ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 519.21+517.982.4

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССОВ ТИПА ЛЕВИ В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Бовкун

Статья посвящена исследованию корректности уравнений для вероятностных характеристик процессов типа Леви, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). На основе формулы Ито и аппарата теории обобщенных функций доказаны следующие результаты. Прямое уравнение для переходной вероятности процесса является корректным на пространстве финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций при выполнении условий теоремы существования и единственности решения СДУ. Обратное уравнение для вероятностной характеристики специального вида является корректным на том же пространстве при дополнительных условиях на гладкость коэффициентов СДУ.

Ключевые слова: процесс типа Леви, формула Ито, марковский процесс, переходная вероятность, обобщенная функция.

V. A. Bovkun. Forward and backward equations for the probability characteristics of Levy type processes in spaces of distributions.

We study the correctness of equations for the probability characteristics of Levy type processes defined by stochastic differential equations. Using the Ito formula and techniques of the theory of generalized functions, we prove the following results. The forward equation for the transition probability of the process is correct on the space of compactly supported twice continuously differentiable functions under the assumptions of the theorem of existence and uniqueness of solutions to the stochastic differential equation, and the backward equation for a probability characteristic of special form is correct on the same space under additional conditions on the smoothness of the coefficients of the stochastic differential equation.

Keywords: Levy type process, Ito formula, Markov process, transition probability, distribution.

MSC: 60H10, 35D30, 46F10

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-68-78

Введение

Изучение многочисленных явлений с учетом случайных возмущений, возникающих в различных областях фундаментальных и прикладных исследований, приводит к математическим моделям в форме стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Наиболее подробно и полно исследованы СДУ для процессов диффузионного типа — уравнения, содержащие "непрерывные", случайные возмущения в форме интеграла Ито по винеровскому процессу. В настоящее время большой интерес вызывает исследование СДУ, содержащих наряду с непрерывными и разрывные случайные возмущения в форме стохастических интегралов по пуассоновской и компенсированной пуассоновской случайным мерам (см., например, [1–3]). Процессы, определяемые СДУ с интегралами указанного вида, в литературе называют процессами типа Леви. В качестве примеров процессов, моделируемых СДУ с различными типами случайных возмущений, укажем цены различных типов опционов [4] и векторный процесс, описывающий динамику развития эпидемии в условиях случайной внешней среды [5].

Важным направлением в теории СДУ является исследование связи этих уравнений с детерминированными прямым и обратным уравнениями для вероятностных характеристик процессов, определяемых СДУ. Одним из принципиальных отличий уравнений для вероятностных характеристик процессов типа Леви от соответствующих уравнений для процессов диффузионного типа является наличие интегральных слагаемых, отвечающих разрывным случайным возмущениям.

Основным инструментом стохастического анализа, который позволяет установить связь между СДУ и уравнениями для вероятностных характеристик, как в случае диффузионных процессов, так и в случае процессов типа Леви, является формула Ито. Применение этой формулы для вывода прямого уравнения относительно переходной вероятности процесса приводит к появлению дважды непрерывно дифференцируемой функции f. Как показывают дальнейшие преобразования перехода от стохастического уравнения к детерминированному, функция f в этом случае становится основной функцией из некоторого основного пространства[1] Φ, и прямое уравнение допускает формализацию в пространстве обобщенных функций Φ'.

В отличие от прямого уравнения вывод на основе формулы Ито обратного уравнения относительно важной, например, в экономических задачах, вероятностной характеристики $g(t,x) := \mathbf{E}^{t,x}[h(X(T))]$ для процесса типа Леви $X = \{X(t),\, t \in [0;T]\}$ приводит к значительным техническим трудностям. Необходимым условием применения формулы Ито в этом случае является принадлежность функции g пространству $C^{1,2}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Как следует из конструкции, свойства функции g определяются свойствами функции h, которая фиксируется на этапе экономического моделирования, и свойствами процесса X. Основные исследования в этом направлении сосредоточены на поиске достаточных условий на функцию h и процесс X, при которых функция g обладает необходимой степенью гладкости и удовлетворяет обратному уравнению в классическом смысле (см., например, [2; 6]). В общем случае, без существенных условий гладкости на функцию h, которые в приложениях зачастую не выполняются, ниоткуда не следует, что функция g будет принадлежать пространству $C^{1,2}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. В этой ситуации обратное уравнение следует рассматривать в пространстве обобщенных функций.

В настоящей работе показано, во-первых, что прямое уравнение относительно переходной вероятности процессов типа Леви допускает формализацию на пространстве Φ финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций f при условиях теоремы существования и единственности решения СДУ. Во-вторых, обратное уравнение для функции g корректно на том же пространстве Φ при дополнительных к теореме существования и единственности условиях на гладкость коэффициентов СДУ.

1. Постановка задачи

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbf{P})$. Рассмотрим случайный процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$, определяемый суммой непрерывных и разрывных случайных возмущений:

$$X(t) - \xi = \int_0^t \boldsymbol{a}(s)ds + \int_0^t \boldsymbol{b}(s)dW(s) + \int_0^t \int_{|q|\geq 1} \boldsymbol{K}(s,q)N(ds,dq)$$

$$+ \int_0^t \int_{|q|<1} \boldsymbol{F}(s,q)\widetilde{N}(ds,dq), \quad t \in [0;T], \tag{1.1}$$

где

$\{W(t),\, t \geq 0\}$ — стандартный винеровский процесс;

$N(t,A)$ для любых $t \geq 0$ и ограниченного снизу множества A (т. е. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ и $0 \notin \overline{A}$) является пуассоновской случайной мерой на пространстве $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}\setminus\{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}))$;

$\widetilde{N}(t,A)$ — мартингально-значная (компенсированная) пуассоновская случайная мера на этом пространстве.

[1]Основным пространством называется линейное пространство функций с заданными свойствами, а линейные непрерывные функционалы над основным пространством называются обобщенными функциями.

Согласно определению пуассоновской случайной меры величина $N(t,\cdot)(\omega)$ при любых $\omega\in\Omega$ и $t\geq 0$ является считающей мерой на $\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, а процесс $\{N(t,A),\ t\geq 0\}$ является пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda=\nu(A):=\mathbf{E}[N(1,A)]$. Мартингальная мера определяется следующим образом: $\widetilde{N}(t,A):=N(t,A)-t\nu(A)$. Слагаемые в правой части равенства (1.1), содержащие пуассоновскую и компенсированную пуассоновскую случайные меры, отвечают разрывным случайным возмущениям, а величина dq характеризует приращение этих возмущений. В частности, для скачкообразных случайных возмущений dq характеризует величины скачков.

В равенстве (1.1) предполагается, что отображения $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\colon [0;T]\times\Omega\to\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

$$P\Big(\int_0^T \boldsymbol{a}^2(t)dt<\infty\Big)=1,\quad P\Big(\int_0^T \boldsymbol{b}^2(t)dt<\infty\Big)=1,$$

$\boldsymbol{F}\colon [0;T]\times\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ — предсказуемое отображение, удовлетворяющее условию

$$P\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |\boldsymbol{F}(t,q)|^2\nu(dq)dt<\infty\Big)=1,$$

$\boldsymbol{K}\colon [0;T]\times\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ — предсказуемое отображение и ξ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина.

Как сказано во введении, в настоящей работе будут исследованы уравнения для вероятностных характеристик случайного процесса типа Леви. В общем случае процесс типа Леви определяется стохастическим уравнением вида

$$X(t)-\xi=\int_0^t a(X(s-))ds+\int_0^t b(X(s-))dW(s)$$

$$+\int_0^t\int_{|q|\geq 1} K(X(s-),q)N(ds,dq)+\int_0^t\int_{|q|<1} F(X(s-),q)\widetilde{N}(ds,dq),\quad t\in[0;T]. \tag{1.2}$$

Известно, что если отображение $K(\cdot,q)$ является непрерывным для любого $q\geq 1$, а отображения a,b,F удовлетворяют условиям Липшица и подлинейного роста

$$\exists C_1>0\colon \forall y,z\in\mathbb{R}\Longrightarrow |a(y)-a(z)|+|b(y)-b(z)|+\int_{|q|<1}|F(y,q)-F(z,q)|\nu(dq)\leq C_1|y-z|,$$

$$\exists C_2>0\colon \forall y\in\mathbb{R}\Longrightarrow a^2(y)+b^2(y)+\int_{|q|<1}F^2(y,q)\nu(dq)\leq C_2(1+y^2),$$

то существует единственное сильное[2] решение задачи (1.2), которое является однородным марковским процессом (см., например, [7, с. 374, 388]). Исследование корректности постановки в пространствах обобщенных функций прямого и обратного уравнений для вероятностных характеристик процессов типа Леви X в настоящей работе опирается на применение общей формулы Ито для процессов указанного типа. А именно, для процесса $\{X(t),t\geq 0\}$, определяемого равенством (1.1), и произвольной функции $f\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ с вероятностью единица

[2]В рамках теории СДУ сильным решением называется процесс, удовлетворяющий п.н. равенству (1.2) и согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, порожденной случайными возмущениями, входящими в уравнение. Далее в работе под решением СДУ всегда будет подразумеваться сильное решение.

имеет место равенство (формула Ито) [2, с. 68]

$$
\begin{aligned}
f(t,X(t))-f(0,X(0)) &= \int_0^t f'_s(s,X(s-))ds+\int_0^t \boldsymbol{a}(s)f'_x(s,X(s-))ds \\
&+\int_0^t \boldsymbol{a}(s)f'_x(s,X(s-))dW(s)+\frac{1}{2}\int_0^t \boldsymbol{b}^2(s)f''_{xx}(s,X(s-))ds \\
&+\int_0^t\int_{|q|\ge 1}\big[f(s,X(s-)+\boldsymbol{K}(s,q))-f(s,X(s-))\big]N(ds,dq) \\
&+\int_0^t\int_{|q|<1}\big[f(s,X(s-)+\boldsymbol{F}(s,q))-f(s,X(s-))\big]\widetilde{N}(ds,dq)
\end{aligned}
$$

$$
+\int_0^t\int_{|q|<1}\big[f(s,X(s-)+\boldsymbol{F}(s,q))-f(s,X(s-))-\boldsymbol{F}(s,q)f'_x(s,X(s-))\big]\nu(dq)ds. \tag{1.3}
$$

2. Основные результаты

Пусть $\{X(t),t\ge 0\}$ — решение уравнения (1.2) с начальным условием $x\in\mathbb{R}$, а $P(s,z;t,B)$ — вероятность перехода процесса X из положения $z\in\mathbb{R}$ в момент времени $s\ge 0$ в одно из состояний множества $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ в момент времени $t\ge s$. Рассмотрим линейное пространство Φ — совокупность всех финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и пространство Φ' — совокупность всех линейных непрерывных функционалов на Φ. Поскольку конечное значение интеграла $\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy)$ существует для любой $f\in C_b(\mathbb{R})$ в силу свойств переходной вероятности, то на пространстве $C_c(\mathbb{R})$ (совокупность всех финитных непрерывных функций на $\mathbb{R}$) корректно определен функционал $p(0,x;t,\cdot)$ такой, что для любой $f\in C_c(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$
\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy)=\langle f(\cdot),p(0,x;t,\cdot)\rangle,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{2.1}
$$

Функционал $p(0,x;t,\cdot)$ назовем обобщенной плотностью переходной вероятности процесса $\{X(t),t\ge 0\}$. В случае, если переходная вероятность имеет классическую плотность (производную в смысле Радона — Никодима), то $p(0,x;t,\cdot)$ является регулярной обобщенной функцией и справедливо равенство $\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy)=\int_{\mathbb{R}} f(y)p(0,x;t,y)dy,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}$. Отметим, что в силу вложения $\Phi\subset C_c(\mathbb{R})$ равенство (2.1) корректно определяет функционал на пространстве Φ. Покажем, что функционал p удовлетворяет прямому уравнению в пространстве Φ'. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1.2) *начальное условие* $\xi=x\in\mathbb{R}$ *и коэффициенты* a,b,F,K *удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения* СДУ. *Тогда обобщенная плотность переходной вероятности* p*, определяемая равенством* (2.1)*, на* $f\in\Phi$ *удовлетворяет уравнению*

$$
\left\langle f(y),\frac{\partial p(0,x;t,y)}{\partial t}\right\rangle=\left\langle f(y),-\frac{\partial\left(a(y)p(0,x;t,y)\right)}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial\left(b^2(y)p(0,x;t,y)\right)}{\partial y}\right\rangle
$$

$$+\left\langle f(y), \int\limits_{|q|\geq 1} \big(p(0,x;t,y-K(y,q)) - p(0,x;t,y)\big)\,\nu(dq)\right\rangle$$

$$+\langle f(y), \int\limits_{|q|<1} \left(p(0,x;t,y-F(y,q)) - p(0,x;t,y) + \frac{\partial\,(F(y,q)p(0,x;t,y))}{\partial y}\right)\nu(dq)\rangle, \quad t>0. \quad (2.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $f \in C^2(\mathbb{R})$ и с помощью формулы (1.3) запишем уравнение для процесса $\{f(X(t)), t \geq 0\}$, где X — решение уравнения (1.2) с начальным условием $x \in \mathbb{R}$:

$$f(X(t)) - f(x) = \int\limits_0^t a(X(s-))f'(X(s-))ds + \int\limits_0^t a(X(s-))f'(X(s-))dW(s)$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t b^2(X(s-))f''(X(s-))ds$$
$$+\int\limits_0^t \int\limits_{|q|\geq 1} \big[\,f(X(s-)+K(X(s-),q)) - f(X(s-))\,\big]N(ds,dq)$$
$$+\int\limits_0^t \int\limits_{|q|<1} \big[\,f(X(s-)+F(X(s-),q)) - f(X(s-))\,\big]\widetilde{N}(ds,dq)$$
$$+\int\limits_0^t \int\limits_{|q|<1} \big[\,f(X(s-)+F(X(s-),q)) - f(X(s-)) - F(X(s-),q)f'(X(s-))\,\big]\nu(dq)ds. \quad (2.3)$$

Далее будет показано, что функции f в прямом уравнении играют роль основных функций для функционалов, определяемых переходной вероятностью процесса типа Леви.

К обеим частям равенства (2.3) применим математическое ожидание. Поскольку интегралы по винеровскому процессу и компенсированному пуассоновскому процессу являются мартингалами, получаем, что математическое ожидание от второго и пятого слагаемых правой части равенства равны нулю. Теперь для интеграла по мере N в силу независимости подынтегрального выражения от N имеем

$$\mathbf{E}\left\{\int\limits_0^t \int\limits_{|q|\geq 1} \big[\,f(X(s-)+K(X(s-),q)) - f(X(s-))\,\big]N(ds,dq)\right\}$$
$$=\int\limits_0^t \int\limits_{|q|\geq 1} \mathbf{E}\big[\,f(X(s-)+K(X(s-),q)) - f(X(s-))\,\big]\nu(dq)ds.$$

В оставшихся слагаемых правой части в силу стохастической теоремы Фубини изменим порядок интегрирования и получим

$$\mathbf{E}\big[\,f(X(t))\,\big] - f(x) = \int\limits_0^t \mathbf{E}\big[\,a(X(s-))f'(X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))f''(X(s-))\,\big]ds$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_{|q|\geq 1} \mathbf{E}\big[\,f(X(s-)+K(X(s-),q)) - f(X(s-))\,\big]\nu(dq)ds$$

$$+\int_0^t \int_{|q|<1} \mathbf{E}\big[\, f(X(s-)+F(X(s-),q)) - f(X(s-)) - F(X(s-),q)f'(X(s-))\,\big]\nu(dq)ds.$$

Далее, поскольку процессы типа Леви обладают свойством $P(X(s-)=X(s))=1$ при любом $s\geq 0$, выводим

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy) - f(x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Big[\, a(z)f'(z) + \frac{1}{2}b^2(z)f''(z)\Big] P(0,x;s,dz)ds$$

$$+\int_0^t \int_{|q|\geq 1} \int_{\mathbb{R}} \big[\, f(z+K(z,q)) - f(z)\,\big] P(0,x;s,dz)\nu(dq)ds$$

$$+\int_0^t \int_{|q|<1} \int_{\mathbb{R}} \big[\, f(z+F(z,q)) - f(z) - F(z,q)f'(z)\,\big] P(0,x;s,dz)\nu(dq)ds.$$

Правая часть полученного равенства представляет собой интеграл с переменным верхним пределом, отсюда после дифференцирования обеих частей этого равенства по параметру t получаем прямое уравнение для переходной вероятности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy) = \int_{\mathbb{R}} \Big[\, a(y)f'(y) + \frac{1}{2}b^2(y)f''(y)\,\Big] P(0,x;t,dy)$$

$$+\int_{|q|\geq 1} \int_{\mathbb{R}} \big[\, f(y+K(y,q)) - f(y)\,\big] P(0,x;t,dy)\nu(dq)$$

$$+\int_{\mathbb{R}} \int_{|q|<1} \big[\, f(y+F(y,q)) - f(y) - F(y,q)f'(y)\,\big]\nu(dq)P(0,x;t,dy). \tag{2.4}$$

Теперь переходим к формализации этого уравнения в пространстве обобщенных функций Φ'. Для этого рассмотрим функционал $p(0,x;t,\cdot)$, определяемый равенством (2.1), на пространстве Φ. Поскольку для любой функции $f\in\Phi$ существует производная по параметру t величины $\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy)$, то в силу необходимого и достаточного условия дифференцируемости обобщенной функции по параметру (см., например, [8, с. 190]) существует производная плотности $p(0,x;t,\cdot)$ по t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy) = \frac{\partial}{\partial t}\langle f(y), p(0,x;t,y)\rangle = \Big\langle f(y), \frac{\partial}{\partial t}p(0,x;t,y)\Big\rangle, \quad f\in\Phi.$$

Рассмотрим "дифференциальные" слагаемые в равенстве (2.4):

$$\int_{\mathbb{R}} \big[\, a(y)f'(y) + \frac{1}{2}b^2(y)f''(y)\,\big] P(0,x;t,dy), \quad f\in\Phi.$$

Поскольку условия теоремы существования и единственности решения стохастического уравнения (1.2) считаются выполненными, функции a,b удовлетворяют условию Липшица. Отсюда следует, что a и b^2 являются мультипликаторами в $C_c(\mathbb{R})$, т. е. произведения af' и b^2f'' определяют функции из пространства $C_c(\mathbb{R})$. Таким образом, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \Big[\, a(y)f'(y) + \frac{1}{2}b^2(y)f''(y)\,\Big] P(0,x;t,dy) = \Big\langle a(y)f'(y) + \frac{1}{2}b^2(y)f''(y), p(0,x;t,y)\Big\rangle$$

$$= \Big\langle f(y), -\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)p(0,x;t,y)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(b^2(y)p(0,x;t,y)\right)\Big\rangle, \quad f\in\Phi.$$

Переходим к формализации “интегральных” слагаемых, входящих в уравнение (2.4). Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{|q|\geq 1}\int\limits_{\mathbb{R}} \big[\, f(y+K(y,q)) - f(y)\,\big] P(0,x;t,dy)\nu(dq), \quad f\in\Phi. \tag{2.5}$$

Поскольку условия теоремы существования и единственности считаются выполненными, функция $K(\cdot,q)$ при любом $|q|\geq 1$ является непрерывной на $\mathbb{R}$, следовательно, при любом $|q|\geq 1$ имеет место включение $f(\cdot+K(\cdot,q))\in C_c(\mathbb{R})$. Тогда для интеграла (2.5) выводим представление

$$\int\limits_{|q|\geq 1}\int\limits_{\mathbb{R}} \big[\, f(y+K(y,q)) - f(y)\,\big] P(0,x;t,dy)\nu(dq) = \int\limits_{|q|\geq 1} \big\langle\, f(y+K(y,q)) - f(y), p(0,x;t,y)\big\rangle\, \nu(dq)$$

$$= \int\limits_{|q|\geq 1} \big\langle\, f(y), p(0,x;t,y-K(y,q)) - p(0,x;t,y)\big\rangle\, \nu(dq)$$

$$= \Big\langle f(y), \int\limits_{|q|\geq 1} \big(p(0,x;t,y-K(y,q)) - p(0,x;t,y)\big)\, \nu(dq)\Big\rangle, \quad f\in\Phi.$$

Наконец, рассмотрим последний интеграл правой части уравнения (2.4):

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{|q|<1} \big[\, f(y+F(y,q)) - f(y) - F(y,q)f'(y)\,\big]\nu(dq)P(0,x;t,dy), \quad f\in\Phi.$$

Поскольку условия теоремы существования и единственности считаются выполненными, для внутреннего интеграла имеет место включение

$$\int\limits_{|q|<1} \big[\, f(y+F(y,q)) - f(y) - F(y,q)f'(y)\,\big]\nu(dq)\in C_c(\mathbb{R}).$$

Тогда справедливы равенства

$$\int\limits_{|q|<1}\int\limits_{\mathbb{R}} \big[\, f(y+F(y,q)) - f(y) - F(y,q)f'(y)\,\big]\nu(dq)P(0,x;t,dy)$$

$$= \Big\langle \int\limits_{|q|<1} \big[\, f(y+F(y,q)) - f(y) - F(y,q)f'(y)\,\big]\nu(dq), p(0,x;t,y)\Big\rangle$$

$$= \Big\langle f(y), \int\limits_{|q|<1} \Big(p(0,x;t,y-F(y,q)) - p(0,x;t,y) + \frac{\partial}{\partial y}\big(F(y,q)p(0,x;t,y)\big)\Big)\nu(dq)\Big\rangle, \quad f\in\Phi.$$

Таким образом, объединяя вместе полученные равенства, получаем, что обобщенная плотность переходной вероятности p процесса $\{X(t), t\geq 0\}$ удовлетворяет прямому уравнению (2.2). $\square$

З а м е ч а н и е. В силу равенства (2.1) корректность прямого уравнения для обобщенной плотности на пространстве Φ приводит к тому, что и уравнение (2.4) для переходной вероятности корректно на этом пространстве.

Далее покажем, что обратное уравнение для вероятностной характеристики g процесса типа Леви

$$g(t,x) := \mathbf{E}^{t,x}[h(X(T))] = \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)P(t,x;T,dy), \quad t\in[0;T], \quad h\in C_b(\mathbb{R},) \tag{2.6}$$

при дополнительных условиях на коэффициенты a,b,K,F корректно на том же пространстве Φ. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть процесс* $\{X(t), t \geq 0\}$ *— решение уравнения* (1.2). *Пусть коэффициенты* a, b, *коэффициент* $F(\cdot, q)$ *при любом* $q \in (-1; 1)$, *коэффициент* $K(\cdot, q)$ *при любом* $|q| \geq 1$ *являются дважды непрерывно дифференцируемыми на* $\mathbb{R}$ *функциями. Тогда функция* g, *определяемая равенством* (2.6), *на* $f \in \Phi$ *удовлетворяет уравнению*

$$-\langle f(x), g'_t(t,x)\rangle = \Big\langle\, f(x),\ a(x)g'_x(t,x) + \frac{1}{2}b^2(x)g''_{xx}(t,x)\,\Big\rangle + \Big\langle\, f(x), \int\limits_{|q|\geq 1} \big[g(t, x+K(x,q)) - g(t,x)\big]\nu(dq)\Big\rangle$$
$$+ \Big\langle\, f(x), \int\limits_{|q|<1} \big[\,g(t, x+F(x,q)) - g(t,x) - F(x,q)g'_x(t,x)\,\big]\nu(dq)\Big\rangle, \quad t \in (0;T). \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем в *два этапа*. На *первом этапе* предположим существование непрерывных частных производных g'_t, g'_x, g''_{xx} и запишем с помощью формулы Ито уравнение для процесса $\{g(t, X(t)), t \in [0;T]\}$

$$g(t, X(t)) - g(0, X(0))$$
$$= \int\limits_0^t \Big(g'_s(s, X(s-)) + a(X(s-))g'_x(s, X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s, X(s-))\Big)\, ds$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|q|\geq 1} \big[\,g(s, X(s-) + K(X(s-), q)) - g(s, X(s-))\,\big] N(ds, dq)$$
$$+ \int\limits_0^t b(X(s-))g'_x(s, X(s-))dW(s)$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|q|<1} \big[\,g(s, X(s-) + F(X(s-), q)) - g(s, X(s-))\,\big] \widetilde{N}(ds, dq)$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|q|<1} \big[\,g(s, X(s-) + F(X(s-), q)) - g(s, X(s-)) - F(X(s-), q)g'_x(s, X(s-))\,\big]\nu(dq)ds. \tag{2.8}$$

В силу определения функции g и марковского свойства процесса X имеем

$$\mathbf{E}[g(t, X(t))] = \mathbf{E}[\mathbf{E}^{t, X(t)}[h(X(T))]]$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)P(t,x;T,dy)P(0,\xi;t,dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)P(0,\xi;T,dy) = \mathbf{E}[g(0, X(0))].$$

Следовательно, математическое ожидание правой части (2.8) равно нулю. Тогда по стохастической теореме Фубини изменим порядок интегрирования в первом и последнем слагаемых правой части равенства:

$$\int\limits_0^t \mathbf{E}\Big[\,g'_s(s, X(s-)) + a(X(s-))g'_x(s, X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s, X(s-))\,\Big] ds$$
$$+ \mathbf{E}\Big\{\int\limits_0^t \int\limits_{|q|\geq 1} \big[\,g(s, X(s-) + K(X(s-), q)) - g(s, X(s-))\,\big] N(ds, dq)\Big\}$$

$$+\mathbf{E}\Big[\int\limits_0^t b(X(s-))g'_x(s,X(s-))dW(s)\Big]$$

$$+\mathbf{E}\Big\{\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}\big[g(s,X(s-)+F(X(s-),q))-g(s,X(s-))\big]\widetilde{N}(ds,dq)\Big\}$$

$$+\int\limits_0^t\mathbf{E}\Big[\int\limits_{|q|<1}\big[g(s,X(s-)+F(X(s-),q))-g(s,X(s-))-F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))\big]\nu(dq)\Big]ds=0.$$

В силу мартингальности винеровского процесса и меры $\widetilde{N}$ третье и четвертое слагаемые равны нулю. Учитывая для второго слагаемого независимость подынтегрального выражения от меры N, получаем равенство

$$\int\limits_0^t\mathbf{E}\Big\{g'_s(s,X(s-))+a(X(s-))g'_x(s,X(s-))+\frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-))$$
$$+\int\limits_{|q|\geq 1}\big[g(s,X(s-)+K(X(s-),q))-g(s,X(s-))\big]\nu(dq)$$
$$+\int\limits_{|q|<1}\big[g(s,X(s-)+F(X(s-),q))-g(s,X(s-))-F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))\big]\nu(dq)\Big\}ds=0.$$

В силу произвольности $t\in[0;T]$ отсюда следует, что подынтегральная функция равна нулю при любом $0<s\leq t<T$:

$$\mathbf{E}\Big\{g'_s(s,X(s-))+a(X(s-))g'_x(s,X(s-))+\frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-))$$
$$+\int\limits_{|q|\geq 1}\big[g(s,X(s-)+K(X(s-),q))-g(s,X(s-))\big]\nu(dq)$$
$$+\int\limits_{|q|<1}\big[g(s,X(s-)+F(X(s-),q))-g(s,X(s-))-F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))\big]\nu(dq)\Big\}=0.$$

Если эволюция процесса началась в момент времени $t\in[0;T]$ из точки $X(t)=x\in\mathbb{R}$, то полученное равенство приводит к обратному уравнению для функции g:

$$-g'_t(t,x)=a(x)g'_x(t,x)+\frac{1}{2}b^2(x)g''_{xx}(t,x)+\int\limits_{|q|\geq 1}\big[g(t,x+K(x,q))-g(t,x)\big]\nu(dq)$$
$$+\int\limits_{|q|<1}\big[g(t,x+F(x,q))-g(t,x)-F(x,q)g'_x(t,x)\big]\nu(dq),\quad t\in(0;T). \tag{2.9}$$

Теперь переходим ко *второму этапу* — исследованию корректности полученного уравнения в пространстве обобщенных функций. Отметим важный факт: уравнение (2.9) получено при условиях существования непрерывных частных производных g'_t, g'_x, g''_{xx}. Один из основных результатов, полученных Х. Кунитой (см., например, [6]), обеспечивает существование указанных производных функции g при следующих условиях: коэффициенты a, b, F, K дважды непрерывно дифференцируемы (по переменной x), и их производные до второго порядка включительно удовлетворяют условиям Липшица и подлинейного роста; функция h является дважды непрерывно дифференцируемой и имеет ограниченные производные. При исследовании общего случая, когда $h \in C_b(\mathbb{R})$, условий дважды непрерывной дифференцируемости коэффициентов a, b, F, K уравнения (1.2) оказывается недостаточно для того, чтобы функция g обладала достаточной степенью гладкости. В этой ситуации следует рассматривать обратное уравнение для функции g в пространстве обобщенных функций Φ'.

Для начала отметим, что для произвольной $h \in C_b(\mathbb{R})$ имеет место принадлежность $g(\cdot, t) \in C_b(\mathbb{R})$ при любом $t \in [0; T]$ (см., например, [7, с. 402]). Тогда на пространстве C_c, а следовательно, и на пространстве Φ, при любом $t \in [0; T]$ корректно определен функционал $g(\cdot, t)$. Более того, для любого $t \in (0; T)$ определена производная g'_t этого функционала по параметру. Далее, пусть коэффициенты a, b, коэффициент $F(\cdot, q)$ при любом $q \in (-1; 1)$, коэффициент $K(\cdot, q)$ при любом $|q| \geq 1$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ функциями. При указанных предположениях для произвольной $f \in \Phi$ произведения $af, b^2 f$ и $F(\cdot, q)f(\cdot)$ при любом $q \in (-1; 1)$ определяют функции из пространства Φ. В этом случае равенства

$$\begin{aligned}
\langle f(x), a(x)g'_x(t,x)\rangle &= -\langle (a(x)f(x))', g(t,x)\rangle, \qquad t \in (0;T),\\
\langle f(x), b^2(x)g''_{xx}(t,x)\rangle &= \langle (b^2(x)f(x))'', g(t,x)\rangle, \qquad t \in (0;T),\\
\langle f(x), F(x,q)g'_x(t,x)\rangle &= -\langle (F(x,q)f(x))', g(t,x)\rangle, \quad q \in (-1;1), \quad t \in (0;T),
\end{aligned}$$

корректно определяют частные производные g'_x, g''_{xx} на Φ. Далее, для произвольной $f \in \Phi$ при любом $|q| \geq 1$ имеет место включение $f(\cdot - K(\cdot, q)) \in \Phi$, а при любом $q \in (-1; 1)$ — включение $f(\cdot - F(\cdot, q)) \in \Phi$, тогда на Φ корректны равенства

$$\begin{aligned}
\langle f(x), g(t, x + K(x,q))\rangle &= \langle f(x - K(x,q)), g(t,x)\rangle, \quad |q| \geq 1, t \in (0;T),\\
\langle f(x), g(t, x + F(x,q))\rangle &= \langle f(x - F(x,q)), g(t,x)\rangle, \quad q \in (-1;1), t \in (0;T).
\end{aligned}$$

С помощью полученных соотношений определим в пространстве Φ интегральные слагаемые уравнения (2.9):

$$\int\limits_{|q|\geq 1} \big[\, \big\langle f(x - K(x,q)), g(t,x)\big\rangle - \big\langle f(x), g(t,x)\big\rangle \,\big]\nu(dq)$$

$$= \int\limits_{|q|\geq 1} \big\langle\, f(x), g(t, x + K(x,q)) - g(t,x)\,\big\rangle \nu(dq) = \Big\langle\, f(x), \int\limits_{|q|\geq 1} \big[\, g(t, x + K(x,q)) - g(t,x)\,\big]\nu(dq)\,\Big\rangle,$$

$$\int\limits_{|q|<1} \big\langle f(x - F(x,q)), g(t,x)\big\rangle - \big\langle f(x), g(t,x)\big\rangle + \big\langle (F(x,q)f(x))', g(t,x)\big\rangle \nu(dq)$$

$$= \int\limits_{|q|<1} \big\langle f(x), g(t, x + F(x,q)) - g(t,x) - F(x,q)g'_x(t,x)\big\rangle \nu(dq)$$

$$= \Big\langle\, f(x), \int\limits_{|q|<1} \big[g(t, x + F(x,q)) - g(t,x) - F(x,q)g'_x(t,x)\big]\nu(dq)\,\Big\rangle.$$

Собрав вместе полученные равенства, получаем, что обратное уравнение (2.7) для функции g корректно на пространстве Φ. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Protter P.E.** Stochastic integration and differential equations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 415 p. doi: 10.1007/978-3-662-10061-5 .
2. **Kunita H.** Stochastic flows and jump-diffusions. Singapore: Springer, 2019. 352 p. doi: 10.1007/978-981-13-3801-4 .

3. **Kolokoltsov V.N.** Markov processes, semigroups and generators. Berlin: Birkhäuser, 2011. 430 p. (De Gruyter Studies in Mathematics, 38) doi: 10.1515/9783110250114.
4. **Cont R., Tankov P.** Financial modelling with jump processes. 1st ed. N Y: Chapman and Hall/CRC, 2003. 552 p. doi: 10.1201/9780203485217.
5. **Liu Y., Zhang Y., Wang Q.** A stochastic SIR epidemic model with Levy jump and media coverage // Advances in Difference Equations. 2020. Vol. 2020, P. 1-15. doi.org/10.1186/s13662-020-2521-6.
6. **Kunita H.** Ito's stochastic calculus: Its surprising power for applications // Stochastic Processes and their Applications. 2010. Vol. 120, no. 5. P. 622-652. /10.1016/j.spa.2010.01.013.
7. **Applebaum D.** *Levy processes and stochastic calculus.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 492 p. doi: 10.1017/CBO9780511809781.
8. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции. Выпуск 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.

Поступила 10.03.2020
После доработки 20.04.2020
Принята к публикации 27.04.2020

Бовкун Вадим Андреевич
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры математического анализа
Уральского Федерального Университета
г. Екатеринбург
e-mail: Vadim.Bovkun@urfu.ru

REFERENCES

1. Protter P.E. *Stochastic integration and differential equations.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005, 415 p. doi: 10.1007/978-3-662-10061-5.
2. Kunita H. Stochastic flows and jump-diffusions. Singapore: Springer, 2019. 352 p. doi: 10.1007/978-981-13-3801-4.
3. Kolokoltsov V.N. *Markov processes, semigroups and generators.* Berlin: Birkhäuser, 2011. 430 p. (De Gruyter Studies in Mathematics, 38) doi: 10.1515/9783110250114.
4. Cont R., Tankov P. *Financial modelling with jump processes.* 1st ed. N Y: Chapman and Hall/CRC, 2003, 552 p. doi: 10.1201/9780203485217.
5. Liu Y., Zhang Y., Wang Q. A stochastic SIR epidemic model with Levy jump and media coverage. *Advances in Difference Equations*, 2020, vol. 2020, pp. 1-15. doi: 10.1186/s13662-020-2521-6.
6. Kunita H. Ito's stochastic calculus: Its surprising power for applications. *Stochastic Processes and their Applications*, 2010, vol. 120, no. 5, pp. 622-652. doi: 10.1016/j.spa.2010.01.013.
7. Applebaum D. *Levy processes and stochastic calculus.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 492 p. doi: 10.1017/CBO9780511809781.
8. Gelfand I.M., Shilov G.E. *Generalized functions*, vol. 1: Properties and Operations. Providence: AMS Chelsea Publishing, 2016. 423 p. doi: 10.1090/chel/377. Originally published in Russian in 1958. Originally published in English as 5 volume set. Vol. 1. N Y: Acad. Press, 1964.

Received March 10, 2020
Revised April 20, 2020
Accepted April 27, 2020

Vadim Andreevich Bovkun, Cand. Phys.-Math. Sci., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: Vadim.Bovkun@urfu.ru.

Cite this article as: V. A. Bovkun. Forward and backward equations for the probability characteristics of Levy type processes in spaces of distributions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 68–78.