ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.5

О ЯВЛЕНИИ ГИББСА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

А.-Р. К. Рамазанов, А. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

В случае функций $f(x)$, непрерывных на данном отрезке $[a,b]$, кроме точек разрыва со скачком исследовано явление Гиббса для рациональных сплайн-функций $R_{N,1}(x)=R_{N,1}(x,f,\Delta,g)$, определяемых для сетки узлов $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ и набора полюсов $g_i\notin[x_{i-1},x_{i+1}]$ $(i=1,2,\dots,N-1)$ равенствами $R_{N,1}(x)=[R_i(x)(x-x_{i-1})+R_{i-1}(x)(x_i-x)]/(x_i-x_{i-1})$ при $x\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\dots,N)$; здесь рациональные функции $R_i(x)=\alpha_i+\beta_i(x-x_i)+\gamma_i/(x-g_i)$ $(i=1,2,\dots,N-1)$ однозначно определяются условиями $R_i(x_j)=f(x_j)$ $(j=i-1,i,i+1)$; считаем $R_0(x)\equiv R_1(x)$, $R_N(x)\equiv R_{N-1}(x)$. Найдены условия на сетки узлов Δ для отсутствия и для наличия явления Гиббса в окрестности точки разрыва.

Ключевые слова: интерполяционный сплайн, рациональный сплайн, явление Гиббса.

A.-R. K. Ramazanov, A. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. On the Gibbs phenomenon for rational spline functions.

In the case of functions $f(x)$ continuous on a given closed interval $[a,b]$ except for jump discontinuity points, the Gibbs phenomenon is studied for rational spline functions $R_{N,1}(x)=R_{N,1}(x,f,\Delta,g)$ defined for a knot grid $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ and a family of poles $g_i\notin[x_{i-1},x_{i+1}]$ $(i=1,2,\dots,N-1)$ by the equalities $R_{N,1}(x)=[R_i(x)(x-x_{i-1})+R_{i-1}(x)(x_i-x)]/(x_i-x_{i-1})$ for $x\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\dots,N)$. Here the rational functions $R_i(x)=\alpha_i+\beta_i(x-x_i)+\gamma_i/(x-g_i)$ $(i=1,2,\dots,N-1)$ are uniquely defined by the conditions $R_i(x_j)=f(x_j)$ $(j=i-1,i,i+1)$; we assume that $R_0(x)\equiv R_1(x)$, $R_N(x)\equiv R_{N-1}(x)$. Conditions on the knot grid Δ are found under which the Gibbs phenomenon occurs or does not occur in a neighborhood of a discontinuity point.

Keywords: interpolation spline, rational spline, Gibbs phenomenon.

MSC: 97N50

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-238-251

Введение

Явление Гиббса (см., например, [1, с. 958–959]), обнаруженное как свойство частичных сумм Фурье разрывных со скачком функций, исследовано также для многих других аппаратов приближения функций (см., например, [2, гл. I, § 41; 3; 4] и цитированную в них литературу).

В последние годы продолжаются активные исследования явления Гиббса для решения аппроксимационных задач как в математике, так и в других областях науки, например, для подавления эффекта Гиббса при расчетах различных физических полей с граничными условиями, задаваемыми разрывными функциями. Ведется также поиск новых аппаратов приближения функций, для которых нехарактерно явление Гиббса в окрестностях особых точек (см., например, [5–7]).

Переходя к классическим полиномиальным сплайнам, отметим, что они (по терминологии Ю.Н. Субботина [8]) не обладают свойством безусловной сходимости на всем классе $C_{[a,b]}$ непрерывных на $[a,b]$ функций. Поэтому при изучении явления Гиббса для кусочно-непрерывных функций, имеющих изолированные разрывы со скачком, приходится накладывать различные дополнительные ограничения на функцию или на сетку узлов, метрику (см., например, [9, гл. V, § 4; 10; 11; 12]).

Известно также [13], что можно избежать явления Гиббса, например, для кубических сплайнов в окрестности точки разрыва со скачком, если ввести дополнительные узлы сплайнов, не являющиеся узлами интерполяции. Однако это связано с некоторыми усложнениями применения таких сплайнов.

В данной работе для сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам [14;15] найдены условия наличия и условия отсутствия явления Гиббса для произвольных непрерывных на отрезке функций, исключая изолированные точки разрыва первого рода со скачком.

1. Общая постановка задачи и обозначения

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a,b]$. Для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ положим $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, N)$, $\Delta_1 = \max\{h_1, h_2\}$, $\Delta_i = \max\{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\}$ $(i = 2, 3, \dots, N-1)$, $\Delta_N = \max\{h_{N-1}, h_N\}$, $\|\Delta\| = \max\{h_i | i = 1, 2, \dots, N\}$.

Для сетки Δ и произвольного числа $\lambda > 0$ определим также набор точек $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ таких, что $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ при $h_{i+1} \leqslant h_i$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$ при $h_i < h_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$.

Тогда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ однозначно определяется рациональная функция

$$R_i(x) = R_i(x, f) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i} \tag{1.1}$$

по условиям $R_i(x_j) = f(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$. Считаем также, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$.

По рациональным интерполянтам $R_i(x)$ определим сплайн $R_{N,1}(x, f) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ следующей формулой:

$$R_{N,1}(x, f) = R_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \tag{1.2}$$

при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N)$. В работе [14] была доказана принадлежность такого сплайна классу $C^{(1)}_{[a,b]}$.

Вопросы ковыпуклой интерполяции сплайн-функциями $R_{N,1}(x, f)$ рассмотрены в статье 2018 г. (А.-Р.К. Рамазанов, В.Г. Магомедова. Ковыпуклая интерполяция сплайнами по трехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 164–175.)

Отметим два свойства сплайнов, определяемых равенствами (1.1) и (1.2).

Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ из (1.1) выражаются через разделенные разности функции $f(x)$ равенствами

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\
\beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\
\gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i).
\end{aligned}$$

Поэтому при фиксированных сетке узлов Δ и наборе точек g сплайн $R_{N,1}(x, f)$ представляет собой линейный оператор на классе действительнозначных функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$. Кроме того, и операторы построения интерполянтов, и оператор $R_{N,1}(x, f)$ сохраняют на месте константные функции.

Если при этом через $\omega(\delta, F, [\alpha, \beta])$ обозначить равномерный модуль непрерывности функции $F(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, то в теореме 0.1 из [15] фактически доказано, что для любого $\lambda > 0$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 2, 3, \dots, N-1)$ выполняется неравенство

$$|F(x) - R_{N,1}(x, F)| \leqslant (2 + \max\{1, \lambda\}) \omega(\Delta_i, F, [x_{i-2}, x_{i+1}]), \tag{1.3}$$

а при $x \in [x_0, x_1]$ и $x \in [x_{N-1}, x_N]$ в правой части (1.3) вместо модуля непрерывности на $[x_{i-2}, x_{i+1}]$ берутся соответственно значения $\omega(\Delta_1, F, [x_0, x_2])$ и $\omega(\Delta_N, F, [x_{N-2}, x_N])$.

В частности, для любой функции $F \in C_{[a,b]}$ и произвольной сетки узлов Δ для $\lambda = 1$ при всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|F(x) - R_{N,1}(x, F)| \leqslant 3\omega(\|\Delta\|, F, [a, b]). \tag{1.4}$$

Отсюда получим, что для любой последовательности сеток узлов $\Delta^{(n)}$ с $\|\Delta^{(n)}\| \to 0$ соответствующая последовательность сплайнов $R_{N_n,1}(x, F, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ сходится к функции $F \in C_{[a,b]}$ равномерно на $[a, b]$.

Эти свойства сплайнов по рациональным интерполянтам позволяют изучить вопрос о явлении Гиббса для них в случае функций, непрерывных на отрезке, исключая изолированные точки разрыва первого рода со скачком.

Действительно, пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, кроме точек разрыва первого рода $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m \in (a, b)$ со скачками $d_i = f(\tau_i+0)-f(\tau_i-0)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, причем будем считать, что для всех $x \in (a, b)$ выполняется равенство

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x + 0) + f(x - 0)).$$

Обозначим $\psi_i(x) = \operatorname{sign}(x - \tau_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и рассмотрим, как обычно (см., например, [2, гл. I, § 41]), разность

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{2}\psi_i(x),$$

которая является непрерывной функцией на $[a, b]$.

Чтобы исследовать теперь явление Гиббса в окрестности, скажем, точки τ_1, возьмем внутри отрезка $[a, b]$ окрестность $(\tau_1-\delta, \tau_1+\delta)$ этой точки, которая не содержит других точек разрыва и воспользуемся равенством, справедливым в силу линейности оператора $R_{N_n,1}$:

$$R_{N_n,1}(x, f) = \frac{d_1}{2}R_{N_n,1}(x, \psi_1) + \sum_{i=2}^{m}\frac{d_i}{2}R_{N_n,1}(x, \psi_i) + R_{N_n,1}(x, F).$$

Для функции $F \in C_{[a,b]}$ в силу (1.4) имеет место равномерная сходимость $R_{N_n,1}(x, F)$ к $F(x)$ на $[a, b]$ при $\|\Delta^{(n)}\| \to 0$. Оператор $R_{N_n,1}$ точен на константах, поэтому при $i = 2, 3, \ldots, m$ имеем $R_{N_n,1}(x, \psi_i) \equiv \psi_i(x)$ в окрестности $(\tau_1 - \delta, \tau_1 + \delta)$ для всех n, начиная с некоторого n_1.

Если $\bar{x} \in [a, b]$ и $\bar{x} \neq \tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то возьмем $\delta > 0$ такое, что $E_\delta = (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)\cap[a, b]$ не содержит точек разрыва τ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда для всех n, начиная с некоторого n_0, и всех $x \in E_\delta$ имеем

$$R_{N_n,1}(x, f) - f(x) = R_{N_n,1}(x, F) - F(x),$$

откуда (в силу равномерной сходимости $R_{N_n,1}(x, F)$ к $F(x)$ на $[a, b]$) следует сходимость $R_{N_n,1}(x, f)$ к $f(x)$ в точке $\bar{x}$.

Значит, явление Гиббса для функции $f(x)$ в окрестности точки τ_1 определяется функцией $\psi_1(x)$.

Поэтому ниже на данном отрезке $[a, b]$ при некоторой фиксированной точке $t_0 \in (a, b)$ исследуется явление Гиббса для функции $\psi(x) = \operatorname{sign}(x - t_0)$.

Сплайны последовательности $R_{N_n,1}(x, \psi) = R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ определяются в полной аналогии с равенствами (1.1) и (1.2) по последовательностям сеток узлов $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{N_n}^{(n)} = b$ $(N_n \geqslant 2)$ вместо сетки Δ и наборов точек $g^{(n)} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{N_n-1}^{(n)}\}$ вместо g.

Как основной результат (теорема 1 из разд. 3) работы для сплайн-функций $R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ с $\|\Delta^{(n)}\| \to 0$ получены условия на сетки узлов $\Delta^{(n)}$, при которых явление Гиббса отсутствует в окрестности точки $t_0 \in (a, b)$.

Показано также (теорема 2 из разд. 3), что найденные условия существенны для отсутствия явления Гиббса в окрестности такой точки t_0.

Для доказательства этих утверждений используются приводимые далее некоторые аппроксимационные свойства сплайн-функций по рациональным интерполянтам в случае сигнум-функции.

2. Приближение сигнум-сдвига сплайнами по рациональным интерполнятам

Речь идет о приближении функции $\psi(x) = \operatorname{sign}(x - t_0)$ на отрезке $[a, b]$ при некоторой фиксированной точке $t_0 \in (a, b)$ сплайнами $R_{N,1}(x, \psi) = R_{N,1}(x, \psi, \Delta, g)$ вида (1.2) по заданной сетке узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ и по соответствующему набору точек $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$.

Всюду ниже для краткости обозначим

$$M_r(t_0) = \sup\{R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) \mid x \in (t_0, b]\}, \quad M_\ell(t_0) = \sup\{\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) \mid x \in [a, t_0)\}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда точка разрыва отлична от узлов сетки, например, $t_0 \in (x_{i-1}, x_i)$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant N$.

Лемма 1. *Если $t_0 \in (x_{i-1}, x_i)$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant N$, то при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство $-1 \leqslant R_{N_n,1}(x, \psi) \leqslant 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $i = 1, 2, \ldots, N - 1$ имеем $R_i(x_{i-1}) = \psi(x_{i-1}) = -1$, $R_i(x_i) = \psi(x_i) = 1$, $R_i(x_{i+1}) = \psi(x_{i+1}) = 1$. Тогда

$$\psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = -\frac{2}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} < 0,$$

и имеем

$$R_i''(x) = 2\gamma_i \frac{1}{(x - g_i)^3} = 2\psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \frac{(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i)}{(x - g_i)^3} < 0.$$

Поэтому функция $y = R_i(x)$ является выпуклой вверх на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, а значит, ее график на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ не может проходить выше прямой $y = 1$ или ниже прямой $y = -1$.

Учтем, что $R_{N,1}(x, \psi) = R_1(x, \psi)$ при $x \in [x_0, x_1]$ $(i = 1)$, а при $i = 2, 3, \ldots, N$ для другого интерполянта $R_{i-1}(x)$, образующего сплайн $R_{N,1}(x, \psi)$, имеем $R_{i-1}(x_{i-2}) = R_{i-1}(x_{i-1}) = -1$, $R_{i-1}(x_i) = 1$. Поэтому функция $y = R_{i-1}(x)$ является выпуклой вниз на отрезке $[x_{i-2}, x_i]$, а ее график на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ расположен между прямыми $y = 1$ и $y = -1$.

Остается при $i = N$ учесть равенство $R_{N,1}(x, \psi) = R_{N-1}(x, \psi)$, а при $i = 2, 3, \ldots, N - 1$ воспользоваться равенством (1.2).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть сплайн $R_{N,1}(x, \psi)$ определяется равенствами* (1.1) *и* (1.2) *с* $0 < \lambda \leqslant 1$ *и пусть $t_0 \in (x_{i-1}, x_i)$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant N - 1$.*

Тогда при $h_{i+1} \leqslant h_i$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{6} \frac{h_{i+1}}{h_i} < M_r(t_0) < \frac{1}{2} \frac{h_{i+1}}{h_i}, \tag{2.1}$$

а при $h_i < h_{i+1}$ (когда мы по определению имеем $\lambda = (x_{i-1} - g_i)/h_i$) справедливо неравенство

$$\frac{4}{81}\lambda < M_r(t_0) < 2\lambda. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $R_j(x) \equiv 1$ при $j = i+1, i+2, \ldots, N$, поэтому в силу точности оператора интерполяции на константах получаем $R_{N,1}(x, \psi) \equiv 1$ при $x \in [x_{i+1}, b]$. По лемме 1 при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем $-1 \leqslant R_{N,1}(x, \psi) \leqslant 1$.

Значит, $M_r(t_0)$ достигается на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$M_r(t_0) = \max\{R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) \parallel x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

При $x \in [x_i, x_{i+1}]$ из (1.2), взяв $i+1$ вместо i, получим

$$R_{N,1}(x,\psi) - \psi(x) = (R_i(x) - 1)\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}.$$

Представим $R_i(x)$ в виде

$$R_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + A_i\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{x - g_i}$$

с коэффициентами $a_i = \psi(x_i) = 1$, $b_i = \psi(x_i, x_{i+1}) = 0$,

$$A_i = \psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i) = \frac{2(g_i - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}.$$

Действительно, такое представление возможно, так как оно равносильно равенству

$$R_i(x) = a_i + A_i(g_i - x_{i+1}) + (b_i + A_i)(x - x_i) + A_i(g_i - x_i)(g_i - x_{i+1})\frac{1}{x - g_i}.$$

Сравнивая последнее с представлением (1.1), получим равенства

$$a_i + A_i(g_i - x_{i+1}) = \alpha_i, \quad b_i + A_i = \beta_i, \quad A_i(g_i - x_i)(g_i - x_{i+1}) = \gamma_i.$$

Отсюда и из равенств для коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ в случае функции $\psi(x)$ получим указанные выражения для новых коэффициентов a_i, b_i, A_i.

Тогда при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$R_{N,1}(x,\psi) - \psi(x) = \frac{2(g_i - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}\,\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})^2}{g_i - x}. \tag{2.3}$$

Если продифференцировать правую часть (2.3) и приравнять числитель полученной дроби к нулю, то (с учетом деления на $x - x_{i+1}$) придем к равенству

$$(x - x_{i+1})(x - x_i) + 2(x - x_i)(g_i - x) + (x - x_{i+1})(g_i - x) = 0.$$

Преобразуем $x - x_{i+1} = (x - x_i) - (x_{i+1} - x_i)$, $g_i - x = -(x - x_i) + (g_i - x_i)$ и запишем левую часть в виде трехчлена относительно $x - x_i$. Имеем

$$-2(x - x_i)^2 + 3(g_i - x_i)(x - x_i) - (g_i - x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0.$$

Отсюда получим, что максимальное свое значение на $[x_i, x_{i+1}]$ правая часть равенства (2.3) принимает в точке $t_1 \in (x_i, x_{i+1})$, для которой

$$2(t_1 - x_i)^2 - 3(g_i - x_i)(t_1 - x_i) + (g_i - x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0. \tag{2.4}$$

В случае $h_{i+1} \leqslant h_i$ и $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ отсюда получим $t_1 = x_i + Ah_{i+1}$, где обозначено $A = \dfrac{3}{4}(1+\lambda) - \dfrac{1}{4}\sqrt{(1+\lambda)(1+9\lambda)}$.

Легко проверить, что $A \in [\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2})$ при $0 < \lambda \leqslant 1$, а поэтому имеем $t_1 \in (x_i, x_{i+1})$ (другой корень уравнения (2.4) выходит за пределы $[x_i, x_{i+1}]$).

Подставляя полученное в (2.3), находим

$$R_{N,1}(t_1,\psi) - \psi(t_1) = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}} \cdot 2\Big(1 + \lambda\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}}\Big)\frac{A(1-A)^2}{\lambda + 1 - A}. \tag{2.5}$$

Отсюда, используя убывание правой части относительно $\lambda \in (0,1]$, а также убывание $A(1-A)^2(2-A)^{-1}$ при $A \in [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$, получим

$$R_{N,1}(t_1,\psi)-\psi(t_1) < 2\frac{h_{i+1}}{h_i}A(1-A) < \frac{1}{2}\frac{h_{i+1}}{h_i},$$

$$R_{N,1}(t_1,\psi)-\psi(t_1) > 2\frac{h_{i+1}}{h_i}\frac{A(1-A)^2}{2-A} > \frac{1}{6}\frac{h_{i+1}}{h_i},$$

а значит, неравенство (2.1) доказано.

Пусть теперь $h_i < h_{i+1}$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$. Тогда из уравнения (2.4) находим $t_1 = x_i + B_1$, где

$$B_1 = \frac{1}{4}\sqrt{9(x_i-g_i)^2+8(x_i-g_i)(x_{i+1}-x_i)} - \frac{3}{4}(x_i-g_i).$$

Покажем, что в этом случае имеем

$$\frac{1}{4}(x_i-x_{i-1}) < \frac{\sqrt{17}-3}{4}(x_i-x_{i-1}) < t_1-x_i < \frac{1}{3}(x_{i+1}-x_i). \tag{2.6}$$

Действительно, правое неравенство равносильно

$$\sqrt{9(x_i-g_i)^2+8(x_i-g_i)(x_{i+1}-x_i)} < 3(x_i-g_i)+\frac{4}{3}(x_{i+1}-x_i),$$

что вытекает из $x_{i+1}-x_i>0$.

Далее, так как $x_i-x_{i-1} < x_{i+1}-x_i$, имеем

$$4(t_1-x_i) = 4B_1 \geqslant [\sqrt{9(1+\lambda)^2+8(1+\lambda)}-3(1+\lambda)](x_i-x_{i-1})$$

$$= (x_i-x_{i-1})\frac{8}{\sqrt{9+\dfrac{8}{1+\lambda}}+3} > (x_i-x_{i-1})(\sqrt{17}-3).$$

Применив (2.6) и $x_{i-1}-g_i=\lambda h_i$, из равенства (2.3) при $x=t_1$ и $0<\lambda\leqslant 1$ получим

$$R_{N,1}(t_1,\psi)-\psi(t_1) = \frac{2\lambda}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})}\,\frac{t_1-x_i}{t_1-x_i+x_i-g_i}\,[(x_{i+1}-x_i)-(t_1-x_i)]^2$$

$$> \frac{2\lambda}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})}\,\frac{\frac{1}{4}(x_i-x_{i-1})}{\frac{1}{4}(x_i-x_{i-1})+(1+\lambda)(x_i-x_{i-1})}\cdot\frac{4}{9}(x_{i+1}-x_i)^2$$

$$= \frac{8}{9}\cdot\frac{\lambda}{5+4\lambda}\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}} > \frac{4}{81}\lambda;$$

$$R_{N,1}(t_1,\psi)-\psi(t_1) < \frac{2\lambda(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}-x_{i-1}} < 2\lambda.$$

Неравенство (2.2) также доказано.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть сплайн $R_{N,1}(x,\psi)$ определяется равенствами* (1.1) *и* (1.2) *с* $0<\lambda\leqslant 1$ *и пусть $t_0 \in (x_{i-1},x_i)$ для некоторого i, $2\leqslant i\leqslant N$.*

Тогда при $h_{i-1}<h_i$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{6}\frac{h_{i-1}}{h_i} < M_\ell(t_0) < \frac{1}{2}\frac{h_{i-1}}{h_i}, \tag{2.7}$$

а при $h_i \leqslant h_{i-1}$ и $\lambda=(g_{i-1}-x_i)/h_i$ — неравенство

$$\frac{4}{81}\lambda < M_\ell(t_0) < 2\lambda. \tag{2.8}$$

Доказательство. В данном случае $R_j(x) \equiv -1$ при $j = 0, 1, \ldots, i-2$, а поэтому $R_{N,1}(x, \psi) \equiv -1$ при $x \in [a, x_{i-2}]$. Учитывая еще лемму 1, получим $M_\ell(t_0) = \sup\{\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) | x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]\}$.

Оценки $M_\ell(t_0)$ получаются по аналогии с оценками (2.1) и (2.2) для $M_r(t_0)$, поэтому укажем лишь, как выражается значение $M_\ell(t_0)$ через узлы.

При $x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]$ имеем $R_{i-2}(x, \psi) \equiv -1$, поэтому

$$\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) = (-1 - R_{i-1}(x)) \frac{x - x_{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}}.$$

Учитывая $\psi(x_i) = 1$, $\psi(x_{i-2}) = \psi(x_{i-1}) = -1$, по аналогии с (2.3) отсюда получим

$$\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) = \frac{-2(g_{i-1} - x_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2})(x_i - x_{i-2})} \, \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-2})^2}{g_{i-1} - x}. \tag{2.9}$$

На отрезке $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ свое максимальное значение разность $\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi)$ принимает в точке $t_2 \in (x_{i-2}, x_{i-1})$, для которой

$$2(t_2 - x_{i-1})^2 - 3(g_{i-1} - x_{i-1})(t_2 - x_{i-1}) - (g_{i-1} - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2}) = 0. \tag{2.10}$$

Отсюда в случае $h_{i-1} < h_i$ и $g_{i-1} = x_{i-2} - \lambda h_{i-1}$ получим $t_2 = x_{i-1} - A h_{i-1}$, где, как и выше,

$$A = \frac{3}{4}(1 + \lambda) - \frac{1}{4}\sqrt{(1 + \lambda)(1 + 9\lambda)}.$$

Тогда при $h_{i-1} < h_i$ вполне аналогично доказательству (2.1) получим

$$\frac{1}{6}\frac{h_{i+1}}{h_i} < \psi(t_2) - R_{N,1}(t_2, \psi) < \frac{1}{2}\frac{h_{i-1}}{h_i},$$

что доказывает (2.7).

Пусть теперь $h_i \leqslant h_{i-1}$, и докажем неравенство (2.8). В этом случае $g_{i-1} = x_i + \lambda h_i$, и из (2.10) находим $t_2 = x_{i-1} - B_2$, где

$$B_2 = \frac{1}{4}\sqrt{9(g_{i-1} - x_{i-1})^2 + 8(g_{i-1} - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2})} - \frac{3}{4}(g_{i-1} - x_{i-1});$$

при этом аналогично (2.8) получим неравенство

$$\frac{1}{4}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\sqrt{17} - 3}{4}(x_i - x_{i-1}) < x_{i-1} - t_2 < \frac{1}{3}(x_{i-1} - x_{i-2}).$$

Отсюда и из (2.9) при $x = t_2$ аналогично (2.2) имеем $\dfrac{4}{81}\lambda < \psi(t_2) - R_{N,1}(t_2, \psi) < 2\lambda$.

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда точка разрыва функции $\psi(x) = \operatorname{sign}(x - t_0)$ совпадает с некоторым узлом сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$, скажем, $t_0 = x_i$ при некотором $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Тогда $\psi(x_j) = -1$ при $j < i$, $\psi(x_i) = 0$, $\psi(x_j) = 1$ при $j > i$. Поэтому при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем

$$R_i(x, \psi) = a_i + b_i(x - x_i) + A_i \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{x - g_i},$$

$$a_i = \psi(x_i) = 0, \quad b_i = \psi(x_i, x_{i+1}) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$A_i = \psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i) = \frac{(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})};$$

$$R_i''(x,\psi)=2\psi(x_{i-1},x_i,x_{i+1})\frac{(x_{i-1}-g_i)(x_i-g_i)(x_{i+1}-g_i)}{(x-g_i)^3}.$$

Здесь $g_i\notin[x_{i-1},x_{i+1}]$, поэтому при $x\in[x_{i-1},x_{i+1}]$ имеем $R_i''(x,\psi)\psi(x_{i-1},x_i,x_{i+1})>0$, причем

$$\psi(x_{i-1},x_i,x_{i+1})=\frac{2x_i-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})}.$$

Значит, условие выпуклости вверх функции $R_i(x,\psi)$ на отрезке $[x_{i-1},x_{i+1}]$ равносильно выполнению неравенства $x_i-x_{i-1}<x_{i+1}-x_i$, выпуклости вниз — выполнению неравенства $x_{i+1}-x_i<x_i-x_{i-1}$, линейности — выполнению равенства $x_i-x_{i-1}=x_{i+1}-x_i$.

Для сетки узлов $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ $(N\geqslant 2)$ и числа $\lambda>0$ полагаем, как и выше, $g_i=x_{i+1}+\lambda h_{i+1}$ при $h_{i+1}\leqslant h_i$ и $g_i=x_{i-1}-\lambda h_i$ при $h_i<h_{i+1}$.

Из (1.1) ясно, что при $x\in[x_{j-1},x_j]$ $(j=1,2,\dots,N)$ имеем $R_j(x,\psi)\equiv-1$ для $j\leqslant i-2$ и $R_j(x,\psi)\equiv 1$ для $j\geqslant i+2$. Поэтому из (1.2) следует, что разность $R_{N,1}(x,\psi)-\psi(x)$ может быть отличной от нуля лишь при $x\in(x_{i-2},x_{i+2})$.

Лемма 4. *Если $t_0=x_i$ для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant N-1$, то для функции $\psi(x)=\operatorname{sign}(x-t_0)$ и соответствующих интерполянтов $R_j(x)=R_j(x,\psi)$ $(j=i-1,i,i+1)$ вида* (1.1) *выполняются неравенства*

$$\begin{aligned}
-1\leqslant R_i(x)\leqslant 1 \quad &\textit{при}\ \ x\in[x_{i-1},x_{i+1}] \quad \textit{и}\ \ 0<\lambda\leqslant 1;\\
-1\leqslant R_{i-1}(x)\leqslant 0 \quad &\textit{при}\ \ x\in[x_{i-1},x_i] \quad\ \ \textit{и}\ \ \lambda>0;\\
0\leqslant R_{i+1}(x)\leqslant 1 \quad &\textit{при}\ \ x\in[x_i,x_{i+1}] \quad\ \ \textit{и}\ \ \lambda>0.
\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $h_i<h_{i+1}$. Тогда функция $R_i(x)$ выпукла вверх на $[x_{i-1},x_{i+1}]$ и при этом график $y=R_i(x)$ проходит через точки $(x_{i-1},-1)$, $(x_i,0)$ и $(x_{i+1},1)$. Поэтому $-1\leqslant R_i(x)\leqslant 0$ при $x\in[x_{i-1},x_i]$ и $R_i(x)\geqslant 0$ при $x\in[x_i,x_{i+1}]$, так как в противном случае нарушится выпуклость вверх $R_i(x)$ на $[x_{i-1},x_{i+1}]$.

Остается установить неравенство $R_i(x)\leqslant 1$ при $x\in(x_i,x_{i+1})$ и $0<\lambda\leqslant 1$, которое равносильно

$$\frac{\lambda(x_{i-1}+x_{i+1}-2x_i)}{x_{i+1}-x_{i-1}}\,\frac{x-x_i}{x-g_i}\leqslant 1.$$

Достаточно доказать, что супремум левой части при $x\in(x_i,x_{i+1})$ не превосходит 1, т.е. доказать неравенство

$$\frac{\lambda(x_{i-1}+x_{i+1}-2x_i)}{x_{i+1}-x_{i-1}}\,\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-g_i}\leqslant 1,$$

которое можно записать в виде очевидного (при $0<\lambda\leqslant 1$) неравенства

$$\lambda\frac{x_{i+1}-x_i-(x_i-x_{i-1})}{x_{i+1}-x_{i-1}+\lambda(x_i-x_{i-1})}\,\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}}\leqslant 1.$$

Значит, если $h_i<h_{i+1}$ и $0<\lambda\leqslant 1$, то при $x\in[x_{i-1},x_{i+1}]$ имеем $-1\leqslant R_i(x)\leqslant 1$.

Докажем, что последнее двойное неравенство выполняется также в случае $h_{i+1}\leqslant h_i$ и $0<\lambda\leqslant 1$.

Если $x\in[x_i,x_{i+1}]$, то имеем $0\leqslant R_i(x)\leqslant 1$ ввиду выпуклости вниз $R_i(x)$ на $[x_{i-1},x_{i+1}]$ с учетом принадлежности точек $(x_{i-1},-1)$, $(x_i,0)$ и $(x_{i+1},1)$ графику $y=R_i(x)$. Отсюда, в частности, следует, что $R_i(x)<0$ при $x\in(x_{i-1},x_i)$.

Остается показать, что при $x\in(x_{i-1},x_i)$ и $0<\lambda\leqslant 1$ выполняется неравенство $R_i(x)\geqslant -1$, что равносильно выполнению неравенства

$$\lambda\frac{2x_i-x_{i-1}-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}\,\frac{x_i-x}{g_i-x}\leqslant 1,$$

которое вытекает при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ из неравенства

$$\lambda \frac{x_i - x_{i-1} - (x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1} + \lambda(x_{i+1} - x_i)} \leqslant 1.$$

Следовательно, $-1 \leqslant R_i(x) \leqslant 1$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и $0 < \lambda \leqslant 1$.

График $y = R_{i-1}(x)$ проходит через точки $(x_{i-2}, -1)$, $(x_{i-1}, -1)$, $(x_i, 0)$, а функция $R_{i-1}(x)$ выпукла вниз на $[x_{i-2}, x_i]$. Поэтому $-1 \leqslant R_{i-1}(x) \leqslant 0$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Аналогично, график $y = R_{i+1}(x)$ проходит через точки $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 1)$, $(x_{i+2}, 1)$, а функция $R_{i+1}(x)$ выпукла вверх на $[x_i, x_{i+2}]$. Поэтому $0 \leqslant R_{i+1}(x) \leqslant 1$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Лемма 4 доказана.

3. Основные результаты

На отрезке $[a, b]$ с фиксированной точкой $t_0 \in (a, b)$ рассмотрим функцию $\psi(x) = \operatorname{sign}(x - t_0)$ и по последовательностям сеток узлов $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{N_n}^{(n)} = b$ $(N_n \geqslant 2)$ и наборов точек $g^{(n)} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{N_n-1}^{(n)}\}$ в соответствии с равенствами (1.1) и (1.2) определим последовательность сплайн-функций $R_{N_n,1}(x, \psi) = R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$.

Для точки разрыва t_0 и разбиения $\Delta^{(n)}$ при данном номере n через $[x_{\ell-1}, x_\ell]$ и $[x_r, x_{r+1}]$ $(\ell = \ell(n), r = r(n))$ обозначим ближайшие соответственно слева и справа к точке t_0 частичные отрезки, не содержащие точку t_0. При этом $h_\ell, h_{\ell+1}, h_r, h_{r+1}$ означают длины частичных отрезков разбиения $\Delta^{(n)}$, правые концы которых совпадают соответственно с точками $x_\ell, x_{\ell+1}, x_r, x_{r+1}$. Через g_r обозначим полюс дроби $R_r(x, \psi)$ при условии $h_r < h_{r+1}$, а через g_ℓ — полюс дроби $R_\ell(x, \psi)$ при условии $h_{\ell+1} \leqslant h_\ell$.

Ниже для числовых последовательностей запись $a_n = \bar{\bar{o}}(b_n)$ означает, как обычно, что существует бесконечно малая последовательность $c_n \to 0$, для которой выполняется равенство $a_n = c_n b_n$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для сплайнов $R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ с $\|\Delta^{(n)}\| \to 0$ явление Гиббса не имеет места в правой (соответственно, левой) полуокрестности точки t_0, если для любой подпоследовательности номеров $n = n_i$ и соответствующих $r = r(n)$ $(\ell = \ell(n))$ с условиями $h_{r+1} < h_r$ и $h_r < h_{r+1}$ $(h_\ell < h_{\ell+1}$ и $h_{\ell+1} < h_\ell)$ выполняются соответственно соотношения $h_{r+1} = \bar{\bar{o}}(h_r)$ и $x_{r-1} - g_r = \bar{\bar{o}}(h_r)$ $(h_\ell = \bar{\bar{o}}(h_{\ell+1})$ и $g_\ell - x_{\ell+1} = \bar{\bar{o}}(h_{\ell+1}))$ при $n \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По ходу доказательства для краткости при рассматриваемом натуральном n обозначим N_n через N и опустим верхний индекс (n) в обозначениях узлов.

Тогда при $t_0 \in (x_{i-1}, x_i)$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant N - 1$, номер $r = r(n)$ совпадает с i и по лемме 2 (при $N = N_n$) для величины

$$M_r(t_0) = \sup\{R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) \mid x \in (t_0, b]\}$$

при $h_{r+1} \leqslant h_r$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{6} \frac{h_{r+1}}{h_r} < M_r(t_0) < \frac{1}{2} \frac{h_{r+1}}{h_r}, \tag{3.1}$$

а при $h_r < h_{r+1}$ — неравенство

$$\frac{4}{81} \lambda < M_r(t_0) < 2\lambda, \tag{3.2}$$

причем $\lambda = (x_{r-1} - g_r)/h_r$.

По условию теоремы при $h_{r+1} < h_r$ имеем $h_{r+1} = \bar{\bar{o}}(h_r)$ $(r = r(n), n \to \infty)$, а при $h_r < h_{r+1}$ имеем $x_{r-1} - g_r = \bar{\bar{o}}(h_r)$ $(r = r(n), n \to \infty)$, а значит, $\lambda \to 0$.

Следовательно, в обоих случаях величина $M_r(t_0) \to 0$ при $n \to \infty$ и явление Гиббса в правой полуокрестности точки t_0 отсутствует.

Если точка разрыва t_0 принадлежит интервалу (x_{i-1}, x_i) для некоторого i, $2 \leqslant i \leqslant N$, то вполне аналогично предыдущему случаю с применением леммы 3 вместо леммы 2 получим, что величина

$$M_\ell(t_0) = \sup\{\psi(x) - R_{N,1}(x,\psi) | x \in [a, t_0)\}$$

(при $N = N_n$, $\ell = \ell(n)$) стремится к нулю с ростом n. Действительно, по условию теоремы при $h_\ell < h_{\ell+1}$ выполняется соотношение $h_\ell = \bar{\bar{o}}(h_{\ell+1})$, а при $h_{\ell+1} < h_\ell$ — соотношение $g_\ell - x_{\ell+1} = \bar{\bar{o}}(h_{\ell+1})$.

Пусть теперь точка разрыва t_0 функции $\psi(x)$ совпадает с узлом x_i при некотором $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Тогда значения сплайна $R_{N,1}(x,\psi)$ на промежутках $[x_{i-1}, x_i)$ и $(x_i, x_{i+1}]$ не могут привести к явлению Гиббса около точки $t_0 = x_i$.

Действительно, если $t_0 = x_i$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ и $0 < \lambda \leqslant 1$, то при $x \in [x_{i-1}, x_i)$ и $(x_i, x_{i+1}]$ соответственно выполняются неравенства

$$-1 \leqslant R_{N,1}(x,\psi) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant R_{N,1}(x,\psi) \leqslant 1,$$

что следует из леммы 4 и равенства (1.2) для i и для $i+1$ соответственно.

Для случая $t_0 = x_i$ $(i = 1, 2, \dots, N-2)$ поведение сплайна $R_{N,1}(x,\psi)$ на отрезке $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ можно исследовать по полной аналогии с доказательством леммы 2.

При этом, учитывая $\psi(x_i) = 0$ и $\psi(x_j) = 1$ при $j > i$, для $x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$, имеем

$$R_{N,1}(x,\psi) - \psi(x) = [R_{i+1}(x,\psi) - 1]\frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}}$$

$$= \frac{g_{i+1} - x_i}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_i)} \, \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})^2}{g_{i+1} - x},$$

а при $x \in [x_{i+2}, b]$ получим $R_{N,1}(x,\psi) \equiv 1$.

Значит, при $h_{i+2} \leqslant h_{i+1}$, $g_{i+1} = x_{i+2} + \lambda h_{i+2}$ и $0 < \lambda \leqslant 1$ в точке $t_3 = x_{i+1} + Ah_{i+2}$, где A то же, что и в лемме 2, достигается значение

$$\max\{R_{N,1}(x,\psi) - \psi(x) |\, x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]\} = \frac{h_{i+2}}{h_{i+1}}\Big(1 + \lambda\frac{h_{i+2}}{h_{i+2} + h_{i+1}}\Big)\frac{A(1-A)^2}{\lambda + 1 - A}.$$

Отсюда и из леммы 4 получим

$$\frac{1}{12}\frac{h_{i+2}}{h_{i+1}} < M_r(t_0) < \frac{1}{4}\frac{h_{i+2}}{h_{i+1}}, \tag{3.3}$$

если $h_{i+2} \leqslant h_{i+1}$ и $0 < \lambda \leqslant 1$.

Если же $h_{i+1} < h_{i+2}$, $g_{i+1} = x_i - \lambda h_{i+1}$ и $0 < \lambda \leqslant 1$, то получим

$$\frac{2}{81}\lambda < M_r(t_0) < \lambda \tag{3.4}$$

(с $\lambda = (x_i - g_{i+1})/h_{i+1}$).

Заметим, что в данном случае $r = r(n) = i + 1$. Поэтому при выполнении неравенства $h_{r+1} < h_r$ по условию теоремы имеем $h_{r+1} = \bar{\bar{o}}(h_r)$ $(r = r(n),\ n \to \infty)$, а при выполнении неравенства $h_r < h_{r+1}$ имеем $x_{r-1} - g_r = \bar{\bar{o}}(h_r)$.

Следовательно, в этих случаях из (3.3) и (3.4) соответственно имеем $M_r(t_0) \to 0$, а значит, явление Гиббса в правой полуокрестности точки t_0 отсутствует.

Поведение сплайна $R_{N,1}(x,\psi)$ на отрезке $[x_{i-2},x_{i-1}]$ для случая $t_0 = x_i$ ($i = 2,3,\dots,N$) исследуется по полной аналогии с доказательством леммы 3. При этом для $x \in [x_{i-2},x_{i-1}]$ выполняется равенство

$$\psi(x) - R_{N,1}(x,\psi) = \frac{-(g_{i-1}-x_i)}{(x_i-x_{i-1})(x_{i-1}-x_{i-2})(x_i-x_{i-2})}\,\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-2})^2}{g_{i-1}-x}.$$

В этом случае для $0 < \lambda \leqslant 1$ выполняется равенство

$$M_\ell(t_0) = \max\{\psi(x) - R_{N,1}(x,\psi) |\, x \in [x_{i-2},x_{i-1}]\}.$$

Отсюда при $h_{i-1} < h_i$ и $g_{i-1} = x_{i-2} - \lambda h_{i-1}$ получим

$$\frac{1}{12}\frac{h_{i-1}}{h_i} < M_\ell(t_0) < \frac{1}{4}\frac{h_{i-1}}{h_i}, \tag{3.5}$$

а при $h_i \leqslant h_{i-1}$ и $g_{i-1} = x_i + \lambda h_i$ (а значит, $\lambda = (g_{i-1}-x_i)/h_i$) имеем

$$\frac{2}{81}\lambda < M_\ell(t_0) < \lambda\,. \tag{3.6}$$

Остается заметить, что в данном случае $\ell = \ell(n) = i-1$, поэтому из (3.5) и (3.6) имеем $M_\ell(t_0) \to 0$ при $n \to \infty$, когда выполнены условия теоремы: $h_\ell = \bar{\bar{o}}(h_{\ell+1})$ при $h_\ell < h_{\ell+1}$ и $g_\ell - x_{\ell+1} = \bar{\bar{o}}(h_{\ell+1})$ при $h_{\ell+1} < h_\ell$.

Теорема 1 доказана.

Следующее утверждение показывает существенность условий теоремы 1 для отсутствия явления Гиббса соответственно в правой или в левой окрестности точки разрыва t_0 для функции $\psi(x) = \operatorname{sign}(x-t_0)$.

Теорема 2. *Для сплайнов $R_{N_n,1}(x,\psi,\Delta^{(n)},g^{(n)})$ с $\|\Delta^{(n)}\| \to 0$ имеет место явление Гиббса в правой (соответственно, левой) полуокрестности точки t_0, если при некотором $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность номеров $n = n_i$, для которой и соответствующих $r = r(n)$ ($\ell = \ell(n)$) выполняется хотя бы одно из двух условий*

1) $h_r \geqslant h_{r+1} \geqslant \varepsilon h_r$ (соответственно, $h_{\ell+1} \geqslant h_\ell \geqslant \varepsilon h_{\ell+1}$);

2) $h_r < h_{r+1}$ и $x_{r-1} - g_r \geqslant \varepsilon h_r$ (соответственно, $h_{\ell+1} < h_\ell$ и $g_\ell - x_{\ell+1} \geqslant \varepsilon h_{\ell+1}$).

Доказательство. Пусть для сетки узлов $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{N_n}^{(n)} = b$ ($N_n \geqslant 2$) при данном натуральном n отрезок $[x_r,x_{r+1}]$ ($r = r(n)$) является ближайшим справа к точке разрыва $t_0 \in (a,b)$ частичным отрезком, не содержащим точки t_0. Для краткости снова обозначим $N = N_n$.

Тогда при $h_{r+1} \leqslant h_r$ из неравенств (3.1) и (3.3) вытекает неравенство

$$\frac{1}{12}\frac{h_{r+1}}{h_r} < M_r(t_0) < \frac{1}{2}\frac{h_{r+1}}{h_r}, \tag{3.7}$$

а при $h_r < h_{r+1}$ из неравенств (3.2) и (3.4) имеем

$$\frac{2}{81}\lambda < M_r(t_0) < 2\lambda, \tag{3.8}$$

где $\lambda = (x_{r-1} - g_r)/h_r$.

Пусть теперь при некотором $\varepsilon > 0$ в соответствии с условием теоремы существует подпоследовательность номеров $n = n_i$, для которых и $r = r(n)$ выполняется хотя бы одно из двух условий

1) $h_r \geqslant h_{r+1} \geqslant \varepsilon h_r$;

2) $h_r < h_{r+1}$ и $x_{r-1} - g_r \geqslant \varepsilon h_r$.

Заметим, что последнее неравенство эквивалентно неравенству $\lambda \geqslant \varepsilon$. Отсюда и из неравенств (3.7) и (3.8) вытекает, что существует подпоследовательность номеров $n = n_i$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{2}{81}\varepsilon < M_r(t_0) < \max\left\{\frac{1}{2}\frac{h_{r+1}}{h_r}, 2\lambda\right\}.$$

Следовательно, выполняется строгое неравенство $\varlimsup\limits_{n\to\infty} M_{r(n)}(t_0) > 0$, что означает наличие явления Гиббса в правой полуокрестности точки разрыва t_0.

Вполне аналогично рассматривается случай левой полуокрестности точки разрыва t_0.

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что в случае равномерных сеток узлов $\Delta^{(n)}$ и $\lambda = 1$ значение предела

$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty \\ x\to t_0+0}} R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)}) \ \text{ равно } \ 1 + \frac{3}{4}(5\sqrt{5} - 11) = 1.13525\ldots,$$

если при всех достаточно больших n точка разрыва t_0 совпадает с одним из узлов $\Delta^{(n)}$, и оно равно $1+\dfrac{3}{2}(5\sqrt{5}-11)$, если t_0 не совпадает с узлами $\Delta^{(n)}$ при сколь угодно больших номерах n.

Аналогично обстоит дело с соответствующим нижним пределом в левой полуокрестности точки t_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая энциклопедия. Т.1. М.: Советская Энциклопедия, 1977.
2. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
3. **Jerri A.J.** The Gibbs phenomenon in Fourier analysis, splines and wavelet approximations. Boston: Springer, 1998. 340 p. (Math. Appl.; vol. 446). doi: 10.1007/978-1-4757-2847-7 .
4. **Golubov B.I.** On Gibbs phenomenon for Riesz spherical means of multiple Fourier integrals and Fourier series // Analysis Mathematica. 1978. Vol. 4, no. 4, pp. 269–287. doi: 10.1007/BF02020575 .
5. **Olevska Yu.B., Olevskyi V.I., Shapka I.V., Naumenko T.S.** Application of two-dimensional Pade-type approximants for reducing the Gibbs phenomenon // AIP Conf. Proc. 2019. Vol. 2164. Art.-no. 060014. doi: 10.1063/1.5130816 .
6. **Mohammad M.** On the Gibbs effect based on the quasi-affine dual tight framelets system generated using the mixed oblique extension principle // Mathematics. 2019. Vol. 7, no. 10. Art.-no. 952. 14 p. doi: 10.3390/math7100952 .
7. **Lin S., Xu Y., Chen Y., Chang C., Chen Y.E., Chen J.** Gibbs-phenomenon-reduced digital PWM for power amplifiers using pulse modulation // IEEE Access. 2019. Vol. 7. P. 178788–178797. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2958866 .
8. **Субботин Ю.Н.** Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3, вып. 4. С. 1043–1058.
9. **Завьялов Ю.С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн–функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
10. **Andreev A. S.** On interpolation by cubic splines of a function possessing discontinuities // C. R. Acad. Bulg. Sci. 1974. Vol. 27. P. 881–884.
11. **Richards F. B.** A Gibbs phenomenon for spline functions // J. Approximation Theory. 1991. Vol. 66. P. 344–351. doi: 10.1016/0021-9045(91)90034-8 .
12. **Zhimin Zhang, Clyde F. Martin.** Convergence and Gibbs phenomenon in cubic spline interpolation of discontinuous functions // J. Computational and Applied Mathematics. 1997. Vol. 87. P. 359–371. doi: 10.1016/s0377-0427(97)00199-4 .
13. **Квасов Б. И., Кобков В. В.** Некоторые свойства кубических эрмитовых сплайнов с дополнительными узлами // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 5. С. 1007–1010.
14. **Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г.** Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 4. С. 592–603. doi: 10.4213/mzm11201 .

15. **Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г.** Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. С. 16–28. doi: 10.21538/0134-4889-2016-44-4-233-246 .

Поступила 10.12.2019
После доработки 18.05.2020
Принята к публикации 25.05.2020

Рамазанов Абдул-Рашид Кехриманович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Дагестанский государственный университет;
главный науч. сотрудник
Дагестанский научный центр РАН
г. Махачкала
e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Рамазанов Абдулкафар Кехриманович
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой высшей математики и физики
Калужский филиал МГТУ им. Н.Э.Баумана
г. Калуга
e-mail: akramazanov@mail.ru

Магомедова Вазипат Гусеновна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры математического анализа
Дагестанский государственный университет
г. Махачкала
e-mail: vazipat@rambler.ru

REFERENCES

1. M. Hazewinkel (ed.) *Encyclopaedia of Mathematics*, vol. 1. Dordrecht: D. Reidel, 1987, 488 p. doi: 10.1017/s0016756800022986 . Original Russian text published in *Matematicheskaya entsiklopediya, T. 1.* Moscow: Sovetskaya Entsiklopediya, 1977.
2. Bary N.K. *A treatise on trigonometric series*, vol. I,II. Oxford; New York: Pergamon Press, 1964, 553 p., 508 p. doi: 10.1002/zamm.19650450531 . Original Russian text published in Bari N.K. *Trigonometricheskie ryady.* Moscow: GIMFL Publ., 1961, 937 p.
3. Jerri A.J. *The Gibbs phenomenon in Fourier analysis, splines and wavelet approximations.* Ser. Math. Appl.; vol. 446. Boston: Springer, 1998. 340 p. doi: 10.1007/978-1-4757-2847-7 .
4. Golubov B.I. On Gibbs phenomenon for Riesz spherical means of multiple Fourier integrals and Fourier series. *Analysis Mathematica*, 1978, vol. 4, no. 4, pp. 269–287. doi: 10.1007/BF02020575 .
5. Olevska Yu.B., Olevskyi V.I., Shapka I.V., Naumenko T.S. Application of two-dimensional Pade-type approximants for reducing the Gibbs phenomenon. *AIP Conf. Proc.*, 2019, vol. 2164, no. 1, art.-no. 060014. doi: 10.1063/1.5130816 .
6. Mohammad M. On the Gibbs effect based on the quasi-affine dual tight framelets system generated using the mixed oblique extension principle. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 10, art.-no. 952, 14 p. doi: 10.3390/math7100952 .
7. Lin S., Xu Y., Chen Y., Chang C., Chen Y.E., Chen J. Gibbs-phenomenon-reduced digital PWM for power amplifiers using pulse modulation. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 178788–178797. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2958866 .
8. Subbotin Yu.N. Variations on a spline theme. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 1043–1058 (in Russian).
9. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splain-funktsii* (Methods of spline-functions). Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.

10. Andreev A.S. On interpolation by cubic splines of a function possessing discontinuities. *C.R. Acad. Bulg. sci.*, 1974, vol. 27, pp. 881–884.
11. Richards F.B. A Gibbs phenomenon for spline functions. *J. Approximation Theory.* 1991, vol. 66, pp. 344–351. doi: 10.1016/0021-9045(91)90034-8 .
12. Zhimin Zhang, Clyde F. Martin. Convergence and Gibbs phenomenon in cubic spline interpolation of discontinuous functions. *J. Computational and Applied Math.*, 1997, vol. 87, pp. 359–371. doi: 10.1016/s0377-0427(97)00199-4 .
13. Kvasov B.I., Kobkov V.V. Some properties of cubic Hermitian splines with additional nodes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1974, vol. 217, no. 5, pp. 1007–1010 (in Russian).
14. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Unconditionally convergent rational interpolation splines. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 3-4, pp. 635–644. doi: 10.1134/S0001434618030318 .
15. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines for three-point rational interpolants with autonomous poles. *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, no. 7, pp. 16–28 (in Russian). doi: 10.31029/demr.7.2 .

Received December 10, 2019
Revised May 18, 2020
Accepted May 25, 2020

A.-R.K. Ramazanov, Dr.Phys.-Math., Prof., Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia; Dagestan Scientific Center RAN, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367025 Russia, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru .

A.K. Ramazanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch), Kaluga, 248000, Russia, e-mail: akramazanov@mail.ru .

V.G. Magomedova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia, e-mail: vazipat@rambler.ru .

Cite this article as: A.-R. K. Ramazanov, A. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. On the Gibbs phenomenon for rational spline functions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 238–251 .