ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.977

# ВЫПУКЛОСТЬ И МОНОТОННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ С НЕПРЕРЫВНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

**А. Р. Алимов**

Непрерывная кривая $k(\,\cdot\,)$ в линейном нормированном пространстве $X$ называется монотонной, если функция $f(k(\tau))$ монотонна по $\tau$ для любого экстремального функционала $f$ из единичной сферы $S^*$ сопряженного пространства. Замкнутое множество называется монотонно линейно связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве. Устанавливается, что в трехмерном банаховом пространстве любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией монотонно линейно связно, если и только если норма пространства является цилиндрической или гладкой. Этот результат частично обобщает недавний результат автора этой статьи и Б. Б. Беднова, которые охарактеризовали трехмерные банаховы пространства, в которых всякое чебышёвское множество монотонно линейно связно. Мы показываем, что в конечномерном пространстве любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу (непрерывной) метрической проекцией выпукло, если и только если пространство гладко. Получен ряд новых свойств строгих солнц в трехмерных пространствах с цилиндрической нормой. Показано, что в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой замкнутое множество $M$ с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем. Более того, такое множество $M$ имеет стягиваемые пересечения с замкнутыми шарами и обладает непрерывной выборкой из метрической проекции. При доказательстве результатов важную роль играет новый аппарат аппроксимации единичной сферы пространства многогранниками, построенными по касательным направлениям сферы.

Ключевые слова: множество с непрерывной метрической проекцией, чебышёвское множество, солнце, монотонно линейно связное множество.

**A. R. Alimov. Convexity and monotone linear connectivity of sets with a continuous metric projection in three-dimensional spaces.**

A continuous curve $k(\,\cdot\,)$ in a normed linear space $X$ is called monotone if the function $f(k(\tau))$ is monotone with respect to $\tau$ for any extreme functional $f$ of the unit dual sphere $S^*$. A closed set is monotone path-connected if any two points from it can be connected by a continuous monotone curve lying in this set. We prove that in a three-dimensional Banach space any closed set with lower semi-continuous metric projection is monotone path-connected if and only if the norm of the space is either cylindrical or smooth. This result partially extends a recent result of the author of this paper and B. B. Bednov, who characterized the three-dimensional spaces in which any Chebyshev set is monotone path-connected. We show that in a finite-dimensional Banach space any closed set with lower semi-continuous (continuous) metric projection is convex if and only if the space is smooth. A number of new properties of strict suns in three-dimensional spaces with cylindrical norm is put forward. It is shown that in a three-dimensional space with cylindrical norm a closed set $M$ with lower semi-continuous metric projection is a strict sun. Moreover, such a set $M$ has contractible intersections with closed balls and possesses a continuous selection of the metric projection operator. Our analysis depends substantially on the novel machinery of approximation of the unit sphere by polytopes built from tangent directions to the unit sphere.

Keywords: set with continuous metric projection, Chebyshev set, sun, monotone path-connected set.

**MSC:** 41A65

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-28-46

## 1. Введение и формулировка основных результатов

Величиной наилучшего приближения, или расстоянием от заданного элемента $x$ линейного нормированного пространства $X$ до заданного непустого множества $M \subset X$, называется

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №18-01-00333-а, 19-01-00332-а) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ 6222.2018.1).

величина $\rho(x,M) := \inf_{y\in M} \|x-y\|$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения) из множества $M$ для заданного $x\in X$ обозначается $P_Mx$. Иными словами, $P_Mx := \big\{y \in M \mid \rho(x,M) = \|x-y\|\big\}$. Отображение $x\mapsto P_Mx$ называется *метрической проекцией* точки $x$ на множество $M$.

Отображение $F: X\to 2^Y$ называется *полунепрерывным снизу*, если множество $f^{-1}(U) = \{x\in X \mid f(x)\cap U\neq\varnothing\}$ открыто для всякого открытого множества $U\subset Y$. Это определение эквивалентно следующему (см. [1, § 5]):

$$\text{для любых } x_0\in X,\ x_n\to x_0 \text{ и любого } y\in F(x_0) \text{ найдется последовательность } y_n\in F(x_n),\ n\in\mathbb{N}, \text{ такая, что } y_n\to y \text{ при } n\to\infty. \tag{1.1}$$

Отображение $F: X\to 2^X$ называется $\mathrm{h}$-*непрерывным* (*непрерывным по Хаусдорфу*), если для любых $x\in X$ и $(x_n)\subset X$ из условия $x_n\to x$ следует $\mathrm{h}(Fx_n,Fx)\to 0$, где $\mathrm{h}(Fx_n,Fx)$ — хаусдорфово расстояние между множествами $Fx_n$ и $Fx$. Хорошо известно, что если $M$ имеет компактные пересечения с замкнутыми шарами (такое множество называется ограниченно компактным), то метрическая проекция $P_M$ полунепрерывна сверху, а ее полунепрерывность снизу эквивалентна непрерывности по Хаусдорфу (см. [10]).

Ниже мы изучаем структурные свойства замкнутых множеств с полунепрерывной снизу метрической проекцией (непрерывной метрической проекцией) в конечномерных нормированных пространствах. Ставится задача описания пространств, в которых такие множества характеризуются в терминах более слабых, чем выпуклость. В качестве такой характеристики рассматривается свойство монотонной линейной связности множества (см. определение 1 ниже). Целью работы является характеризация пространств размерности $\leqslant 3$, в которых любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией монотонно линейно связно (теорема 1). В частности, показывается, что такое множество монотонно линейно связно в трехмерных пространствах вида $Y\oplus_\infty\mathbb{R}$ (где $\dim Y = 2$). Доказательство теоремы 1 потребовало решения давно стоящей задачи о строгой солнечности множества с непрерывной метрической проекцией. Ответ (в нужном нам частном случае трехмерных пространств с цилиндрической нормой) получен в теореме 2. В теореме 3 дается характеризация конечномерных пространств, в которых замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией выпукло (характеризационным свойством является гладкость пространства). Основными результатами работы являются теоремы 1–3.

В настоящей статье мы продолжаем исследования, начатые автором и Б. Б. Бедновым. В них была решена задача описания трехмерных пространств, в которых чебышёвские множества монотонно линейно связны (см. теорему A ниже).

Определение 1. Пусть $k(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве $X$. Кривая $k(\,\cdot\,)$ называется *монотонной*, если функция $f(k(\tau))$ монотонна по $\tau$ для любого экстремального функционала $f$ из единичной сферы $S^*$ сопряженного пространства. Замкнутое множество называется *монотонно линейно связным* (см. [1, § 9]), если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве.

Монотонная линейная связность является более сильным свойством, чем линейная связность и более слабым, чем выпуклость. К примеру, единичная окружность на плоскости линейно связна, но не монотонно линейно связна. Координатный крест в пространстве $\ell^\infty_2$ монотонно линейно связен, но не является выпуклым. Классическим примером монотонно линейно связного множества является множество (обобщенных) дробно-рациональных функций в пространстве $C(Q)$ с чебышёвской нормой (см. [1]).

Понятие монотонной линейной связности оказалось важным во многих задачах теории приближений. Например, с использованием аппарата монотонной линейной связности солнечность чебышёвского множества впервые была установлена при ограничениях типа связности (см. [1, § 9.2; 25]). Различные варианты монотонной связности (слабая монотонная связность, устойчивая монотонная связность) и их приложения к вопросу существования непрерывных выборок из множеств наилучших и почти наилучших приближений недавно исследовались И. Г. Царьковым [24–26] в симметричном и несимметричном случаях.

Точка $s$, лежащая на границе единичного шара $B$, называется точкой *гладкости* шара $B$ (единичной сферы $S$), если опорная гиперплоскость к шару $B$ в точке $s$ единственна (иными словами, если норма пространства дифференцируема по Гато в точке $s$). Множество точек гладкости сферы $S$ обозначается через $\operatorname{sm} S$. Напомним, что если $X_1$, $X_2$ — линейные нормированные пространства, то *$\ell^\infty$-прямой суммой* $X_1 \oplus_\infty X_2$ пространств $X_1$ и $X_2$ называется прямая сумма $X_1 \oplus X_2$ с нормой $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}\}$.

Следующая основная теорема описывает трехмерные нормированные пространства, в которых любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу (непрерывной) метрической проекцией монотонно линейно связно.

**Теорема 1.** *В трехмерном нормированном пространстве $X$ любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу* (*непрерывной*) *метрической проекцией монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий*:

1) *пространство $X$ гладко* (*т. е.* $\operatorname{sm} S = S$);
2) *пространство $X$ имеет цилиндрическую норму, т. е.* $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, $\dim Y = 2$.

Определение 2. Пусть $\varnothing \ne M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \ne \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что

$$y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big) \quad \text{для всех } \lambda \geqslant 0 \tag{1.2}$$

(это геометрически означает, что из точки $y$ исходит "солнечный" луч, проходящий через $x$, для каждой точки которого точка $y$ является ближайшей из $M$). Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \ne \varnothing$ и условие (1.2) выполнено для любой точки $y \in P_M x$.

Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно строгой солнечности) для $M$.

Согласно недавним исследованиям, свойства солнечности и локальной солнечности оказались тесно связанными с одной важной задачей геометрической оптики, в которой изучаются решения уравнения эйконала с особенностями в некотором фиксированном подмножестве области определения (см., например, [1; 17; 23; 27]). "Солнца" являются наиболее естественными объектами, для которых выполнен обобщенный критерий Колмогорова элемента наилучшего приближения (лемма C). Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса (см., например, [1] и лемму C ниже).

Замечание 1. На нормированной плоскости любое солнце, а значит, и любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией (см. (2.1) ниже), монотонно линейно связно (см. [6]) и обратно, замкнутое монотонно линейно связное подмножество нормированной плоскости является солнцем (см. [6; 13]).

Множество $M$ называется *чебышёвским множеством*, если оно есть множество существования и единственности, т. е. если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x$ одноточечно.

Напомним, что точка $s \in S$ называется *достижимой* точкой шара $B$, если найдется опорная гиперплоскость $H$ к шару $B$ в точке $s$ такая, что $H \cap B = \{s\}$.

Ниже через $\exp S$ мы обозначаем множество всех достижимых точек сферы $S$.

Следующий результат получен автором и Б. Б. Бедновым (см., например, [8]). В этой теореме достаточность доказана автором настоящей работы, необходимость — Б. Б. Бедновым. В теореме A доказательство достаточности во многом повторяет рассуждения при доказательстве достаточности в теореме 1 настоящей работы, но проще, поскольку в конечномерном случае метрическая проекция на чебышёвское множество непрерывна. Необходимость в теореме A идейно восходит к недавно построенному Б. Б. Бедновым примеру не монотонно линейно связного множества в пространстве $\ell^1_3$. Соответствующее множество строится как дополнение невыпуклого объединения нескольких открытых полупространств, касающихся единичной сферы по негладкой достижимой точке.

**Теорема A.** *В трехмерном нормированном пространстве $X$ любое чебышёвское множество монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий*:

1) *любая достижимая точка единичной сферы пространства $X$ является точкой гладкости* ($\exp S \subset \operatorname{sm} S$);

2) *пространство $X$ имеет цилиндрическую норму, т. е. $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$.*

Теорема 1 частично обобщает и усиливает теорему A.

З а м е ч а н и е 2. В конечномерном пространстве любое чебышёвское множество является солнцем. Поэтому (см. замечание 1) на нормированной плоскости любое чебышёвское множество монотонно линейно связно.

Строгие солнца и множества с полунепрерывной снизу метрической проекцией обладают рядом общих свойств. Например, в линейном нормированном пространстве $X$ для каждого множества $M$, принадлежащего любому из этих классов множеств, выполняется включение

$$\operatorname{conv} P_M x \subset S(x, \rho(x, M)) \quad \text{для любого} \quad x \in X \tag{1.3}$$

(см., например, [5]), т. е. выпуклая оболочка множества ближайших точек для любой точки $x \notin M$ содержится в собственной грани соответствующей сферы. Для солнц, не являющихся строгими солнцами, утверждение (1.3) может нарушаться даже в двумерном случае. Н. В. Невесенко (см. [18]) охарактеризовал банаховы пространства, в которых класс ограниченно компактных строгих солнц совпадает с классом ограниченно компактных непустых замкнутых множеств, имеющих полунепрерывную снизу метрическую проекцию. Такой класс пространств (который Н. В. Невесенко обозначает (RBR)) определяется следующим свойством: для любого $f \in S^*$ пересечение гиперплоскости $\{x \in X \mid f(x) = 1\}$ с единичным шаром либо пусто, либо одноточечно, либо является строго выпуклым телом в этой гиперплоскости. Понятно, что никакое трехмерное пространство с цилиндрической нормой не лежит в классе (RBR), поэтому в любом таком пространстве существует замкнутое выпуклое множество с разрывной метрической проекцией (см. [19, теорема 4]).

При изучении геометрических свойств множеств с непрерывной метрической проекцией И. Г. Царьков [22, теорема 2.2] установил, в частности, что

замкнутое подмножество конечномерного нормированного пространства с полунепрерывной снизу метрической проекцией является ($P$-ацикличным) солнцем. (1.4)

О п р е д е л е н и е 3. Замкнутое множество $M \neq \varnothing$ называется *унимодальным* (или *LG-множеством*, *глобальным минимизатором*; см., например, [1, § 3.3]), если для любой точки $x \notin M$ каждый локальный минимум функции расстояния $\Phi_x(y) = \|y - x\|$, $y \in M$, является глобальным, что объясняет происхождение термина “LG-множество” (local-global). Иными словами, из того, что $y \in P_{M \cap B(y,\varepsilon)}x$ при некотором $\varepsilon > 0$, следует, что $y \in P_M x$.

З а м е ч а н и е 3. Хорошо известно, что унимодальными являются любое строгое солнце и любое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией (см., например, [1, § 3.3]).

О п р е д е л е н и е 4. Если Q обозначает некоторое свойство (например, “связность”), мы будем говорить, что замкнутое множество $M$ обладает свойством

$B$-Q, если $M \cap B(x,r)$ обладает свойством Q или пусто при всех $x \in X$, $r > 0$.

Множество называется *$B$-солнцем*, если любое его непустое пересечение с произвольным замкнутым шаром является солнцем.

Автор [4] показал, что

$$B\text{-солнечное унимодальное множество является строгим солнцем.} \tag{1.5}$$

В трехмерных пространствах с цилиндрической нормой мы обобщаем указанные выше результаты (1.4), (1.5) следующим образом.

**Теорема 2.** *В трехмерном пространстве с цилиндрической нормой замкнутое множество $M$ с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем.*

*Более того, такое множество $M$ является $B$-стягиваемым, $B$-ретрактом, и на него существует непрерывная выборка из метрической проекции.*

З а м е ч а н и е 4 (аналог теоремы 2 для пространства $\ell^\infty_n$). *В пространстве $\ell^\infty_n$ замкнутое множество $M$ с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем.* Действительно, множество $M$ унимодально как множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией и является солнцем по (1.4). Теперь требуемый результат следует из (1.5), поскольку в $\ell^\infty_n$ любое солнце является $B$-солнцем (см. [5, § 4]).

З а м е ч а н и е 5. В условиях теоремы 2 существует строгое солнце (и, более того, замкнутое выпуклое множество), метрическая проекция на которое не полунепрерывна снизу (по поводу более общего результата см. [19, теорема 4]). Это показывает, что обратная импликация в первом утверждении теоремы 2 неверна.

З а м е ч а н и е 6. На нормированной плоскости любое солнце (а значит, и любое замкнутое множество с полунепрерывной метрической проекцией) монотонно линейно связно (см. замечание 1) и, как следствие, является $B$-солнцем. Поэтому в силу (1.5) на нормированной плоскости замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем.

Конечномерные пространства, в которых любое *ограниченное* множество существования с полунепрерывной снизу метрической проекцией выпукло, описываются следующим образом (И. Г. Царьков [22]): множество крайних точек $\operatorname{ext} S^*$ сопряженной сферы $S^*$ плотно в ней. В следующей теореме дается решение задачи о характеризации конечномерных пространств, в которых всякое множество с непрерывной метрической проекцией выпукло. Удивительно, но эта задача ранее по-видимому не рассматривалась.

**Теорема 3.** *В конечномерном пространстве замкнутое множество с полунепрерывной снизу* (*непрерывной*) *метрической проекцией выпукло, если и только если пространство является гладким.*

З а м е ч а н и е 7. Напомним, что задача характеризации пространств, в которых любое чебышёвское множество выпукло, решена только для размерностей $\leqslant 4$ (см. [12]). В отличие от упомянутой ситуации, в теореме 3 ответ дается для любой конечной размерности $n$.

В работе важную роль играет аппарат выпуклости множества по направлениям и, в частности, леммы D и E о выпуклости солнц по касательным направлениям единичной сферы.

## 2. Вспомогательные результаты

Всюду ниже:
$X$ — действительное линейное нормированное пространство;
$B(x,r)$ и $S(x,r)$ — соответственно, замкнутый шар и сфера с центром $x$ и радиусом $r$;
$\mathring{B}(x,r)$ — открытый шар с центром $x$ и радиусом $r$.
В частном случае мы полагаем:
$B := B(0,1)$ — единичный шар;
$\mathring{B} := \mathring{B}(0,1)$ — открытый единичный шар;
$S = S(0,1)$ — единичная сфера;
$S^*$ — единичная сфера сопряженного пространства;
$\operatorname{ext} S$ — множество крайних (экстремальных) точек сферы $S$;
$\operatorname{ri} A$ и $\operatorname{rb} A$ — соответственно, относительная внутренность и относительная граница выпуклого множества $A$.

При изучении геометрических свойств солнц в конечномерных нормированных пространствах А. Л. Браун (см. [13; 14; 16; 1, п. 9.3]) ввел важный класс (BM) линейных нормированных пространств. В таких пространствах оказалось возможным установить ряд нетривиальных результатов о геометрическо-топологических свойствах солнц и близких к ним множеств.

Напомним, что линейное нормированное пространство $X$ называется (BM)-*пространством*, если

$$B(0,\|x\|)\cap\big(\mathrm{m}(x,y)\setminus\{x\}\big)\neq\varnothing,\quad \text{когда}\ \ [x,x-y]\cap\mathring{B}(0,\|x\|)=\varnothing,\ \ x\neq 0.$$

Здесь и далее $\mathrm{m}(x,y)$ — пересечение всех замкнутых шаров, содержащих точки $x,y$ (оболочка Банаха—Мазура точек $x$ и $y$).

Класс (BM)-пространств содержит все гладкие пространства, все двумерные пространства с полиэдральным единичным шаром, пространства $\ell^\infty_n$, $c_0$, $c$, $\ell^\infty$ (см. [1]). Строго выпуклое пространство лежит в классе (BM) тогда и только тогда, когда оно гладкое [13]. Пространства $\ell^1$, $\ell^1_n$, $n\geqslant 3$, не принадлежат классу (BM).

Воспользуемся результатами А. Л. Брауна, который охарактеризовал двумерные и трехмерные (BM)-пространства.

**Лемма A** [13, теорема 5.5]. *Для нормированной плоскости $X$ следующие условия эквивалентны*:

a) $X\in$ (BM);

b) $\operatorname{sm} S^*\cap\operatorname{ext} S^*\subset\exp S^*$;

c) *если $x\in S$, то или $x\in\operatorname{sm} S$ или $s$ — общая крайняя точка двух отрезков, лежащих в сфере $S$.*

Как следствие полиэдральное двумерное пространство лежит в классе (BM).

**Лемма B** [15, теорема 5.1]. *Трехмерное пространство $X$ лежит в классе* (BM), *если и только если $X$ или является гладким пространством, или имеет вид $X=Y\oplus_\infty\mathbb{R}$, где $Y$ — двумерное* (BM)*-пространство.*

Известно, что ограниченно компактное монотонно линейно связное подмножество банахова пространства является солнцем (см. [1, теорема 9.3]). Однако имеются примеры конечномерных пространств (любой размерности $\geqslant 3$), содержащих не монотонно линейно связные чебышёвские множества и солнца (см., например, [1, пример 9.1]).

Х. Беренс и Л. Хетцельт установили метрическую выпуклость (относительно так называемой ассоциированной нормы) солнц в произвольных двумерных пространствах и в пространстве $\ell^\infty_n$ (см. [1]). А. Л. Браун [13, теорема 4.2] установил метрическую выпуклость солнц в конечномерных (BM)-пространствах. Как следствие [6, теорема 4.1]

произвольное солнце на нормированной плоскости и в конечномерных (BM)-пространствах монотонно линейно связно. (2.1)

Для негладких конечномерных пространств иной структуры (и размерности $\geqslant 3$) вопрос о монотонной линейной связности солнц ранее не был исследован. В бесконечномерном случае И. Г. Царьков недавно установил, что ограниченно компактное солнце в пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связно (см. также [6]).

З а м е ч а н и е 8. Трехмерное пространство с цилиндрической нормой вида

$$X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$$

не обязательно лежит в классе (BM) — достаточно в качестве $Y$ взять пространство со строго выпуклым негладким шаром (см. лемму B). Поэтому достаточность в теореме 1 не вытекает из (2.1) и (1.4).

З а м е ч а н и е 9. Из теоремы 3 следует, что в случае выполнения условия 1) теоремы 1 в пространстве $X$ любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией выпукло (и, значит, монотонно линейно связно).

О п р е д е л е н и е 5. Ниже под *плоскостью* мы будем понимать двумерное аффинное подпространство в $X$. Если $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ — трехмерное пространство с цилиндрической нормой, то под *координатной плоскостью* мы будем понимать либо плоскость, параллельную основанию единичного шара $B$ (цилиндра), либо плоскость, параллельную двумерной плоскости, натянутой на образующую цилиндра $B$ и некоторое касательное направление к единичной сфере $S_Y$ пространства $Y$.

В частности, плоскость, параллельная двумерной боковой грани цилиндра $B$ (если такая имеется), является координатной. На любой плоскости $H$ рассматривается норма, индуцированная нормой пространства $X$ на $H$ (в качестве начала координат плоскости $H$ можно брать любую точку $\theta$ из $H$; единичный шар $B_H$ пространства $H$ определяется пересечением $B(\theta, 1) \cap H$). В случае $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ плоскости, параллельные плоскости $Y$ (или, что то же самое, основанию цилиндра — единичного шара $B$ пространства $X$), будем называть *главными координатными плоскостями*.

Напомним (см. [1, § 3.2]), что множество

$$\mathring{K}(y, x) = \bigcup_{r>0} \mathring{B}\bigl(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x - y\|\bigr), \tag{2.2}$$

состоящее из гомотетичных раздутий шара $\mathring{B}(x, \|x - y\|)$ относительно граничной точки $y$, называется *опорным конусом* к шару $B(x, \|x - y\|)$. Следующий результат (см., например, [1, теорема 3.1]) является аналогом классического критерия Колмогорова ближайшего элемента при приближении подпространствами и, более общо, выпуклыми множествами.

**Лемма C.** *Множество $M \subset X$ является солнцем в $X$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x$ такая, что $\mathring{K}(y, x) \cap M = \varnothing$.*

Далее напомним следующее определение.

О п р е д е л е н и е 6 (см. [3]). Для точки $y \in S$ через $\Lambda_y$ обозначим множество предельных точек выражения $(y - z)/\|y - z\|$ при $z \to y$, $z \in S$ (т. е. $\Lambda_y$ — *множество полукасательных направлений* к сфере $S$ в точке $y$). Направление $d$ называется (глобально) *касательным направлением* для сферы $S$, если для любой точки $y \in S$ условие опорности направления $d$ в точке $y$ влечет, что $d \in \Lambda_y$, т. е. направление $d$ является касательным в точке $y$. Множество $M$ называется *выпуклым по направлению* $d$, если из того, что $x, y \in M$, $(y - x) \parallel d$, вытекает, что $[x, y] \subset M$.

Нам потребуются два недавних результата о выпуклости солнц по касательным направлениям единичной сферы, доказанные автором и Е. В. Щепиным.

**Лемма D** [2, теорема 2.4]. *В нормированном пространстве солнце выпукло по любому касательному направлению единичной сферы.*

**Лемма E** [3, теорема 2]. *Подмножество двумерного банахова пространства является солнцем, если и только если оно замкнуто, связно и выпукло по любому касательному направлению сферы.*

Докажем ещё несколько вспомогательных результатов.

**Лемма 1.** *Пусть $M$ — множество существования с полунепрерывной метрической проекцией в трехмерном пространстве $X$ с цилиндрической нормой, $H$ — главная координатная плоскость в $X$ и пусть $M \cap H \neq \varnothing$. Тогда*

$$M \cap H \text{ — солнце в } H.$$

Доказательство. Согласно (1.4) $M$ — солнце в $X$. По лемме D множество $M$ выпукло по любому касательному направлению (к шару пространства $X$ и, следовательно, к шару пространства $H$). По лемме E будет доказано, что $M$ — солнце в $H$, если мы покажем, что множество $M' := M \cap H$ связно. Предположим, рассуждая от противного, что множество $M'$ несвязно в $H$. Тогда (см., например, [1, теорема 5.2]) множество $M'$ также не $P$-связно в $H$ (т. е. для некоторой точки $x \in H$ множество ее ближайших точек из $M'$ относительно нормы $\|\cdot\|_H$ несвязно). Не ограничивая общности, можно считать, что $0 \in H$, $x = 0$, $\rho_H(0, M') = 1$. Имеем: пересечение $B_H \cap M'$ несвязно, $\mathring{B}_H \cap M' = \varnothing$, где $\mathring{B}_H$ — открытый единичный шар в $H$. Поэтому мы можем выбрать точки $u, v \in B_H \cap M'$ из различных компонент связности множества $B_H \cap M'$, $u \neq v$ (ясно, что $u, v$ — ближайшие точки из $M'$ для $0$ на плоскости $H$). Плоскость $H$ разбивает пространство $X$ на два открытых полупространства $\Pi^\pm$. Обозначим $\mathring{B}_H^\pm := \{z \in \Pi^\pm \mid z = y + w, \text{ где } y \in \mathring{B}_H,\ w \in 0 \oplus_\infty \mathbb{R}\}$ (запись $w \in 0 \oplus_\infty \mathbb{R}$ означает, что проекция точки $w$ на плоскость $H$ вдоль образующей цилиндра $B$ есть точка $0$).

Теорема 1 из [5] утверждает, в частности, что если $N$ — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в банаховом пространстве размерности $n \leqslant 3$, то $N$ является солнцем и имеет стягиваемые пересечения с замкнутыми шарами. Отсюда вытекает (см. [1, § 5]), что множество $M$ $\mathring{B}$-связно, т. е. имеет связные пересечения с открытыми шарами. Поскольку по сказанному выше $\mathring{B}_H \cap M = \varnothing$ и так как множество $\mathring{B}_H$ разделяет шар $\mathring{B}$, то

$$M \cap (\mathring{B}_H^+ \cap \mathring{B}) = \varnothing \quad \text{или} \quad M \cap (\mathring{B}_H^- \cap \mathring{B}) = \varnothing. \tag{2.3}$$

Без ограничения общности считаем, что выполнен первый случай, т. е. “верхняя половинка” цилиндра $B$ не имеет точек из $M$ в своей внутренности.

Рассмотрим точку $w_\alpha := (1 - \alpha)u + (0 \oplus_\infty \alpha)$. По хорошо известной эквивалентности

$$B(\xi, r) \subset B(\xi', r') \iff \|\xi - \xi'\| \leqslant r' - r$$

имеем, что при $0 < \alpha < 1/2$ шар $B(w_\alpha, \alpha)$ содержится в $B(0, 1)$, а при малых $\alpha > 0$ он лежит в замыкании полупространства $\Pi^+$, поэтому $\mathring{B}(w_\alpha, \alpha) \subset (\mathring{B}_H^+ \cap \mathring{B})$ при малых $\alpha > 0$. Так как по (2.3) $M \cap (\mathring{B}_H^+ \cap \mathring{B}) = \varnothing$, то $M \cap \mathring{B}(w_\alpha, \alpha) = \varnothing$, и поскольку $\|u - w_\alpha\| = \alpha$, то $u$ — ближайшая точка из $M$ для точки $w_\alpha$. По лемме C $\mathring{K}(u, w_\alpha) \cap M = \varnothing$, что вместе с представлением (2.2) для опорного конуса $\mathring{K}(u, w_\alpha)$ влечет, что $\mathring{B}(w_1, 1) \cap M = \varnothing$ (напомним, что $w_1 = 0 \oplus_\infty 1$ по определению точки $w_\alpha$). Ясно, что $u \in S(w_1, 1)$. По построению $B(w_1, 1) \cap H = B_H$, поэтому $v \in S(w_1, 1)$. Таким образом, поскольку $\mathring{B}(w_1, 1) \cap M = \varnothing$ и $u, v \in S(w_1, 1)$, то $u, v \in P_M w_1$.

Один известный результат И. Г. Царькова (см. [22, лемма 2.5]) утверждает, что если $N$ — замкнутое подмножество конечномерного нормированного пространства с полунепрерывной снизу метрической проекцией, $\xi \notin N$, $r := \rho(\xi, N)$, то найдется грань $A$ сферы $S(\xi, r)$ такая, что

$$P_N\xi \subset A \quad \text{и} \quad \operatorname{ri} A \cap P_N\xi \neq \varnothing. \tag{2.4}$$

Пусть $A$ — грань шара $B(w_1, 1)$, выбранная в соответствии с (2.4) для $N = M$ и $\xi = w_1$. Покажем, что грань $A$ не может быть двумерной. Действительно, если $\dim A = 2$, то имеются два случая: 1) либо $A$ — основание цилиндра $B(w_1, 1)$, либо 2) $A$ — его боковая грань. В случае 1), очевидно, $A = \mathring{B}_H$, что сразу дает противоречие, поскольку с одной стороны $\mathring{B}_H \cap M = \varnothing$, а с другой по (2.4) имеем $\operatorname{ri} A \cap P_M\widehat{z} \neq \varnothing$. Рассмотрим случай 2). Обозначим $I := A \cap B_H$ ($I$ — отрезок). Ясно, что $u, v \in I$. Так как $I$ лежит в пересечении боковой двумерной грани $A$ и основания цилиндра, то направление отрезка $I$ является касательным к сфере $S$ и так как $u, v \in P_M\widehat{z} \subset A$, то по лемме D имеем $[u, v] \subset M \cap H$, что противоречит тому, что $u$ и $v$ лежат в различных компонентах связности множества $B_H \cap M$. В оставшемся случае ($\dim A = 1$), рассуждая как и выше, мы очевидным образом приходим к противоречию с выпуклостью $M$ по касательным направлениям единичной сферы (лемма D).

Таким образом, множество $M'$ связно в $H$ и выпукло по касательным направлениям единичной сферы $S_H$, и, значит, $M'$ — солнце в $H$ по лемме E.

Лемма 1 доказана.

Для множества $M$ с непрерывной метрической проекцией из трехмерного пространстве $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ рассмотрим аналогичный вопрос об аппроксимативных свойствах множества $M \cap H$, где

плоскость $H$ параллельна плоскости, порожденной образующей цилиндра $B$ и произвольным фиксированным касательным направлением шара $B_Y$ пространства $Y$. (2.5)

Пусть $\|\cdot\|_H$ — норма на $H$, индуцированная нормой пространства $X$ (как и выше, за начало координат берем любую точку из $H$). Понятно, что единичная сфера пространства $H$ является прямоугольником. Без ограничения общности (см. [1, теорема 8.15]) мы будем отождествлять плоскость $H$ с пространством $\ell_2^\infty = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

А. Л. Браун получил следующую характеризацию солнц в конечномерных (BM)-пространствах в терминах m-связности (связности по Менгеру).

**Лемма F** [13, теорема 4.2]. *Непустое замкнутое подмножество $N$ конечномерного* (BM)-*пространства является солнцем, если и только если оно* m-*связно, т. е.*

$$\bigl(\mathrm{m}(x, y) \setminus \{x, y\}\bigr) \cap N \neq \varnothing \quad \forall\, x, y \in N, \quad x \neq y.$$

**Лемма 2.** *Пусть $M$ — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в трехмерном пространстве $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ с цилиндрической нормой, пусть плоскость $H$ определена в* (2.5). *Тогда, если $M \cap H \neq \varnothing$, то*

$$M \cap H \text{ — солнце в плоскости } H.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $M' := M \cap H$. Предположим противное: пусть $M'$ не является солнцем в плоскости $H$. Напомним, что $H$ отождествляется с пространством $\ell_2^\infty = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Поскольку $\ell_n^\infty \in$ (BM) (см. [13, следствие 5.2]), то по лемме F непустое замкнутое множество $N$ является солнцем в пространстве $\ell_n^\infty$, если и только если оно m-связно. Иными словами,

$$N \text{ — солнце в } \ell_n^\infty \iff \bigl(\mathrm{m}_\infty(x, y) \setminus \{x, y\}\bigr) \cap N \neq \varnothing \quad \forall x, y \in N, \quad x \neq y, \tag{2.6}$$

где по определению $\mathrm{m}_\infty(x, y)$ — пересечение всех шаров пространства $\ell_n^\infty$, содержащих точки $x$ и $y$. Соответственно, поскольку по предположению множество $M'$ не является солнцем в $H$,

то согласно (2.6) $M'$ не m-связно в $H$. По определению это означает, что найдутся точки $u,v\in M'$, $u\neq v$, такие, что
$$\big(\mathrm{m}_H(u,v)\setminus\{u,v\}\big)\cap M'=\varnothing \tag{2.7}$$
(здесь и далее $\mathrm{m}_H(u,v)$ — пересечение всех шаров пространства $H$, содержащих точки $u$ и $v$).

Для $x=(x^{(1)},x^{(2)})$ и $y=(y^{(1)},y^{(2)})\in H$ будем считать, что
$$x\nparallel y,\quad \text{если}\ \ x^{(i)}\neq y^{(i)}\ \ \text{для всех}\ \ i=1,2.$$

Поскольку по построению одномерные грани единичного шара $B_H$ (квадрата) пространства $H$ параллельны касательным направлениям шара $B_X$ пространства $X$, то из леммы D (примененной ко множеству $M$) следует, что $u\nparallel v$ (в пространстве $H$). Таким образом, $\mathrm{m}_H(u,v)$ — невырожденный прямоугольник в пространстве $H$ (растяжение шара $B_H$ вдоль одного из ребер). Воспользуемся следующим легко проверяемым фактом: если $Z$ — двумерное нормированное пространство, $\ell$ — касательное направление к сфере $S_Z$ и если $x,y\in S_Z$ и отрезок $[x,y]$ параллелен $\ell$, то
$$\mathrm{m}_Z(x,y)=[x,y]. \tag{2.8}$$
Для доказательства этого факта достаточно заметить, что если $x,y\in S_Z$, $[x,y]\parallel\ell$ и $\ell$ — касательное направление к сфере $S_Z$, то $f(x)=f(y)$ для некоторого $f\in\operatorname{ext}S^*$, и далее воспользоваться следующим представлением (см. [1, § 9.1]):
$$\mathrm{m}(x,y)=\big\{z\in Z\mid f(z)\in[f(x),f(y)]\quad\forall f\in\operatorname{ext}S^*\big\},$$
которое имеет место, в частности, в любом сепарабельном пространстве.

В нашей ситуации из (2.8) имеем, что $\mathrm{m}_H(u,v)=\mathrm{m}(u,v)$. Пусть $u,s,v,t$ — вершины прямоугольника $\mathrm{m}_H(u,v)$.

В теореме 1 работы [5] утверждается, в частности, что если $N$ — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в банаховом пространстве размерности $n\leqslant 3$, то на $N$ существует непрерывная выборка из метрической проекции. Для $z\in X$ через $p(\,\cdot\,)$ обозначим соответствующую непрерывную выборку из метрической проекции на множество $M$ (в норме пространства $X$). Так как по теореме 2 $M$ — строгое солнце (доказательство теоремы 2 независимо), то по лемме C
$$\mathring{K}(p(z),z)\cap M=\varnothing\quad\forall z\notin M. \tag{2.9}$$

Поскольку $H$ — плоскость, параллельная боковой грани единичного шара, то в зависимости от положения точки $z$ на прямоугольнике $\mathrm{m}(u,v)\setminus\{u,v\}$ (и, соответственно, точки $p(z)$ на сфере (цилиндре) $S(z,\|z-p(z)\|)$), при пересечении конуса $\mathring{K}(p(z),z)$ с плоскостью $H$ получается множество одного из следующих видов:

1) плоскость $H$;

2) открытое полупространство в $H$ с границей, параллельной одной из сторон прямоугольника $\mathrm{m}(u,v)$;

3) сдвиг одного из четырех открытых координатных квадрантов $\mathring{K}_i=\{\mathring{K}(p_i,0)-p_i\}$ плоскости $H$, где $p_i$ — крайние точки единичного шара $B_H$ пространства $H$, $i=1,\dots 4$.

Пусть точка $z$ лежит на отрезке $[s,t]$ (напомним, что $[s,t]\cap M=\varnothing$ в силу (2.7)). Очевидно, для любой точки $z\in[s,t]$ выполнение любого из случаев 1) или 2) ведет к противоречию с (2.9): одна из точек $u$ или $v$ обязательно попадает в $\mathring{K}(p(z),z)$, что невозможно по лемме C.

Рассмотрим отображение $[s,t]\ni z\mapsto\varphi(z):=(p(z)-z)/\|p(z)-z\|$. Ясно, что отображение $\varphi(\,\cdot\,)$ непрерывно. Согласно сказанному выше, для любой точки $z\in[s,t]$ всегда выполнен случай 3). Поэтому точка $\varphi(z)$ лежит на главной двумерной грани сферы $S_X$ (т. е. на грани, параллельной главной координатной плоскости). Далее, в случае 3) координатный квадрант $\mathring{K}_i$ не может быть одним и тем же для всех точек $z\in[s,t]$ (если это так, то либо конус $\mathring{K}(p(t),t)$

содержит точки $u, v$, либо конус $\mathring{K}(p(s), s)$ содержит точки $u, v$, что противоречит (2.9)). Поэтому для любой точки $z \in [s,t]$ ее образ $\varphi(z)$ лежит либо на "нижней", либо на "верхней" главной двумерной грани сферы $S_X$, причем образы точек $s$ и $t$ не могут лежать на одной и той же главной гиперграни сферы $S_X$. Поскольку отображение $\varphi(\,\cdot\,)$ непрерывно, то образ отрезка $[s,t]$ связен и, следовательно, не может содержаться в объединении двух главных двумерных граней сферы $S_X$; значит, образ отрезка $[s,t]$ при отображении $\varphi(\,\cdot\,)$ обязан содержать точки из боковой поверхности конуса. Но для прообраза любой такой точки при отображении $\varphi(\,\cdot\,)$ обязательно выполнен случай 1) или 2), что, как мы видели выше, приводит к противоречию с (2.9). Таким образом, исходное предположение, что $M'$ не является солнцем в $H$, неверно.

Лемма 2 доказана.

О п р е д е л е н и е 7. Пусть $X$ — трехмерное пространство $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ с цилиндрической нормой. Через $Y_P$ обозначим двумерное пространство $Y$ с нормой $\|\cdot\|_{Y_P}$, единичным шаром которой является центрально-симметричный полиэдральный цилиндр $P$, для которого по построению мы считаем, что

любая сторона многоугольника $P$ параллельна некоторому касательному направлению сферы $S$ пространства $X$ (сферы $S_Y$ пространства $Y$). (2.10)

Положим

$$X_P := Y_P \oplus_\infty \mathbb{R}; \tag{2.11}$$

пусть $B_P$ — единичный шар пространства $X_P$ ($B_P$ — полиэдральный цилиндр), $\|\cdot\|_P$ — норма пространства $X_P$.

Для непустого замкнутого множества $M$ с полунепрерывной снизу метрической проекцией из трехмерного пространства $X_P = Y_P \oplus_\infty \mathbb{R}$, определенного в (2.11), рассмотрим аналогичный вопрос об аппроксимативных свойствах множества $M \cap H$, где теперь $H$ — плоскость, параллельная боковой двумерной грани цилиндра $B_P$ (единичного шара пространства $X_P$). Пусть $H$ — такая плоскость, $M \cap H \neq \varnothing$. Пусть $\|\cdot\|_H$ — норма на плоскости $H$, индуцированная нормой исходного пространства $X$ (как и выше, за начало координат берем любую точку из $H$). Без ограничения общности (см. [1, теорема 8.15]) мы будем отождествлять плоскость $H$ с двумерным пространством $\ell^\infty_2 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ (единичная сфера пространства $H$ является прямоугольником). Ниже индекс $P$ будет соответствовать объектам в трехмерном пространстве $X$, определяемым в терминах нормы $\|\cdot\|_P$ на $X$, а индекс $H$ — объектам на плоскости $H$, определяемым в терминах нормы $\|\cdot\|_H$.

Для доказательства следующей леммы 3 нам потребуется еще одна характеризация солнц в пространстве $\ell^\infty_n$ (см. [7]).

**Лемма G** [7, теорема 2]. *Непустое множество $N \subset \ell^\infty_n$ является солнцем в $\ell^\infty_n$, если и только если $N$ замкнуто, связно и пересечение $N$ с любой координатной аффинной гиперплоскостью $H$ в $\ell^\infty_n$ является солнцем в $H$ или пусто.*

**Лемма 3.** *Пусть $M$ — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой. Тогда множество $M$ — монотонно линейно связное солнце в пространстве $X_P$, где $X_P$ определено в* (2.10), (2.11).

З а м е ч а н и е 10. Несложно построить пример, показывающий что условие (2.10) в определении (2.11) пространства $X_P$ в условиях леммы 3 является существенным.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3. Мы будем рассуждать аналогично доказательству достаточности в лемме G из [7]. Поскольку единичный шар пространства $X_P$ является полиэдральным цилиндром, то по лемме B пространство $X_P$ лежит в классе (BM). Поэтому по лемме F множество $M$ m-связно.

Предположим противное: пусть утверждение леммы 3 неверно, т. е. $M$ не является солнцем в пространстве $X_P$. Так как $X_P \in$ (BM), то по лемме F найдутся точки $x, y \in M$, $x \neq y$, такие, что

$$\bigl(\mathrm{m}_P(x,y) \setminus \{x,y\}\bigr) \cap M = \varnothing. \tag{2.12}$$

Поскольку по леммам 1 и 2 пересечение $M \cap H$ является солнцем в $H$ для любой координатной плоскости $H$, $H \cap M \neq \varnothing$, и поскольку, очевидно, $\mathrm{m}_P(x,y) \cap H = \mathrm{m}_H(x,y)$, то точки $x$ и $y$ не могут лежать в одной координатной плоскости. Как следствие многогранник $\mathrm{m}_P(x,y)$ является телом.

Далее мы рассуждаем, как в [7]. Обозначим через $F_1, \dots, F_\nu$ все двумерные грани тела $\mathrm{m}_P(x,y)$, содержащие точку $x$, а через $E_1, \dots, E_\mu$ — все двумерные грани тела $\mathrm{m}_P(x,y)$, содержащие точку $y$ (поскольку $\mathrm{m}_P(x,y)$ — цилиндр, то $\nu, \mu \leqslant 3$). Рассматривая все координатные плоскости $H$, проходящие через точку $x$, и координатные плоскости $H$, проходящие через точку $y$, а также принимая во внимание, что по лемме 2 непустое пересечение $M \cap H$ является солнцем в $H$, из (2.12) получаем $F_i \cap M = \{x\}$, $E_j \cap M = \{y\}$, $i = 1, \dots, \nu$, $j = 1, \dots, \mu$.

Для произвольного множества $F \subset \mathbb{R}^3$ и его граничной точки $z$ определим

$$\operatorname{cone}(F, z) := \{\alpha f + (1-\alpha) z \mid f \in F, \quad \alpha \geqslant 0\}.$$

Несложно видеть, что направление является касательным для сферы $S_Z$ некоторого двумерного банахова пространства $Z$, если и только если оно параллельно некоторому невырожденному отрезку из границы множества $\mathrm{m}_Z(x,y)$ при некоторых $x, y$. Это показывает, что любая из плоскостей $\operatorname{aff} F_i$, $\operatorname{aff} E_j$ является координатной в пространстве $X$ в смысле определения 5. Поскольку по леммам 1, 2 пересечение множества $M$ с координатными плоскостями $\operatorname{aff} F_i$ и $\operatorname{aff} E_j$ является солнцем для любых $i$ и $j$, и, следовательно, по лемме F и (2.1) это пересечение монотонно линейно связно в плоскостях $\operatorname{aff} F_i$ и $\operatorname{aff} E_j$, то имеем

$$\operatorname{cone}(F_i, x) \cap M = \{x\}, \quad \operatorname{cone}(E_j, y) \cap M = \{y\}, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Несложно видеть, что множество

$$U := \biggl(\mathrm{m}(x,y) \cup \Bigl(\bigcup_{i=1}^{\nu} \operatorname{cone}(F_i, x)\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{j=1}^{\mu} \operatorname{cone}(E_j, y)\Bigr)\biggr) \setminus \{x, y\}$$

разделяет пространство $X$, причем точки $x$ и $y$ лежат в разных компонентах связности множества $X \setminus U$ и $U \cap M = \varnothing$. Однако согласно (1.4) множество $M$ является солнцем и, следовательно, линейно связно (см. [1, теорема 8.2]), при этом $x, y \in M$. Полученное противоречие показывает, что $M$ — солнце в пространстве $X_P$. Поскольку $X_P \in$ (BM), то из солнечности $M$ в $X_P$ вытекает, что $M$ монотонно линейно связно в пространстве $X_P$ (см. (2.1)).

Лемма 3 доказана.

## 3. Доказательства основных результатов

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. *Необходимость.* Через (ExS) обозначим класс трехмерных пространств, в которых любая достижимая точка является точкой гладкости, а через (ExD) обозначим класс трехмерных пространств, для которых множество достижимых (крайних) точек плотно в единичной сфере сопряженного пространства (класс трехмерных пространств Царькова — Фелпса; см. [20–22]). Пусть (S) — класс гладких пространств. Согласно классическому результату В. И. Бердышева — А. Брондстеда класс (ExS) состоит в точности из тех трехмерных пространств, в которых любое чебышёвское множество выпукло (см. [9;11;12]), а класс (ExD) — в точности из тех пространств, в которых любое ограниченное чебышёвское множество выпукло. Поэтому (ExS) $\subset$ (ExD).

Предположим, что пространство $X$ негладко. Если $X \in (\mathrm{ExD}) \setminus (\mathrm{S})$, то по теореме 3 в $X$ существует невыпуклое замкнутое множество $M'$ с непрерывной метрической проекцией. Однако согласно одному хорошо известному утверждению Р. Фелпса (см. [20] и [1, § 9.1]), в пространствах из класса (ExD) (любой конечной размерности $\geqslant 3$) класс связных по Менгеру (класс монотонно линейно связных) замкнутых множеств совпадает с классом выпуклых замкнутых множеств. Поэтому множество $M'$ не монотонно линейно связно.

Пусть теперь $X \notin (\mathrm{ExD})$. Тогда $X \notin (\mathrm{ExS})$. В этом случае, если норма $X$ не является цилиндрической, то по теореме A в $X$ существует не монотонно линейно связное чебышёвское множество (метрическая проекция на которое, конечно, непрерывна).

Таким образом, если пространство $X$ негладко и не имеет цилиндрической нормы, то в $X$ содержится замкнутое не монотонно линейно связное множество с непрерывной снизу метрической проекцией.

*Достаточность.* Пусть $M$ — замкнутое множество с непрерывной (полунепрерывной снизу) метрической проекцией в трехмерном пространстве $X$. Такое множество необходимо является солнцем (см. (1.4)). Если $X$ — гладкое пространство, то любое солнце в нем выпукло (см. [1, теорема 4.1]) и, значит, монотонно линейно связно. Пусть теперь $X$ имеет цилиндрическую норму, т. е. $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$. Покажем, что

$$\text{множество } M \text{ монотонно линейно связно в } X. \tag{3.1}$$

Для этой цели мы построим последовательность $Q_n \subset Y$ центрально-симметричных выпуклых многоугольников с центром в нуле, таких, что полиэдральные цилиндры

$$P_n := Q_n \oplus_\infty [-1, 1]$$

приближают единичный шар $B$ пространства $X$ в смысле (2.10), (2.11) (с $P = P_n$). Последовательность $P_n$ строится следующим образом. На единичной сфере $S_Y$ (двумерного) пространства $Y$ возьмем счетное всюду плотное множество $G$ точек гладкости (это можно сделать согласно классической теореме Мазура). Каждой такой точке $s \in G$ соответствует экстремальный функционал из $\varphi_s$ сферы $S_Y^*$, линия уровня которого $\{x \in X \mid \varphi_s(x) = 1\}$ является опорной прямой к сфере $S_Y$ в пространстве $Y$ (такое соответствие не обязательно взаимнооднозначное). Если число таких экстремальных функционалов конечно, то сфера $S_Y$ — многоугольник, $B_Y$ — полиэдральный цилиндр и требуемый результат следует из (2.1) и леммы B. Таким образом, мы считаем, что множество $\Phi = \{\varphi_s \mid s \in G\}$ бесконечно. Отметим, что множество $\Phi$ плотно во множестве всех экстремальных функционалов сферы $S^*$, поскольку, как хорошо известно, множество достижимых точек выпуклого подмножества конечномерного пространства плотно во множестве его крайних точек, а любой функционал $\varphi_s$, где $s \in G$, является достижимой точкой сферы $S^*$. Пусть $F = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — всюду плотное счетное подмножество из $\Phi$.

Напомним, что если пространство $Z$ сепарабельно, $H = (h_i)_{i \in I}$ — семейство функционалов из $\operatorname{ext} S^*$, $w^*$-плотное во множестве крайних точек $\operatorname{ext} S^*$ единичной сферы сопряженного пространства, $H = -H$, $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$, $\operatorname{card} I \leqslant \aleph_0$, и $\sum \alpha_i < \infty$, то ассоциированная (по Брауну) норма $|z|$ вектора $z \in Z$ определяется следующим образом (см. [1, § 9.1]):

$$|x| = \sum_{i \in I} \alpha_i |h_i(x)|. \tag{3.2}$$

Так как $\overline{F} \supset \operatorname{ext} S_Y^*$, то в определении (3.2) ассоциированной нормы мы можем положить $H = F \cup (-F)$, $I = \mathbb{N}$, $h_i = f_i$, $i = 1, 2, \dots$. Определим $Q_n := \{x \in Y \mid |f_i(x)| \leqslant 1,\ i = 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $Q_n$ — центрально-симметричный выпуклый многоугольник с центром в нуле. Поскольку множество $\operatorname{ext} S_Y^*$ является границей Джеймса пространства $Y$ (т. е. для каждого $x \in Y$ найдется функционал $f \in \operatorname{ext} S_Y^*$ такой, что $f(x) = \|x\|$), то имеет место сходимость

$$Q_n \to B_Y \tag{3.3}$$

в метрике Хаусдорфа, т. е. последовательность полиэдральных шаров $(Q_n)$ приближает шар $B_Y$. Далее, любая сторона многоугольника $Q_n$ есть неодноточечная часть линии уровня некоторого экстремального функционала $f \in \operatorname{ext} S_Y^*$, который в силу построения определяется по гладкой точке шара $B_Y$. Как следствие

любая сторона многоугольника $Q_n$ параллельна некоторому касательному направлению единичной сферы $S_Y$ пространства $Y$. (3.4)

Определим $P_n := Q_n \oplus_\infty [-1, 1]$. Согласно (3.3) последовательность $(P_n)$ приближает шар $B_X$, а в силу (3.4) $(P_n)$ удовлетворяет требуемому условию (2.10): любая сторона многоугольника $P_n$ параллельна некоторому касательному направлению сферы $S$ пространства $X$.

Как и выше, для любого $n$ через $Y_{Q_n}$ обозначим пространство $Y$ с нормой $\|\cdot\|_{Y_n}$, единичным шаром которой является многоугольник $Q_n$. Положим $X_{P_n} := Y_{Q_n} \oplus_\infty \mathbb{R}$ (единичным шаром пространства $X_{P_n}$ является полиэдральный цилиндр $P_n$); обозначим: $\|\cdot\|_{P_n}$ — норма пространства $X_{P_n}$. Зафиксируем произвольно числовую последовательность $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots < \infty$ и для каждого $n$ в соответствии с (3.2) определим ассоциированные нормы

$$|x|_{P_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |f_i(x)| \quad \text{и} \quad |x|_X = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i |f_i(x)|, \tag{3.5}$$

соответственно, на пространствах $X_{P_n}$ и $X$.

Предположим противное: пусть (3.1) не выполнено, т. е. множество $M$ не монотонно линейно связно в $X$. Тогда множество $M$ также не m-связно в $X$ (см. [6, теорема 4.2]) и, значит,

$$(\mathrm{m}(u, v) \setminus \{u, v\}) \cap M = \varnothing \tag{3.6}$$

для некоторых точек $u, v \in M$, $u \neq v$. По построению пространство $X_{P_n}$ удовлетворяет условию (2.10). По лемме 3 множество $M$ является солнцем в $X_{P_n}$ для любого $n$, по лемме B каждое из пространств $X_{P_n}$ лежит в классе (BM). Далее, в конечномерных (BM)-пространствах любое солнце монотонно линейно связно согласно (2.1). Поэтому $M$ монотонно линейно связно в $X_{P_n}$ для любого $n$. Соответственно по определению монотонной связности для любых $u$ и $v$ из $M$ найдется монотонная кривая $k_{P_n}(\,\cdot\,) \subset \big(M \cap \mathrm{m}_{P_n}(u, v)\big)$, их соединяющая; при этом длина кривой $k_{P_n}(\,\cdot\,)$ в норме $|\cdot|_{P_n}$ равна $|u - v|_{P_n}$ (см. [1, лемма 9.1] и [13, следствие 3.2]). Пусть $z_n \in M$ — середина этой кривой относительно ассоциированной по Брауну нормы $|\cdot|_{P_n}$, т. е.

$$|z_n - u|_{P_n} = |z_n - v|_{P_n} = \frac{1}{2}|u - v|_{P_n}. \tag{3.7}$$

Согласно сказанному выше $\|\cdot\|_{P_n} \to \|\cdot\|_X$, а из (3.5) следует

$$|\cdot|_{P_n} \to |\cdot|_X. \tag{3.8}$$

В силу соображений компактности последовательность $(z_n)$ содержит сходящуюся подпоследовательность $(z_{n_k})$ (которую мы без ограничения общности отождествим с $(z_n)$) такую, что $z_n \to z \in M$. Тогда $|z - u|_X = |z - v|_X = \dfrac{1}{2}|u - v|_X$ в силу (3.7) и (3.8), и, следовательно (см. [1, § 9.1]), $z \in \mathrm{m}(u, v)$, при этом, очевидно, $z \neq u, v$. Однако это противоречит (3.6). Итак, утверждение (3.1) доказано, а вместе с ним доказана и теорема 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть $M$ — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в трехмерном банаховом пространстве $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ с цилиндрической нормой. Согласно (1.4) $M$ — солнце в $X$. Без ограничения общности считаем $0 \notin M$, $\rho(0, M) = 1$. Требуется доказать, что $0$ — точка строгой солнечности множества $M$.

Пусть $A$ — грань шара $B(0, 1)$, выбранная в соответствии с (2.4) для $N = M$ и $\xi = 0$ (т. е. $P_M 0 \subset A$, $P_M 0 \cap \operatorname{ri} A \neq \varnothing$). Пусть $y^* \in P_M 0 \cap \operatorname{ri} A$. Мы покажем, что $y^*$ — точка светимости.

С учетом того, что $y^* \in \operatorname{ri} A$, отсюда непосредственно будет вытекать, что любая точка из $M \cap A$ также является точкой светимости, что и требуется. Рассмотрим три случая.

1. Если $\dim A = 0$, то доказывать нечего: $P_M 0$ состоит из одной точки $y^*$, которая в силу солнечности множества $M$ является точкой светимости, а тогда 0 — точка строгой солнечности.

2. Пусть $\dim A = 2$. Поскольку грань $A$ плоская и $y^* \in P_M 0 \cap \operatorname{ri} A \neq \varnothing$, то для любой точки $x_\alpha := -\alpha y^*$, $\alpha > 0$, точка $y^*$ доставляет локальный минимум функции расстояния, т. е. найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $y^* \in P_{M \cap B(y^*, \varepsilon)} x_\alpha$ при некотором $\varepsilon > 0$. Так как $M$ — унимодальное множество (см. определение 3), то $y^* \in P_M x_\alpha$. Поскольку $\alpha > 0$ произвольно, то $y^*$ — точка светимости для 0. Окончательно, любая точка из $P_M 0$ также является точкой светимости для 0, поскольку $y^* \in \operatorname{ri} A$ и $P_M 0 \subset A$.

3. Пусть теперь $A$ — отрезок. Рассуждая от противного, предположим, что

точка 0 не является точкой строгой солнечности и соответственно точка $y^*$ не является точкой светимости для нуля. (3.9)

Более того, можно считать без ограничения общности, что

$$y^* \notin P_M x_\nu \quad \text{для любого} \ \ \nu > 0, \quad \text{где} \ \ x_\nu := -\nu y^*. \tag{3.10}$$

Для $\delta > 0$ рассмотрим точку $x$ из окрестности точки 0. Пусть $P_x := P_M x$ и пусть $A_x$ — грань сферы $S(x, \rho(x, M))$, для которой выполнено (2.4) с $A = A_x$, т. е.

$$P_M x \subset A_x \quad \text{и} \quad P_M x \cap \operatorname{ri} A_x \neq \varnothing. \tag{3.11}$$

Рассмотрим отображение

$$\tau(u) = \frac{P_M u - u}{\rho(u, M)} \subset S, \quad u \notin M,$$

и обозначим $I_x := \tau(x)$, $I := \tau(0)$.

Покажем, что для всех $x$ из достаточно малой окрестности точки 0

$$\text{каждая из граней } I_x \text{ является отрезком}; \tag{3.12}$$

$$I_x \to I \quad \text{в метрике Хаусдорфа} \quad (x \to 0). \tag{3.13}$$

Более того, из (3.10) следует, что $I_x \neq I$ и $A_x \neq A$ для $x = -\alpha y^*$ при всех малых $\alpha > 0$. Отсюда и из непрерывности метрической проекции следует, что $A$ — боковое ребро цилиндра $B$, при этом ребро $A_x$ параллельно ребру $A$ при $x = -\alpha y^*$ для малых $\alpha > 0$.

Итак, если (3.12) не выполнено, то всегда найдется близкая к 0 точка $x$ такая, что $\dim I_x = 2$ или 0. В этом случае согласно доказанному в случаях 1 и 2 $x$ — точка строгой солнечности, а согласно лемме 1 из [18] для множества существования с полунепрерывной снизу метрической проекцией множество точек строгой солнечности замкнуто, поэтому 0 — точка строгой солнечности, поскольку такие точки $x$ могут быть выбраны сколь угодно близко к 0. Утверждение (3.13) следует из (1.1) и того, что для ограниченно компактных множеств полунепрерывность снизу метрической проекции эквивалентна ее непрерывности по Хаусдорфу (см. [10]).

Итак, для точки 0 множество $P_M 0 =: P$ ее ближайших точек — отрезок, и согласно (3.12) для всех $x$ из достаточно малой окрестности точки 0 грань $A_x$ сферы $S(x, \rho(x, M))$ и множество $P_x$ ее ближайших точек — также отрезки (при этом $P_x \subset A_x$).

Пусть $\widehat{y}, \widetilde{y}$ — концевые точки отрезка $P$. Без ограничения общности считаем, что $\mathring{K}(\widetilde{y}, 0) \cap M \neq \varnothing$ (если $\mathring{K}(\widetilde{y}, 0) \cap M = \varnothing$ и $\mathring{K}(\widehat{y}, 0) \cap M = \varnothing$, то $\mathring{K}(y^*, 0) \cap M = \varnothing$, что противоречит (3.9)). Ввиду (3.10) из леммы C следует, что $\mathring{K}(y, 0) \cap M \neq \varnothing$ для любого $y \in \operatorname{ri}(P \cap A)$. Поэтому $\widehat{y}$ — точка светимости для 0. Отсюда $\widehat{y}$ — крайняя (и негладкая) точка ребра $A$ сферы $S$ (точка $\widehat{y}$ лежит на пересечении ребра $A$ с одним из оснований цилиндра $B$).

Рассмотрим прямую $\ell := \operatorname{span}(\widehat{y} - y^*)$, параллельную отрезку $A$, и для $t \geqslant 0$ положим $x_t := t(\widehat{y} - y^*)$ (ясно, что $\widehat{y} \neq y^*$). Для краткости обозначим

$$r_t := \rho(x_t, M), \quad A_t := A_{x_t}, \quad P_t := P_M x_t.$$

Рассмотрим несколько случаев (в предположении, что $t \in (0, 2)$ мало).

1) $r_t > r_0$. Поскольку $y^* \in \operatorname{ri} P \subset A$, то $y^* \in P_M x_t$ при малых $t \in (0, \delta')$ при некотором $0 < \delta' < 2$, откуда $r_t \leqslant r_0$ при малых $t$, и, значит, случай 1 невозможен при малых $t > 0$.

2) $r_t < r_0$. Этот случай при малых $t \in (0, \delta'')$ при некотором $0 < \delta'' < 2$ также невозможен, поскольку в силу (3.12) $A, A_t$ — боковые ребра цилиндра $B$ и по (3.13) $P_t \to P$ при $t \to 0$, что ввиду условия $r_t < r_0$ дает $P_t \cap \mathring{B} \neq \varnothing$. Однако это противоречит тому, что $\rho(0, M) = 1$.

3) $r_t = r_0$. Пусть $t \in (0, \delta''')$ при некотором $0 < \delta''' < 2$. В этом случае при малых $t > 0$ согласно (3.12) $P_t$ — также невырожденный отрезок; обозначим его $P_t := [\widetilde{y}_t, \widehat{y}_t]$, считая при этом, что вектор $\widehat{y} - \widetilde{y}$ сонаправлен вектору $\widehat{y}_t - \widetilde{y}_t$. Ясно, что $P_t$ получен из $P$ сдвигом (вдоль прямой $\ell$) и растяжением (возможно, с коэффициентом 1), при этом $\operatorname{ri} P_t \cap \operatorname{ri} P \neq \varnothing$, поскольку $0 < t < 2$. Рассмотрим возможные положения точки светимости $y_t$ для точки $x_t$.

3a) $y_t \in \operatorname{ri} A_t$. Очевидно, что этот случай невозможен, поскольку тогда $\mathring{K}(y_t, x_t) = \mathring{K}(y^*, 0)$, но $\mathring{K}(y_t, x_t) \cap M = \varnothing$ по лемме C, что противоречит (3.10).

3b) $y_t = \widetilde{y}_t$ (и $y_t \in \operatorname{rb} A_t$). В этом случае, поскольку $\operatorname{ri} P_t \cap \operatorname{ri} P \neq \varnothing$, то $\mathring{K}(y_t, x_t) \cup \mathring{K}(\widehat{y}, 0) = \mathring{K}(y^*, 0)$. Поскольку по предположению $\widehat{y}$ — точка светимости для 0, а $y_t$ — точка светимости для $x_t$, то $\mathring{K}(y_t, x_t) \cap M = \varnothing$ и $\mathring{K}(\widehat{y}, 0) \cap M = \varnothing$ по лемме C, что с учетом предыдущего равенства дает $\mathring{K}(y^*, 0) \cap M = \varnothing$. Однако в силу леммы C это противоречит (3.10).

3c) $y_t = \widehat{y}_t$ (и $y_t \in \operatorname{rb} A_t$). Поскольку по доказанному выше случаи 3a) и 3b) невозможны при любом $0 < t' < t$, то для всех $0 < t' < t$ реализуется случай 3c). Как следствие

$$\text{длина отрезка } P_{t'} \text{ не уменьшается при возрастании } t' \in (0, t). \tag{3.14}$$

Пусть $\delta_1 := \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}/2$, $\widehat{x}_1 := x_{\delta_1}$. Ясно, что $P_{\widehat{x}_1}$ — отрезок, и с учетом (3.14) мы оказываемся в рассмотренной выше ситуации (где $\widehat{x}_1$ играет роль точки 0). Как и выше, выбирается $\delta_2 > 0$, строится точка $\widehat{x}_2$ и так далее, при этом на любом шаге $i$ для $t \in (0, \delta_1 + \ldots + \delta_i)$ всегда выполнен случай 3c). Если ряд $\delta_1 + \delta_2 + \ldots$ имеет конечную сумму $\sigma$, то полагаем $\widehat{x} := x_\sigma$ и, учитывая (3.14), оказываемся в рассмотренной выше ситуации (где $\widehat{x}$ играет роль точки 0). В итоге, как и в тривиальном случае бесконечной суммы $\delta_1 + \delta_2 + \ldots$, получаем, что для любого $t > 0$ выполнено $r_t = r_0$ и $y_t = \widehat{y}_t$. Так как $y_t$ — точка светимости для $x_t$, то по лемме C имеем $\mathring{K}(y_t, x_t) \cap M = \varnothing$, но объединение $\cup \mathring{K}(y_t, x_t)$ по всем $t > 0$ дает конус $\mathring{K}(y^*, 0)$, который согласно (3.10) и лемме C имеет непустое пересечение с $M$. Полученное противоречие показывает, что предположение (3.9) было неверно, и, следовательно, $y^*$ — точка светимости. Остальные утверждения теоремы 2 доказаны в [5, теорема 1].

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $M$ — замкнутое подмножество с полунепрерывной снизу метрической проекцией, лежащее в конечномерном пространстве. Согласно (1.4) множество $M$ является солнцем. Хорошо известно, что в гладком пространстве солнце выпукло (см. [1, теорема 4.1]).

Обратно, пусть пространство $X$ негладко. Пусть $y \in S$ — точка негладкости единичной сферы $S$. Рассмотрим $f_1, f_2 \in X^*$, $f_1 \neq f_2$, такие, что $f_1(y) = f_2(y) = \|y\| = 1$ (такие функционалы существуют вследствие негладкости точки $y$). Положим

$$M_i := \{u \in X \mid f_i(u) \geqslant 0\}, \quad i = 1, 2, \quad M := M_1 \cup M_2.$$

Хорошо известно, что $M$ — невыпуклое солнце. Пусть $x \in X \setminus M$. Тогда для $i = 1, 2$ имеем $f_i(x) < 0$. Далее, $\rho(x, M_i) = |f_i(x)|$, $x - f_i(x) y \in M_i$, и значит, $\rho(x, M_i) = -f_i(x)$. Без ограничения общности можно считать, что $c := \rho(x, M_1) \leqslant \rho(x, M_2)$. Пусть $y' \in P_M 0$. Тогда $u := x + cy' \in P_M x$. Таким образом, для любой точки $x \notin M$ ее образ при отображении $\tau(u) = \dfrac{P_M u - u}{\rho(u, M)} \subset S$, $u \notin M$, является постоянным, поэтому отображение $P_M(\,\cdot\,)$ непрерывно и, значит, полунепрерывно снизу.

Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 11. Вопрос о характеризации пространств размерности $\geqslant 4$, в которых любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией монотонно линейно связно, остается открытым. Также неизвестен ответ на вопрос о характеризации пространств размерности $\geqslant 3$, в которых любое солнце (строгое солнце, ограниченное солнце, ограниченное строгое солнце) монотонно линейно связно.

З а м е ч а н и е 12. Есть основания полагать, что заключение теоремы 2 верно в любом трехмерном пространстве.

Автор благодарен И. Г. Царькову за полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алимов А. Р., Царьков И. Г.** Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 1 (427). С. 3–84. doi: 10.4213/rm9698 .
2. **Alimov A. R., Shchepin E. V.** Convexity of suns in tangent directions // J. Convex Anal. 2019. Vol. 26, no. 4. P. 1069–1074. doi: 10.1134/S1064562419010058 .
3. **Алимов А. Р., Щепин Е. В.** Выпуклость чебышёвских множеств по касательным направлениям // Успехи мат. наук. 2018. Т. 73, № 2(440). С. 185–186. doi: 10.4213/rm9813 .
4. **Alimov A. R.** Continuity of the metric projection and local solar properties of sets // Set-Valued Var. Anal. 2019. Vol. 27, no. 1. P. 213–222. doi: 10.1007/s11228-017-0449-0 .
5. **Алимов А. Р.** Выборки из метрической проекции и строгая солнечность множеств с непрерывной метрической проекцией // Мат. сб. 2017. Т. 208, № 7. С. 3–18. doi: 10.4213/sm8765 .
6. **Алимов А. Р.** Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. математическая. 2014. Т. 78, № 4. С. 3–18. doi: 10.4213/im8128 .
7. **Алимов А. Р.** Сохранение аппроксимативных свойств подмножеств чебышевских множеств и солнц в $\ell^\infty(n)$ // Изв. РАН. Сер. математическая. 2006. Т. 70, № 5. С. 3–12. doi: 10.4213/im1115 .
8. **Алимов А. Р.** Монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической проекцией // Монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической: Мат. междунар. научн. конф. “Современные проблемы естественных и гуманитарных наук, их роль в укреплении научных связей между странами”, посвящ. 10-летию Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе). 2019. С. 9–10.
9. **Бердышев В. И.** К вопросу о чебышёвских множествах // Докл. АзССР. 1966. Т. 22, № 9. С. 3–5.
10. **Blatter J., Morris P. D., Wulbert D. E.**. Continuity of the set-valued metric projection // Math. Ann. 1968. Vol. 178, no. 1. P. 12–24 doi.: 10.1007/BF01350621 .
11. **Brøndsted A.** Convex sets and Chebyshev sets, II // Math. Scand. 1966. Vol. 18. P. 5–15.
12. **Brown A. L.** Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1980. Vol. 41. P. 297–339. doi.: 10.1112/plms/s3-41.2.297 .
13. **Brown A. L.** Suns in normed linear spaces which are finite dimensional // Math. Ann. 1987. Vol. 279, no. 1. P. 87–101. doi.: 10.1007/BF01456192 .
14. **Brown A. L.** On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces // Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra, 1988). Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. Canberra: Austral. Nat. Univ., 1988. Vol. 20. P. 1–15.
15. **Brown A. L.** On the problem of characterising suns in finite dimensional spaces // Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 2002. Vol. 68. P. 315–328.
16. **Brown A. L.** Suns in polyhedral spaces // Seminar of mathematical analysis (Malaga/Seville, 2002/2003). Colecc. Abierta. Vol. 64. Seville: Univ. Sevilla Secr. Publ., 2003. P. 139–146.
17. **Li T., Wang J., Wen H.** Global structure and regularity of solutions to the eikonal equation // Arch. Rational Mech. Anal. 2019. Vol. 232. P. 1073—1112.

18. **Невесенко Н. В.** Строгие солнца и полунепрерывность метрической проекции в линейных нормированных пространствах // Мат. заметки. 1978. Т. 23, № 4. С. 563–572
19. **Невесенко Н. В., Ошман Е.В.** Метрическая проекция на выпуклые множества // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 1. С. 117–126.
20. **Phelps R. R.** A representation theorem for bounded convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. Vol 11. P. 976–983.
21. **Царьков И. Г.** Ограниченные чебышевские множества в конечномерных банаховых пространствах // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 1. С. 73–87.
22. **Царьков И. Г.** Непрерывность метрической проекции, структурные и аппроксимативные свойства множеств // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 2. С. 137–148.
23. **Tsar'kov I. G.**. Singular sets of surfaces // Russ. J. Math. Phys. 2017. Vol. 24. P. 263–271. doi: 10.1134/S1061920817020121 .
24. **Царьков И. Г.** Непрерывные выборки из операторов метрической проекции и их обобщений // Изв. РАН. Сер. математическая. 2018. Т. 82, № 4. С. 199–224. doi: 10.4213/im8695 .
25. **Царьков И. Г.** Слабо монотонные множества и непрерывная выборка из оператора почти наилучшего приближения // Тр. МИАН. 2018. Т. 303. С. 246–257. doi: 10.1134/S037 .
26. **Царьков И. Г.** Слабо монотонные множества и непрерывная выборка в несимметричных пространствах // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 9. С. 129–152. doi: 10.4213/sm9107 .
27. **Царьков И. Г.** Гладкие решения уравнения эйконала и поведение локальных минимумов функции расстояния // Изв. РАН. Сер. математическая. 2019. Т. 83, № 6. С. 167–194.

Поступила 19.12.2019
После доработки 28.01.2020
Принята к публикации 10.02.2020

Алимов Алексей Ростиславович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук;
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет;
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики
г. Москва
e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

**REFERENCES**

1. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and solarity in problems of best and near-best approximation. *Russian Math. Surveys*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 1–77. doi: 10.1070/RM9698 .
2. Alimov A.R., Shchepin E.V. Convexity of suns in tangent directions. *J. Convex Anal.*, 2019, vol. 26, no. 4, pp. 1069–1074. doi: 10.1134/S1064562419010058 .
3. Alimov A.R., Shchepin E.V. Convexity of Chebyshev sets with respect to tangent directions. *Russian Math. Surveys*, 2018, vol. 73, no. 2, pp. 366–368. doi: 10.1070/RM9813 .
4. Alimov A.R. Continuity of the Metric Projection and Local Solar Properties of Sets. *Set-Valued Var. Anal.*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 213–222. doi: 10.1007/s11228-017-0449-0 .
5. Alimov A.R. Selections of the metric projection operator and strict solarity of sets with continuous metric projection. *Sb. Math.*, 2017, vol. 208, no. 7, pp. 915–928. doi: 10.1070/SM8765 .
6. Alimov A.R. Monotone path-connectedness and solarity of Menger-connected sets in Banach spaces. *Izv. Math.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 641–655. doi: 10.1070/IM2014v078n04ABEH002702 .
7. Alimov A.R. Preservation of approximative properties of subsets of Chebyshev sets and suns in $\ell^\infty(n)$. *Izv. Math.*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 857–866. doi: 10.1070/IM2006v070n05ABEH002330 .
8. Alimov A.R. Monotone path connectedness of sets with continuous metric projection. In *Proc. Int. Sci. Conf. "Modern problems in natural and human sciences and their role in strengthening of relations between countries" dedicated to the 10th anniversary of Dushanbe Branch of Moscow State University"*. 2019. P. 9–10.
9. Berdyshev V.I. On the problem of Chebyshev sets. *Akad. Nauk Azerb. SSR Dokl.*, 1966, vol. 22, no, 9, pp. 3–5.

10. Blatter J., Morris P.D., Wulbert D.E. Continuity of the set-valued metric projection. *Math. Ann.*, 1968, vol. 178, no. 1, pp. 12–24. doi: 10.1007/BF01350621 .
11. Brøndsted A. Convex sets and Chebyshev sets, II. *Math. Scand.*, 1966, vol. 18, pp. 5–15. doi: 10.7146/math.scand.a-10773 .
12. Brown A.L. Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1980, vol. s3-41, no. 2, pp. 297–339. doi: 10.1112/plms/s3-41.2.297 .
13. Brown A.L. Suns in normed linear spaces which are finite dimensional. *Math. Ann.*, 1987, vol. 279, no. 1, pp. 87–101. doi: 10.1007/BF01456192 .
14. Brown A.L. On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces. In: Fitzpatrick S.P., Giles J.R. (eds.) Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra, 1988). *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, Canberra: Austral. Nat. Univ., 1988, vol. 20, pp. 1–15.
15. Brown A.L. On the problem of characterising suns in finite dimensional spaces. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, 2002, vol. 68, pp. 315–328.
16. Brown A.L. Suns in polyhedral spaces. In: Girela D. et al (eds.), *Seminar of mathematical analysis* (Malaga/Seville, 2002/2003), Colecc. Abierta, Seville: Univ. Sevilla Secr. Publ., 2003, vol. 64, pp. 139–146.
17. Li T., Wang J., Wen H. Global structure and regularity of solutions to the Eikonal equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2019, vol. 232, no. 2, pp. 1073–1112. doi: 10.1007/s00205-018-01339-4 .
18. Nevesenko N.V. Strict sums and semicontinuity below metric projections in linear normed spaces. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, no. 4, pp. 308–312. doi: 10.1007/BF01786961 .
19. Nevesenko N.V., Oshman E.V. Metric projection onto convex sets. *Math. Notes*, 1982, vol. 31, no. 1, pp. 59–64. doi: 10.1007/BF01146270 .
20. Phelps R.R. A representation theorem for bounded convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1960, vol. 11, pp. 976–983. doi: 10.2307/2034446 .
21. Tsar'kov I.G. Bounded Chebyshev sets in finite-dimensional Banach spaces *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR.*, 1984, vol. 36, no. 1, pp. 530–537. doi: 10.1007/BF01139554 .
22. Tsar'kov I.G. Continuity of the metric projection, structural and approximate properties of sets. *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR.*, 1990, vol. 47, no. 2, pp. 218–227. doi: 10.1007/BF01156834 .
23. Tsar'kov I.G. Singular sets of surfaces. *Russ. J. Math. Phys.*, 2017, vol. 24, no. 2, pp. 263–271. doi: 10.1134/S1061920817020121 .
24. Tsar'kov I.G. Continuous selections for metric projection operators and for their generalizations. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 4, pp. 837–859. doi: 10.1070/IM8695 .
25. Tsar'kov I.G. Weakly monotone sets and continuous selection from a near-best approximation operator. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 303, pp. 227–238. doi: 10.1134/S0081543818080187 .
26. Tsar'kov I.G. Weakly monotone sets and continuous selection in asymmetric spaces. *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 9, pp. 1326–1347. doi: 10.1070/SM9107 .
27. Tsar'kov I.G. Smooth solutions of the eikonal equation and the behaviour of local minima of the distance function. *Izv. Math.*, 2019, vol. 83, no. 6, pp. 1234–1258. doi: 10.4213/im8850 .

Received December 19, 2019
Revised January 28, 2020
Accepted February 10, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 18-01-00333-a, 19-01-00332-a) and a grant from the President of the Russian Federation for Supporting Leading Scientific Schools (project no. NSh-6222.2018.1).

*Alexey R. Alimov,* Dr. Phys.-Math. Sci., Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119899 Russia; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia, e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru .

Cite this article as: A. R. Alimov. Convexity and monotone linear connectivity of sets with a continuous metric projection in three-dimensional spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 28–46 .