cosh(kz)\sin(kz) + c_5 \sinh(kz)\cos(kz) \\ & + c_6 \sinh(kz)\sin(kz) + \left(a + c_1\right) z + \left(b + c_2\right). \end{aligned}$$

Затем, используя второе уравнение системы (2.4), находим

$$u_1 = \frac{\nu u_2'' - P_{12}}{f}.$$

Делая подстановку найденных решений в уравнение (2.5), получаем, что $c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$, а само алгебраическое уравнение (2.5) сводится к следующему тождеству:

$$c_2^2 f^2 + 2c_2 f^3 - P_{11}^2 - 4P_{12}^2 - 2f^2\left(P_{11} - P_{22}\right) + 2P_{11}P_{22} + P_{22}^2 = 0. \tag{2.9}$$

При этом все компоненты поля скорости (1.3) оказываются постоянными:

$$u_1 = -\frac{P_{12}}{f}, \quad u_2 = b = \frac{P_{11} - P_{22} - f c_2}{2f}, \quad v_1 = b + c_2 = \frac{P_{11} - P_{22} + f c_2}{2f}, \quad v_2 = \frac{P_{12}}{f}.$$

Таким образом, если найдется $c_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию (2.9), то для $\alpha = c_2 \in \mathbb{R}$ будут выполнены все условия теоремы. При этом доказано, что для такого c_2 система (1.5) разрешима и искомые функции u_1, u_2, v_1, v_2 принадлежат множеству постоянных функций.

3. Точное решение для однородных компонент поля скорости

Проинтегрируем систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (1.6) и найдем точное решение для однородных компонент U, V поля скорости (1.3). Для этого преобразуем (1.6) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\nu U'' - u_1 U - (u_2 - f)\,V = P_1,\\
&\nu V'' + u_1 V - (v_1 + f)\,U = P_2.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Вид решения этой системы зависит от значений коэффициентов u_1, u_2, v_1, стоящих перед неизвестными функциями U и V и удовлетворяющих выражениям для u_1, u_2, v_1, v_2 из теоремы.

1) Пусть $v_1 + f = 0$, тогда второе уравнение системы (3.1) запишется следующим образом:

$$
\nu V'' + u_1 V = P_2. \tag{3.2}
$$

Вид решения уравнения (3.2) зависит от величины коэффициента u_1.

1.1) Если $u_1 = 0$, то

$$
V = \frac{P_2}{2\nu} z^2 + C_1 z + C_2,
$$

$$
U = \frac{P_2}{24\nu^2}(u_2 - f) z^4 + \frac{C_1}{6\nu}(u_2 - f) z^3 + \frac{C_2(u_2 - f) + P_1}{2\nu} z^2 + C_3 z + C_4.
$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

1.2) Если $u_1 > 0$, то

$$
V = \frac{P_2}{u_1} + C_1 \sin\Bigl(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\Bigr) + C_2 \cos\Bigl(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\Bigr),
$$

$$
\begin{aligned}
U = {}& -\frac{C_1}{2u_1}(u_2 - f)\sin\Bigl(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\Bigr) - \frac{C_2}{2u_1}(u_2 - f)\cos\Bigl(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\Bigr)\\
&+ C_3 \exp\Bigl(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\Bigr) + C_4 \exp\Bigl(-z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\Bigr) - \frac{P_1 u1 + P_2(u_2 - f)}{u_1^2}.
\end{aligned}
$$

1.3) Если $u_1 < 0$, то

$$
V = \frac{P_2}{u_1} + C_1 \sinh\Bigl(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\Bigr) + C_2 \cosh\Bigl(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\Bigr),
$$

$$
\begin{aligned}
U = {}& C_1 \cos\Bigl(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\Bigr) + C_2 \sin\Bigl(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\Bigr) + \frac{(\nu P_1 + P_2(u_2 - f))}{\nu |u_1|}\\
&+ \frac{C_1(u_2 - f)}{2|u_1|}\sinh\Bigl(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\Bigr) + \frac{C_2(u_2 - f)}{2|u_1|}\cosh\Bigl(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\Bigr).
\end{aligned}
$$

2) Пусть теперь $v_1 + f \neq 0$, тогда из второго уравнения системы (3.1) выразим скорость

$$
U = \frac{\nu V'' + u_1 V - P_2}{v_1 + f} \tag{3.3}
$$

и подставим в первое уравнение. Получим

$$
\nu\Bigl(\frac{\nu V'' + u_1 V - P_2}{v_1 + f}\Bigr)'' - u_1\Bigl(\frac{\nu V'' + u_1 V - P_2}{v_1 + f}\Bigr) - (u_2 - f)V = P_1.
$$

Элементарными преобразованиями это уравнение приводится к равносильному виду

$$V^{(4)} - \frac{u_1^2 + (u_2 - f)(v_1 + f)}{\nu^2} V = \frac{P_1(v_1 + f) - u_1 P_2}{\nu^2}. \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.4) зависит от значения коэффициента $S = -[u_1^2 + (u_2 - f)(v_1 + f)]/\nu^2$ (см. [19, разд. 4.1.2, с. 663]).

2.1) Если $S = 0$, то уравнение (3.4) имеет решение

$$V = \frac{P_1(v_1 + f) - u_1 P_2}{24\nu^2} z^4 + C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4.$$

2.2) Если $S > 0$, то решение для скорости V определяется формулой

$$V = C_1 \cosh(kz)\cos(kz) + C_2 \cosh(kz)\sin(kz)$$

$$+ C_3 \sinh(kz)\cos(kz) + C_4 \sinh(kz)\sin(kz) + \frac{P_1(v_1 + f) - u_1 P_2}{S\nu^2},$$

здесь $k^4 = S/4$.

2.3) Если $S < 0$, то

$$V = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + C_3 \cosh(kz) + C_4 \sinh(kz) + \frac{P_1(v_1 + f) - u_1 P_2}{S\nu^2}.$$

После этого необходимо подставить найденное решение для скорости V в выражение (3.3) для определения вида функции, отвечающей однородной скорости U.

Заключение

В статье рассмотрены неоднородные течения вращающейся вязкой несжимаемой среды. Течения жидкости описываются переопределенной системой, состоящей из уравнений Навье — Стокса и несжимаемости. Получено нетривиальное точное решение переопределенной системы уравнений движения. Данное решение принадлежит классу Линя — Сидорова — Аристова с постоянными пространственными ускорениями (горизонтальными градиентами скоростей). Для пространственных ускорений получено условие разрешимости, при котором существуют течения. При известных горизонтальных градиентах скорости проинтегрирована точно система обыкновенных дифференциальных уравнений для фоновых скоростей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аристов С.Н., Шварц К.Г.** Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: ГОУ ВПО “Пермский государственный университет”, 2006. 155 с.
2. **Зырянов В.Н.** Теория установившихся океанических течений. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1985. 248 с.
3. **Коротаев Г.К., Михайлова Э.Н., Шапиро Н.Б.** Теория экваториальных противотечений в Мировом океане. Киев: Наук. думка, 1986. 208 с.
4. **Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.** Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 177–-182. doi: 10.20537/nd1402004.
5. **Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.** Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Изв. высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015. Вып. 4. С. 50–54.
6. **Зубарев Н.М., Просвиряков Е.Ю.** О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 6(358). С. 65–71. doi: 10.15372/PMTF20190607.
7. **Berker R.** Sur quelques cas d’integration des equations du mouvement d’un fluide visquex incompressible. Paris-Lille: Taffin-Lefort, 1936. 161 p.

8. **Шмыглевский Ю.Д.** Об изобарических плоских течениях вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 12. С. 1895-–1898.
9. **Lin C.C.** Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. Vol. 1. P. 391-–395.
10. **Сидоров А.Ф.** О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн// Прикл. механика и теорет. физика. 1989. № 2. С. 34–40.
11. **Аристов С.Н.** Вихревые течения в тонких слоях жидкости: дис. ... д-р. физ.-мат. наук / ИАПУ. Владивосток, 1990. 303 с.
12. **Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A.** Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer // Russian J. Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, no. 3. P. 271–283. doi: 10.20537/nd190306.
13. **Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.** Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2020. Т. 54, № 1. С. 114–124. doi: 10.31857/S0040357119060034 .
14. **Wheeler M.H.** On stratified water waves with critical layers and Coriolis forces // Discrete and Continuous Dynamical Systems – A. 2019. Vol. 39, no. 8. P. 4747–4770. doi: 10.3934/dcds.2019193 .
15. **Sarja A., Singh P., Ekkad S.** Parallel rotation for negating Coriolis force effect on heat transfer // Aeronautical J. 2020. Vol. 124, no. 1274. P. 581–596. doi:10.1017/aer.2020.1 .
16. **Fein Y.Y., Kialka F., Geyer P., Gerlich S., Arndt M.** Coriolis compensation via gravity in a matter-wave interferometer // New J. Physics. 2020. Vol. 22. doi: 10.1088/1367-2630/ab73c5 .
17. **Mills C.** Calibrating and operating Coriolis flow meters with respect to process effects // Flow Measurement and Instrumentation. 2020. Vol. 71. doi: 10.1016/j.flowmeasinst.2019.101649 .
18. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. 6-е. изд. Москва: Физматлит, 2006. 736 с.
19. **Polyanin A.D., Zaitsev V.F.** Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. 2nd ed. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2003. 803 p.

Поступила 20.02.2020
После доработки 26.03.2020
Принята к публикации 27.04.2020

Бурмашева Наталья Владимировна
канд. техн. наук
науч. сотрудник
Институт машиноведения УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: nat_burm@mail.ru

Просвиряков Евгений Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт машиноведения УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: evgen_pros@mail.ru

REFERENCES

1. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoi prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical flows of the advective nature in a rotating fluid layer]. Perm: Perm State Univ. Publ., 2006, 155 p.
2. Zyryanov V.N. *Teoriya ustanovivshikhsya okeanicheskikh techenii* [Theory of steady-state oceanic currents]. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ., 1985, 248 p.

3. Korotayev G.K., Mikhaylova E.N., Shapiro N.B. *Teoriya ekvatorial'nykh protivotechenii v Mirovom okeane* [Theory of equatorial countercurrents in the World Ocean]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1986, 208 p.
4. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Couette flow. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182 (in Russian) . doi: 10.20537/nd1402004 .
5. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Rus. Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413–418. doi: 10.3103/S1068799815040091 .
6. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for layered three-dimensional unsteady isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *J. Appl. Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, no. 6, pp. 1031–1037. doi: 10.1134/S0021894419060075 .
7. Berker R. *Sur quelques cas d'integration des equations du mouvement d'un fluide visquex incompressible.* Paris-Lille: Taffin-Lefort, 1936, 161 p.
8. Shmyglevskii Yu.D. On isobaric planar flows of a viscous incompressible liquid. *USSR Comput. Mathematics and Math. Physics*, 1985, vol. 25, no. 6, pp. 191–193. doi: 10.1016/0041-5553(85)90030-8 .
9. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, no. 1, pp. 391–395. doi: 10.1007/BF00298016 .
10. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. doi: 10.1007/BF00852164 .
11. Aristov S.N. *Vikhrevie techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortical flows in thin liquid layers]. Dissertation, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Vladivostok, 1990, 303 p.
12. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Russian J. Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 271–283. doi: 10.20537/nd190306 .
13. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Thermocapillary Convection of a Vertical Swirling Liquid. *Theoret. Foundations of Chemical Engineering*, 2020, vol. 54, no. 1, pp. 230–239. doi: 10.1134/S0040579519060034 .
14. Wheeler M.H. On stratified water waves with critical layers and Coriolis forces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – A*, 2019, vol. 39, no. 8, pp. 4747–4770. doi: 10.3934/dcds.2019193 .
15. Sarja A., Singh P., Ekkad S. Parallel rotation for negating Coriolis force effect on heat transfer. *Aeronautical J.*, 2020, vol. 124, no. 1274, pp. 581–596. doi:10.1017/aer.2020.1 .
16. Fein Y.Y., Kialka F., Geyer P., Gerlich S., Arndt M. Coriolis compensation via gravity in a matter-wave interferometer. *New J. Physics*, 2020, vol. 22. doi: 10.1088/1367-2630/ab73c5 .
17. Mills C. Calibrating and operating Coriolis flow meters with respect to process effects. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2020, vol. 71. doi: 10.1016/j.flowmeasinst.2019.101649 .
18. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics.* Oxford: Pergamon Press, 1987, 539 p. ISBN: 9781483161044 . Original Russian text published in Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika. 6-e. izd.* Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 736 p.
19. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*, 2nd ed. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2003, 803 p. ISBN: 1584882972 .

Received February 20, 2020
Revised March 26, 2020
Accepted April 27, 2020

Natalya Vladimirovna Burmasheva, Cand. Eng. Sci., Institute of Engineering Sciences of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620049 Russia; Ural federal university, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: nat_burm@mail.ru .

Evgeniy Yur'evich Prosviryakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Engineering Sciences of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620049 Russia; Ural federal university, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: evgen_pros@mail.ru .

Cite this article as: N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 79–87 .