ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.5

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА ВСЕЙ ОСИ С ВЕСОМ ЧЕБЫШЁВА — ЭРМИТА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

К. Тухлиев, А. М. Туйчиев

Получены точные неравенства типа Джексона — Стечкина между величиной $E_{n-1}(f^{(s)})$ наилучшего среднеквадратического приближения на $\mathbb{R}$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ последовательных производных $f^{(s)}$ $(s = 0, 1, ..., r)$ функций $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ и усредненных значений обобщенных модулей непрерывности m-го порядка r-х производных. Для классов функций, определенных при помощи указанных модулей непрерывности, в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ вычислены точные значения некоторых экстремальных аппроксимационных характеристик.

Ключевые слова: наилучшие приближения, алгебраический полином, неравенства Джексона — Стечкина, модуль непрерывности m-го порядка, многочлен Чебышева — Эрмита.

K. Tukhliev, A. M. Tuichiev. Mean-square approximation of functions on the whole axis by algebraic polynomials with the Chebyshev–Hermite weight.

We derive exact inequalities of Jackson–Stechkin type between the value $E_{n-1}(f^{(s)})_2$ of the best mean-square approximation on $\mathbb{R}$ with the weight $\rho(x) = e^{-x^2}$ of successive derivatives $f^{(s)}$, $s = 0, 1, ..., r$, of functions $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ and average values of mth-order generalized moduli of continuity of the rth derivatives. The exact values of some extremal approximation characteristics in the space $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ are found for classes of functions defined in terms of these moduli of continuity.

Keywords: best approximations, algebraic polynomial, Jackson–Stechkin inequalities, mth-order modulus of continuity, Chebyshev–Hermite polynomial.

MSC: 42A10, 41A17, 41A44

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-270-277

1. Введение и постановка задач

Вопросы среднеквадратического приближения функций на всей оси $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ с весом Чебышева — Эрмита

$$\rho(x) = e^{-x^2}$$

в различных постановках рассматривались, например, в работах [1–5]. В [6] найдены точные константы в неравенствах типа Джексона — Стечкина, на некоторых классах функций оценки погрешности приближения подпространствами алгебраических полиномов выражены через $\mathcal{K}$-функционалы.

Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и приведем новые результаты. В частности, найдем точную константу в неравенстве Джексона — Стечкина между величиной $E_{n-1}(f^{(s)})$ наилучшего среднеквадратического приближения на оси $\mathbb{R}$ с весом $\rho(x)$ производной $f^{(s)}$ порядка s $(s = 0, 1, ..., r)$ произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ и обобщенным модулем непрерывности m-го порядка[1] ее r-й производной (см. теорему 1 ниже). Кроме того, получим аналогичный результат в терминах взвешеного p-среднего обобщенного модуля непрерывности m-го порядка r-й производной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, распространив утверждение теоремы 1 из работы [5] на более широкую область изменения параметра $p \in (0, \infty]$, см. теорему 2 ниже

[1]Определения используемых здесь терминов будут даны ниже.

и замечание к ней (в процитированной работе [5] этот параметр был обозначен буквой q и областью его изменения являлся полуинтервал $(0,2]$).

Обозначим через $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ пространство измеримых функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, квадрат модуля которых суммируем с весом ρ на всей оси $\mathbb{R}$. Пространство $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ наделено скалярным произведением

$$(f,g)=\int\limits_{\mathbb{R}}\rho(x)f(x)g(x)dx \tag{1.1}$$

и нормой

$$\|f\|:=\sqrt{(f,f)}=\Big(\int\limits_{\mathbb{R}}\rho(x)|f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Для функции $f\in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ величину, определенную равенством

$$E_{n-1}(f):=\inf\left\{\|f-p_{n-1}\|:p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\right\}, \tag{1.2}$$

называют *величиной наилучшего среднеквадратического приближения* функции f подпространством алгебраических полиномов $\mathcal{P}_{n-1}$ степени $\le n-1$ в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Далее мы будем использовать известные факты и обозначения, которые приведены в статьях из списка литературы. Поэтому изложим их кратко. Как известно (см. [2, с. 63]), система многочленов Чебышева—Эрмита

$$H_k(x):=\frac{(-1)^k}{\sqrt{k!2^k}}\,e^{x^2}\,\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}),\quad k\in\mathbb{Z}_+:=\{0,1,2,\dots\}, \tag{1.3}$$

является ортонормированной относительно скалярного произведения (1.1); кроме того [2, с. 194], любую функцию $f\in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ можно разложить в ряд Фурье по этой системе:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)H_k(x), \tag{1.4}$$

при этом знак равенства здесь понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Величины

$$c_k(f)=\int\limits_{\mathbb{R}}\rho(x)f(x)H_k(x)dx,\quad k=0,1,2,\dots,$$

называются коэффициентами Фурье функции f по системе многочленов (1.3), а

$$S_{n-1}(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(f)H_k(x)$$

— частичной суммой $(n-1)$-го порядка ряда (1.4) и, как известно (см. [2]), она является полиномом наилучшего приближения для функции f, т. е. на ней реализуется точная нижняя грань в (1.2). Таким образом, имеем $E_{n-1}(f)=\|f-S_{n-1}(f)\|=\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\Big)^{1/2}$.

В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор обобщенного сдвига с шагом $h\in[-1,1]$

$$F_h(f;x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}f(x\sqrt{1-h^2}+ht)\rho(t)\,dt. \tag{1.5}$$

При каждом фиксированном $h\in[-1,1]$ этот оператор является линейным, его норма, как оператора из $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, равна единице. Кроме того, имеют место следующие два важных свойства:

$$\|F_h-f\|_{2,\rho}\to 0,\ \text{если}\ h\to+0;\quad F_h(H_k,x)=(1-h^2)^{k/2}H_k(x)\ \text{при любых}\ h\in[-1,1],\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

С помощью оператора обобщенного сдвига определяются [1; 3] конечные разности первого и высших порядков для функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ равенствами

$$\Delta_h^1 f(x) = F_h(f,x) - f(x) = (F_h - I)f(x), \tag{1.6}$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - I)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k F_h^k f(x),$$

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \quad m = 2, 3, \ldots,$$

где I — единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, $F_h^k(f) := F_h^1(F_h^{k-1}(f))$; $F_h^1(f) := F_h(f)$; $F_h^0(f) \equiv f$. В работе [3, с. 4] для функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ определяется ее обобщенный модуль непрерывности натурального порядка m следующим образом: $\Omega_m(f,t) := \sup\big\{\|\Delta_h^m(f)\| \colon |h| \le t\big\}$, $t \in [0,1]$. В силу известного равенства [3, с. 8]

$$\|\Delta_h^m(f)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\big[1 - (1-h^2)^{k/2}\big]^{2m}, \quad |h| \le 1, \tag{1.7}$$

имеем $\Omega_m(f,t) = \sup_{|h|\le t} \Big\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\big[1 - (1-t^2)^{k/2}\big]^{2m}\Big\}^{1/2}$ при любом $t \in [0,1]$.

2. Основные теоремы

Через $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{N})$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны на любом конечном интервале вещественной оси, а производная r-го порядка $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Отметим, что если произвольная функция f принадлежит классу $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, то и все производные $f^{(s)}$, $0 \le s \le r$, также принадлежат классу $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le s \le r$, $0 < t \le 1$. Тогда для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ справедливо точное неравенство*

$$2^{r-s}\alpha_{n-s,r-s}\big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{2m} E_{n-s-1}^2(f^{(s)}) \le \Omega_m^2(f^{(r)}, t), \tag{2.1}$$

где, ради краткости, положено $\alpha_{n-s,r-s} := (n-s)(n-s-1)\cdots(n-s-(r-s)+1)$, и существует функция $f_0 \in L_{2,\rho}^{(r)}$, для которой неравенство (2.1) *обращается в равенство.*

Доказательство. Пользуясь разложением s-й производной $f^{(s)}$ $(0 \le s \le r)$ функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ в ряд Фурье по ортонормированной системе полиномов Эрмита [3–5]

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=s}^{\infty} c_k(f)\sqrt{2^s\alpha_{k,s}}\,H_{k-s}(x), \tag{2.2}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, после выполнения простых выкладок получаем

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)}) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) 2^s \alpha_{k,s}. \tag{2.3}$$

Так как для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ справедливо соотношение [5, с. 34]

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k^2(f) 2^r \alpha_{k,r}\big[1 - (1-t^2)^{(k-r)/2}\big]^{2m}, \tag{2.4}$$

то, учитывая равенство (2.3) и легкопроверяемое тождество $\alpha_{k,r} = \alpha_{k-s,r-s} \cdot \alpha_{k,s}$ $(k > r \geq s)$, из соотношения (2.4) получаем

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) \geq \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) 2^r \, \alpha_{k,r} \big[1 - (1-t^2)^{(k-r)/2}\big]^{2m}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2^r \, \alpha_{k,r}}{2^s \alpha_{k,s}} \, c_k^2(f) 2^s \, \alpha_{k,s} \big[1 - (1-t^2)^{(k-r)/2}\big]^{2m}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} 2^{r-s} \alpha_{k-s,r-s} \, c_k^2(f) 2^s \, \alpha_{k,s} \big[1 - (1-t^2)^{(k-r)/2}\big]^{2m}$$

$$= 2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{2m} \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) 2^s \alpha_{k,s}$$

$$= 2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{2m} \, E_{n-s-1}^2(f^{(s)}),$$

откуда и следует неравенство (2.1).

Рассмотрим функцию $f_0(x) := H_n(x)$, которая принадлежит классу $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$. В силу (2.2) имеем

$$f_0^{(s)}(x) = \sqrt{2^s \alpha_{n,s}} H_{n-s}(x).$$

Тогда из (2.3) и (2.4) следует, что

$$E_{n-s-1}^2(f_0^{(s)}) = 2^s \alpha_{n,s}, \tag{2.5}$$

$$\Omega_m^2(f_0^{(r)}, t) = 2^r \alpha_{n,s} \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{2m}. \tag{2.6}$$

Теперь, пользуясь равенствами (2.5) и (2.6), получаем

$$\Omega_m^2(f_0^{(r)}, t) = 2^r \alpha_{n,r} \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{2m} \frac{2^r \alpha_{n,r}}{2^s \alpha_{n,s}} \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{2m} 2^s \alpha_{n,s}$$

$$= 2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{2m} E_{n-s-1}^2(f_0^{(s)}).$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^{(r)}, \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} \cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)})}{\Omega_m^2(f^{(r)}, t)} = \frac{1}{\big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{2m}}; \tag{2.7}$$

в частности, при $t = \sqrt{2/(n-r)}$, $n > r$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *следует*

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ n \geq r}} \sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^{(r)}, \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} \cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)})}{\Omega_m^2(f^{(r)}, \sqrt{2/(n-r)})} = \Big(1 - \frac{1}{e}\Big)^{-2m}.$$

Далее условимся под *весовой функцией* на $[0, h]$ понимать неотрецательную суммируемую функцию φ, неэквивалентную нулю на этом же отрезке. Иногда для краткости такую функцию φ будем называть *весом* на $[0, h]$.

Теорема 2. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s \leq r$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1], \varphi$ *— весовая функция на отрезке* $[0, h]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R}), \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\|\Omega_{m,r}\|_p} = \Big(\int_0^h \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp} \varphi(t) dt\Big)^{-1/p}, \tag{2.8}$$

где функционал $\|\Omega_{m,r}\|_p$ *определен соотношениями*

$$\|\Omega_{m,r}\|_p := \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p} < \infty \quad \text{при} \quad 0<p<\infty,$$

$$\|\Omega_{m,r}\|_\infty := \lim_{p\to\infty}\|\Omega_{m,r}\|_p = \max\big\{\Omega_m(f^{(r)},t)\colon t\in[0,h]\cap\operatorname{supp}\varphi\big\};$$

при этом функционал, сопоставляющий функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ *неотрицательное число* $\|\Omega_{m,r}\|_p$, *лишь при* $1\le p\le\infty$ *является полунормой на* $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что равенство (2.8) достаточно установить лишь при $0<p<\infty$. Для этого возведем обе части неравенства (2.1) в степень $p/2$, умножим на вес φ и проинтегрируем по переменному t в промежутке $[0,h]$. В итоге получим

$$\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n-s,r-s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})\cdot\left(\int\limits_0^h\big[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}\le\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}.$$

Так как последнее неравенство верно для любой функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, то из него следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R}),\\ f\notin\mathcal{P}_r}}\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n-s,r-s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\le\left(\int\limits_0^h\big[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.9}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части равенства (2.8), пользуясь равенствами (2.5) и (2.6) для введенной при доказательстве теоремы 1 функции $f_0(x)=H_n(x)$, будем иметь

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})\\ f\notin\mathcal{P}_r}}\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n-s,r-s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\ge\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n-s,r-s}}\cdot E_{n-s-1}(f_0^{(s)})}{\left(\int_0^h\Omega_m^p(f_0^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}$$

$$=\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n-s,r-s}\cdot 2^s\cdot\alpha_{n,s}}}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}\left(\int_0^h\big[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h\big[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)\,dt\right)^{-1/p}. \tag{2.10}$$

Сопоставляя оценку сверху (2.9) с оценкой снизу (2.10), получим требуемое равенство (2.8). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что при $0<p\le 2$ теорема 2 другим способом доказана в [5].

Выше мы отмечали, что для функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, $r\in\mathbb{N}$, ее промежуточные производные $f^{(s)}$ $(0\le s\le r)$ также принадлежат пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Поэтому определенный интерес предоставляет изучение поведения величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})$ на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)}\subset L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ или на самом классе $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, т. е. требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup\big\{E_{n-s-1}(f^{(s)})\colon f\in\mathfrak{M}^{(r)}\big\}. \tag{2.11}$$

Для заданных $r\in\mathbb{N}$, $0<p\le\infty$, $h\in(0,1]$ и весовой функции φ на отрезке $[0,h]$ обозначим через $W_{m,p}^{(r)}(\varphi,h) := W_p^r(\Omega_m;\varphi,h)$ множество функций $f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}\le 1.$$

Приведем решение задачи (2.11) в случае $\mathfrak{M}^{(r)} = W^{(r)}_{p,m}(\varphi, h)$, используя теорему 2.

Следствие 2. *Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$, $h \in (0,1]$, φ — весовая функция на отрезке $[0, h]$. Тогда для любого натурального числа $n > r$ и произвольного натурального числа s, удовлетворяющего неравенствам $0 \le s \le r$, имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}_{p,m}(\varphi, h)\big) = \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\alpha_{n-s,r-s}}}\left(\int\limits_0^h \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, из неравенства (2.9) для любой функции $f \in L^{(r)}_{2,\rho}$ вытекает, что

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \le \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\alpha_{n-s,r-s}}}$$

$$\times\left(\int\limits_0^h \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\left(\int\limits_0^h \Omega^p_m(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \tag{2.13}$$

Из (2.13) в предположении, что $f \in W^{(r)}_{p,m}(\varphi, h)$, сразу получаем оценку сверху величины, расположенной в левой части соотношения (2.12):

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}_{p,m}(\varphi, h)) \le \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\alpha_{n-s,r-s}}\left(\int_0^h \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.14}$$

Для получения оценки снизу указанной величины вводим в рассмотрение функцию

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}}\left(\int\limits_0^h \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p} H_n(x)$$

и покажем, что $g_0 \in W^{(r)}_{p,m}(\varphi, h)$. Действительно, так как

$$g_0^{(r)}(x) = \left(\int\limits_0^h \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p} H_{n-r}(x),$$

то в силу формулы (2.4) имеем

$$\Omega_m(g_0^{(r)}, t) = \frac{\big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^m}{\left(\int_0^h \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Возведя обе части полученного равенства в степень p $(0 < p < \infty)$, затем умножая на вес $\varphi(t)$ и интегрируя в промежутке $[0, h]$, в итоге получаем

$$\int\limits_0^h \Omega^p_m(g_0^{(r)}, t)\varphi(t)dt = \frac{\int_0^h \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt}{\int_0^h \big[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\big]^{mp}\varphi(t)dt} = 1,$$

откуда и следует включение $g_0 \in W^{(r)}_{p,m}(\varphi, h)$.

Дифференцируя функцию g_0 последовательно s раз, имеем

$$g_0^{(s)}(x) = \frac{\sqrt{2^s\alpha_{n,s}}}{\sqrt{2^s\alpha_{n,r}}}\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p} H_{n-s}(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\,\alpha_{n-s,r-s}}}\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p} H_{n-s}(x). \tag{2.15}$$

Из (2.15) в силу (2.3) получаем

$$E_{n-s-1}(g_0^{(s)}) = \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\,\alpha_{n-s,r-s}}}\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Учитывая последнее равенство, запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W_{p,m}^{(r)}(\varphi,h)) \geq E_{n-s-1}(g_0^{(s)})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\alpha_{n-s,r-s}}\left(\int_0^h \left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.16}$$

Утверждение следствия 2 получаем путем сопоставления неравенств (2.14) и (2.16).

Из следствия 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть* $n, m, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s \leq r$, $0 < p < \infty$, $h \in (0,1]$, φ^* — *весовая функция на отрезке* $[0,h]$, *заданная формулой*

$$\varphi^*(t) := (n-r)t(1-t^2)^{(n-r)/2}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\varphi^*,h)\big) = \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\alpha_{n-s,r-s}}}\left(\frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right)^{1/p};$$

в частности, при $h = \sqrt{2/(n-r)}$ *имеем*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\varphi^*, \sqrt{2/(n-r)}\,)\big) \sim \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\alpha_{n-s,r-s}}}\left(\frac{\sqrt{2}}{1-e^{-1}}\right)^{2m}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рафальсон С.З.** О приближении функций в среднем суммами Фурье—Эрмита // Изв. вузов. Математика. 1968. №7. С. 78-84.
2. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.
3. **Абилов В.А., Абилова Ф.В.** Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье—Эрмита в пространстве $L_2(R; e^{-x^2})$ // Изв. вузов. Математика. 2006. №1. С. 3-12.
4. **Вакарчук С.Б. Вакарчук М.Б.** О приближении функций алгебраическими полиномами в среднем на вещественной оси с весом Чебышева—Эрмита // Вiсник Днiпропетровського университету. Серiя математика. 2011. Т. 19 (6/1). С. 28-31.
5. **Вакарчук С.Б., Швачко А.В.** О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева—Эрмита алгебраическими полиномами на всей вещественной оси // Збiрник праць Iнституту математики НАН України. 2013. Т. 10, № 1. С. 28-38.

6. **Вакарчук С.Б.** Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева—Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2014. Т.95, №5. С. 666-684.

Поступила 20.08.2019
После доработки 16.03.2020
Принята к публикации 23.03.2020

Тухлиев Камаридин
доктор физ.-мат. наук, профессор
Худжандский государственный университет им. академика Б.Гафурова
г. Худжанд
e-mail: kamaridin.t54@mail.ru

Туйчиев Анварджон Махмуджанович
Преподаватель кафедры информатики,
Худжандский государственный университет им. академика Б.Гафурова
г. Худжанд
e-mail: t-87yil@mail.ru

REFERENCES

1. Fourier–Hermite sums. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1968, no. 7, pp. 78–84 (in Russian).
2. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 416 p. ISBN (3rd ed.): 978-5-9221-0406-7 .
3. Abilov V.A., Abilova F.V. Some problems of the approximation of functions by Fourier–Hermite sums in the space $L_2(R; e^{-x^2})$. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2006, vol. 50, no. 1, pp. 1–10.
4. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. Mean approximation of functions by algebraic polynomials on real axis with Chebyshev–Hermite weight. *Dnipr. Univ. Math. Bull.*, 2011, vol. 19, no. 6/1, pp. 28–31 (in Russian).
5. Vakarchuk S.B., Shvachko A.V. On the approximation in the mean with the Chebyshev-Hermite weight by algebraic polynomials on the real axis. *Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 2013, vol. 10, no. 1, pp. 28–38 (in Russian).
6. . Vakarchuk S.B. Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev–Hermite weight and widths of function classes. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, no. 5, pp. 599–614. doi: 10.1134/S0001434614050046 .

Received August 28, 2019
Revised March 16, 2020
Accepted March 23, 2020

K. Tukhliev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Khujand State University named after acad. B. Gafurov, Khujand, 735700, Republic of Tajikistan, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru .

A. M. Tuychiev, Teacher of Informatics Department, Khujand State University named after acad. B. Gafurov, Khujand, 735700, Republic of Tajikistan, e-mail: t-87yil@mail.ru .

Cite this article as: K. Tukhliev, A. M. Tuichiev. Mean-square approximation of functions on the whole axis by algebraic polynomials with the Chebyshev–Hermite weight, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 270–277 .