ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ РАЗРЕШИМЫ ИЛИ ИМЕЮТ ПРИМАРНЫЕ ИНДЕКСЫ[1]

В. Го, А. С. Кондратьев, Н. В. Маслова, Л. Мяо

Хорошо известно, что все максимальные подгруппы конечной разрешимой группы разрешимы и имеют примарные индексы. Однако обратное утверждение неверно. Конечные неразрешимые группы, все локальные подгруппы которых разрешимы, были изучены Дж. Томпсоном (1968). Р. Гуральник (1983) описал все пары (G,H) такие, что G — конечная неабелева простая группа и H — подгруппа примарного индекса в G. Некоторые авторы изучали конечные группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса (не обязательно максимальная) является группой, близкой к нильпотентной. Ослабляя условия, Е. Н. Бажанова (Демина) и Н. В. Маслова (2014) рассмотрели класс $\mathfrak{J}_{pr}$ конечных групп, в которых все неразрешимые максимальные подгруппы имеют примарные индексы, и, в частности, определили возможные неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы из класса $\mathfrak{J}_{pr}$. В данной статье продолжено изучение нормального строения неразрешимой группы из класса $\mathfrak{J}_{pr}$. Доказано, что группа из класса $\mathfrak{J}_{pr}$ содержит не более одного неабелева главного фактора и для любого положительного целого числа n существует группа из класса $\mathfrak{J}_{pr}$ с числом неабелевых композиционных факторов, не меньшим n. Кроме того, определены все почти простые группы из класса $\mathfrak{J}_{pr}$.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, примарный индекс, неразрешимая группа.

W. Guo, A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, L. Miao. Finite groups whose maximal subgroups are solvable or have prime power indices.

It is well known that all maximal subgroups of a finite solvable group are solvable and have prime power indices. However, the converse statement does not hold. Finite nonsolvable groups in which all local subgroups are solvable were studied by J. Thompson (1968). R. Guralnick (1983) described all the pairs (G,H) such that G is a finite nonabelian simple group and H is a subgroup of prime power index in G. Several authors studied finite groups in which every subgroup of non-prime-power index (not necessarily maximal) is a group close to nilpotent. Weakening the conditions, E. N. Bazhanova (Demina) and N. V. Maslova (2014) considered the class $\mathfrak{J}_{\mathrm{pr}}$ of finite groups in which all nonsolvable maximal subgroups have prime power indices and, in particular, described possibilities for nonabelian composition factors of a nonsolvable group from the class $\mathfrak{J}_{\mathrm{pr}}$. In the present note, the authors continue the study of the normal structure of a nonsolvable group from $\mathfrak{J}_{\mathrm{pr}}$. It is proved that a group from $\mathfrak{J}_{\mathrm{pr}}$ contains at most one nonabelian chief factor and, for each positive integer n, there exists a group from $\mathfrak{J}_{\mathrm{pr}}$ such that the number of its nonabelian composition factors is at least n. Moreover, all almost simple groups from $\mathfrak{J}_{\mathrm{pr}}$ are determined.

Keywords: finite group, maximal subgroup, prime power index, nonsolvable subgroup.

MSC: 20D60, 20D05, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-125-131

1. Введение

В этой работе мы рассматриваем только конечные группы, поэтому термин "группа" означает "конечная группа". Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [6; 7; 9; 12].

Будем обозначать через $\mathrm{Soc}(G)$ *цоколь* группы G (т. е. подгруппу группы G, порожденную всеми ее минимальными нетривиальными нормальными подгруппами). Напомним, что

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научных проектов № 20-51-53013 и № 12011530061, ГФЕН Китая в рамках научных проектов № 11771409 и № 11871062, Фонда естествознания провинции Цзянсу в рамках научного проекта № BK20181451 и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ, соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013.

группа G называется *почти простой*, если $\mathrm{Soc}(G)$ — неабелева простая группа. Хорошо известно, что группа G почти проста тогда и только тогда, когда существует неабелева простая группа S такая, что $\mathrm{Inn}(S) \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(S)$; более того, здесь $\mathrm{Inn}(S) \cong S$, поэтому мы будем отождествлять S и $\mathrm{Inn}(S)$ и писать $S \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(S)$.

Хорошо известно, что все максимальные подгруппы разрешимой группы разрешимы и имеют примарные индексы. Однако обратное утверждение неверно: например, все максимальные подгруппы неабелевой простой группы $PSL_2(7)$ разрешимы и имеют примарные индексы. В 1983 г. Р. Гуральник [10, теорема 1] описал все пары (G, H) такие, что G — неабелева простая группа и H — подгруппа примарного индекса в G. Более того, в [10, следствие 3] Р. Гуральник получил следующий результат.

Предложение 1. *Если G — неразрешимая группа такая, что каждая ее собственная максимальная подгруппа имеет примарный индекс, то фактор-группа $G/S(G)$ изоморфна $PSL_2(7)$ (здесь $S(G)$ — разрешимый радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G).*

Неразрешимые группы, все локальные подгруппы которых разрешимы, были изучены Дж. Томпсоном [13]. Некоторые авторы изучали группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса (необязательно максимальная) является группой, близкой к нильпотентной. Например, П. П. Барышовец [5] доказал, что группами $PSL_2(5)$, $PSL_2(7)$, $SL_2(5)$ и $SL_2(7)$ исчерпываются все неразрешимые группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса нильпотентна или является группой Шмидта (минимальной ненильпотентной группой).

Ослабив условия и рассмотрев класс $\mathfrak{J}_{pr}$ конечных групп, в которых все неразрешимые максимальные подгруппы имеют примарные индексы, мы получим класс групп, который содержит класс всех разрешимых групп в качестве собственного подкласса. Естественным образом возникает следующий вопрос.

В о п р о с. Каково нормальное строение неразрешимой группы из класса $\mathfrak{J}_{pr}$, в частности, каковы ее неабелевы композиционные факторы?

В [1] Е. Н. Бажанова и третий автор описали возможные неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы из класса $\mathfrak{J}_{pr}$. В этой статье, основываясь на результатах, полученных в [10] и [1], мы изучаем нормальное строение неразрешимой группы из класса $\mathfrak{J}_{pr}$. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Выполняются следующие утверждения*:

(i) *Неабелевы композиционные факторы группы $G \in \mathfrak{J}_{pr}$ попарно изоморфны и исчерпываются группами из следующего списка*:

(i1) $PSL_2(2^p)$, *где p — простое число*;
(i2) $PSL_2(3^p)$, *где p — простое число*;
(i3) $PSL_2(p^{2^w})$, *где p — нечетное простое число и $w \geq 0$*;
(i4) $Sz(2^p)$, *где p — нечетное простое число*;
(i5) $PSL_3(3)$.

(ii) *Для каждой простой группы S из списка пункта (i) найдется группа $G \in \mathfrak{J}_{pr}$ такая, что* $\mathrm{Soc}(G) \cong S$.

(iii) *Группа из класса $\mathfrak{J}_{pr}$ содержит не более одного неабелева главного фактора.*

(iv) *Для любого положительного целого числа n существует группа $G = G(n)$ из класса $\mathfrak{J}_{pr}$ такая, что число неабелевых композиционных факторов группы G не меньше n.*

Естественным образом возникают следующие вопросы.

В о п р о с 1. Верно ли, что для любого положительного целого числа n существует группа $G = G(n)$ из класса $\mathfrak{J}_{pr}$ такая, что число неабелевых композиционных факторов группы G в точности равно n?

Из доказательства п. (iv) теоремы 1 следует, что ответ на вопрос 1 положителен, если n — степень простого числа, большего 3.

Пусть S — простая группа и G — группа. Обозначим через $Comp(G,S)$ число композиционных факторов G, изоморфных S.

Вопрос 2. Пусть S — неабелева простая группа из списка п. (i) теоремы 1. Какие значения может принимать число $Comp(G,S)$, если $G \in \mathfrak{J}_{pr}$?

Кроме того, в этой статье мы описываем все почти простые группы из класса $\mathfrak{J}_{pr}$. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть G — почти простая группа. Тогда G принадлежит классу $\mathfrak{J}_{pr}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений*:

(i) $\mathrm{Soc}(G) \cong PSL_2(2^p)$, *где p — простое число*;

(ii) $\mathrm{Soc}(G) \cong PSL_2(3^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(iii) $G \cong PSL_2(p)$, *где p — нечетное простое число, большее* 3, *такое, что $p = 11$ или* $p \not\equiv \pm 1 \pmod{10}$;

(iv) $G \cong PGL_2(p)$, *где p — нечетное простое число, большее* 3;

(v) $\mathrm{Soc}(G) \cong PSL_2(p^{2^w})$, *где p — нечетное простое число, $w > 0$ и G не содержится в группе внутренне-полевых автоморфизмов группы* $\mathrm{Soc}(G)$;

(vi) $\mathrm{Soc}(G) \cong Sz(2^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(vii) $\mathrm{Soc}(G) \cong PSL_3(3)$.

Отметим, что наши доказательства основаны на классификации конечных простых групп.

2. Предварительные результаты

Следующие утверждения будут полезны нам для доказательства теорем 1 и 2.

Лемма 1 [1, лемма 1]. *Класс $\mathfrak{J}_{pr}$ замкнут относительно взятия фактор-групп.*

Лемма 2. *Пусть p — простое число, Q — подгруппа группы $L = L_1 \times \ldots \times L_n$, где все L_i — конечные группы, и пусть π_i — проекция L на L_i. Если Q содержит силовскую p-подгруппу группы L и существует индекс i такой, что группа L_i почти проста, индекс $|L_i : \mathrm{Soc}(L_i)|$ — степень числа p и $\pi_i(Q) = L_i$, то $L_i \leq Q$.*

Доказательство. Доказать эту лемму можно, повторив рассуждения доказательства [2, лемма 9], при этом заменив простое число 2 на произвольное простое число p.

Лемма 3 (см., например, [6, теорема 1.3.6] и [4, леммы 6–9]). *Пусть G — почти простая группа и $S = \mathrm{Soc}(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(i) *Если M — максимальная подгруппа группы G, тогда выполняются утверждения*

(i1) $S \cap M \neq 1$;

(i2) *если $S \not\leq M$, то $M = N_G(M \cap S)$*;

(i3) *если $S \not\leq M$, то $G = MS$.*

(ii) *Пусть P — нетривиальная собственная подгруппа группы S. Тогда подгруппа $N_G(S)$ максимальна в группе G тогда и только тогда, когда выполняется равенство $G = N_G(P)S$ и для любой подгруппы Y группы S такой, что $P < Y < S$, имеем $N_G(P) \not< N_G(Y)$. В частности, если подгруппа P максимальна в группе S, то подгруппа $N_G(P)$ максимальна в группе G тогда и только тогда, когда выполняется равенство $G = N_G(P)S$.*

3. Доказательство теоремы 1

Пункты (i) и (ii) теоремы 1 следуют из [1, теорема 1].

Докажем п. (iii). Предположим, что $G \in \mathfrak{J}_{pr}$ — группа наименьшего порядка, имеющая не менее двух различных неабелевых главных факторов. По лемме 1 разрешимый радикал группы G тривиален.

Пусть A — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда A — прямое произведение попарно изоморфных неабелевых простых групп. Из нашего предположения заключаем, что фактор-группа G/A неразрешима. Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Тогда либо $A \leq M$ и, следовательно, подгруппа M неразрешима; либо $G = MA$ и по соответствующей теореме о гомоморфизмах $G/A \cong M/(M \cap A)$, следовательно, подгруппа M снова неразрешима. Таким образом, каждая максимальная подгруппа группы G имеет примарный индекс. Следовательно, группа G изоморфна $PSL_2(7)$ по предложению 1. Получаем противоречие с предположением, что группа G имеет хотя бы два различных главных фактора.

Докажем п. (iv). Зафиксируем простое число $p \geq 5$. Предположим, что циклическая группа R порядка p^k, где k — неотрицательное целое число, действует регулярно на множестве $\Omega = \{1, \ldots, p^k\}$. Пусть $S = \mathrm{Aut}(PSL_2(2^p)) \cong PSL_2(2^p).\mathbb{Z}_p$,

$$G = S \wr_\Omega R \; \text{ — регулярное сплетение,}$$

$U = U_1 \times \ldots \times U_{p^k}$ — база этого сплетения и $L = U' = \prod_{i=1}^{p^k} L_i$, где $L_i = U_i' \cong PSL_2(2^p)$ для каждого i. Тогда L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть π_i — проекция группы U на U_i.

Заметим, что фактор-группа G/L является p-группой и L — холлова подгруппа группы G. Действительно, $|L| = |PSL_2(2^p)|^{p^k}$ и $|PSL_2(2^p)| = 2^p(2^{2p} - 1)$. По Малой теореме Ферма, p делит число $2^{p-1} - 1$. По [11, Hilfsatz 2] (см. также [3, лемма 3a)]) имеем

$$(2^{p-1} - 1, 2^{2p} - 1) = 2^{(p-1,2p)} - 1 = 2^2 - 1 = 3.$$

Так как $p > 3$, p не делит $|PSL_2(2^p)|$.

Очевидно, что G имеет в точности p^k попарно различных неабелевых композиционных факторов. Покажем, что $G \in J_{pr}$. Пусть H — собственная максимальная подгруппа группы G. По лемме 3 либо $L \leq H$, и в этом случае индекс $|G : H|$ — степень числа p; либо $G = LH$. В последнем случае имеем $G = UH$ и по соответствующей теореме о гомоморфизмах получаем

$$G/L \cong H/L \cap H \text{ и } G/U \cong H/U \cap H.$$

Положим $K = U \cap H$. Легко понять, что подгруппа H содержит силовскую p-подгруппу группы G. Таким образом, без ограничения общности мы можем предположить, что подгруппа H содержит R. Следовательно, $\pi_i(K) \cong \pi_j(K)$ для любых $i, j \in \Omega$. Более того, подгруппа K содержит силовскую p-подгруппу группы U и

$$K \leq \prod_{i=1}^{p^k} \pi_i(K).$$

Заметим, что для любого индекса i имеем $\pi_i(K) \leq U_i \cong \mathrm{Aut}(PSL_2(2^p))$ и подгруппа $\pi_i(K)$ содержит силовскую p-подгруппу группы U_i для любого $i \in \Omega$. По [6, табл. 8.1, 8.2, 8.7] для каждого $i \in \Omega$ либо подгруппа $\pi_i(K)$ разрешима, либо $\pi_i(K) = U_i$. В первом случае подгруппа K разрешима, следовательно, подгруппа H разрешима. В последнем случае, используя лемму 2, заключаем, что $K = U$. Следовательно, подгруппа H содержит L и силовскую p-подгруппу группы G. Таким образом, $H = G$. Получаем противоречие.

Итак, мы доказали, что для любого простого числа $p \geq 5$ и любого неотрицательного целого числа k существует группа $G = G(p^k) \in \mathfrak{J}_{pr}$ такая, что G имеет в точности p^k попарно различных неабелевых композиционных факторов. □

4. Доказательство теоремы 2

Докажем *необходимость* в теореме 2. Пусть G — почти простая группа из класса $\mathfrak{J}_{pr}$. Тогда $S := \mathrm{Soc}(G)$ — простая группа из списка в п. (i) теоремы 1. Ввиду [7, табл. 5] $\mathrm{Out}(S)$ — абелева группа, в частности, фактор-группа G/S разрешима.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Если $S \leq M$, то индекс $|G : M|$ является простым числом ввиду [7, табл. 5]. Если $S \nleq M$, то по лемме 3 имеем $G = SM$, и, следовательно, по соответствующей теореме о гомоморфизмах имеем $G/S \cong M/(M \cap S)$. Таким образом,

$$|G : M| = |S : M \cap S|.$$

Если подгруппа $M \cap S$ разрешима, то подгруппа M также разрешима. Предположим, что подгруппа $M \cap S$ неразрешима. Тогда подгруппа M неразрешима, и по предположению индекс $|S : M \cap S| = |G : M|$ является степенью простого числа. Следовательно, по [10] имеем $S \cong PSL_2(11)$ и $M \cap S \cong A_5$. Если $S \cong PSL_2(11)$, то выполняется п. (iii) или п. (iv) теоремы 2. Следовательно, если группа S не изоморфна $PSL_2(11)$, то все максимальные подгруппы группы G, не содержащие S, разрешимы.

Предположим, что группа G не удовлетворяет заключению теоремы 2. Тогда $S \cong PSL_2(q)$, где $q = p^f$, p — нечетное простое число, f — степень числа 2 и либо $f = 1$, $11 \neq p \equiv \pm 1 \pmod{10}$ и $G = S$, либо $f > 1$ и G — подгруппа группы внутренне-полевых автоморфизмов группы S. Ввиду леммы 3 и [6, табл. 8.1, 8.2, 8.7] (см. также [8, Theorem 1.3]) G содержит неразрешимую максимальную подгруппу P такую, что $S \nleq P$ и подгруппа $P \cap S$ изоморфна A_5 при $f = 1$ или $q = 9$ и изоморфна $PSL_2(q_0).2$ при $f > 1$ и $9 < q = q_0^2$. Но это противоречит сделанному ранее заключению, что если подгруппа S не изоморфна $PSL_2(11)$, то все максимальные подгруппы группы G, не содержащие S, разрешимы.

Таким образом, *необходимость* в теореме 2 доказана.

Пусть G — почти простая группа из заключения теоремы 2. Тогда ввиду леммы 3, [7, табл. 5] и [6, табл. 8.1, 8.2, 8.7, 8.16] фактор-группа $G/\mathrm{Soc}(G)$ разрешима, и либо $G \cong PSL_2(11)$, либо все максимальные подгруппы группы G, не содержащие $\mathrm{Soc}(G)$, разрешимы. Очевидно, что в последнем случае $G \in \mathfrak{J}_{pr}$. Заметим, что $PSL_2(11) \in \mathfrak{J}_{pr}$ ввиду [7].

Таким образом, *достаточность* в теореме 2 доказана. □

Благодарности

Некоторые идеи в рамках этого исследования возникли во время дискуссий первого и третьего авторов во время визита первого автора в Уральский федеральный университет в сентябре 2019 г. Первый автор благодарен Уральскому федеральному университету за гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Демина Е.Н., Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы с арифметическими ограничениями на неразрешимые максимальные подгруппы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т 20, № 2. С. 122–134.
2. **Го В., Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 773–790.
3. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
4. **Маслова Н.В.** Максимальные подгруппы нечётного индекса в конечных группах с простым линейным, унитарным или симплектическим цоколем // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 189–208.
5. **Baryshovets P.P.** Finite nonsolvable groups in which subgroups of nonprimary index are nilpotent or are Shmidt groups // Ukrain. Math. J. 1981. Vol. 33, no. 1. P. 37–39.

6. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407). doi: 10.1017/CBO9781139192576 .
7. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
8. **Giudici M.** Maximal subgroups of almost simple groups with socle $PSL(2, q)$: [e-resource]. arXiv: math/0703685 [math.GR]. 2007. 11 p.
9. **Gorenstein D.** Finite groups. Chelsea: N Y, 1968. 520 p.
10. **Guralnick R.M.** Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311.
11. **Huppert B.** Singer-Zyklen in klassischen Gruppen // Math. Z. 1970. Vol. 117, no. 7. S. 141–150.
12. **Kleidman P., Liebeck M.** The Subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1990. 304 p.
13. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, no. 3. P 383–437.

Поступила 23.04.2020
После доработки 15.05.2020
Принята к публикации 25.05.2020

Вэньбинь Го
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Хайнаньский Университет, г. Хайкоу, Китай;
Университет науки и технологии Китая, г. Хэфэй
e-mail: wbguo@ustc.edu.cn

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Маслова Наталья Владимировна
д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: butterson@mail.ru

Лун Мяо
Ph. D.
профессор
Университет Янчжоу, г. Янчжоу, Китай
e-mail: lmiao@yzu.edu.cn

REFERENCES

1. Demina E.N., Maslova N.V. Nonabelian composition factors of a finite group with arithmetic constraints to non-solvable maximal subgroups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 289, suppl. 1, pp. 64–76. doi: 10.1134/S0081543815050065 .
2. Guo W., Maslova N.V., Revin D.O. On the pronormality of subgroups of odd index in some extensions of finite groups. *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 610–622. doi: 10.1134/S0037446618040043 .

3. Kondrat'ev A.S. Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363 .
4. Maslova N.V. Maximal subgroups of odd index in finite groups with simple linear, unitary, or symplectic socle. *Algebra and Logic*, 2011, vol. 50, no. 2, pp. 133–145. doi: 10.1007/s10469-011-9128-7 .
5. Baryshovets P.P. Finite nonsolvable groups in which subgroups of nonprimary index are nilpotent or are Shmidt groups. *Ukrain. Math. J.*, 1981, vol. 33, no. 1, pp. 37–39. doi: 10.1007/BF01085772 .
6. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576 .
7. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990 .
8. Giudici M. Maximal subgroups of almost simple groups with socle $PSL(2, q)$. *ArXiv*: math/0703685 [math.GR], 2007, 11 p.
9. Gorenstein D. *Finite Groups.* Chelsea: New York, 1968, 528 p.
10. Guralnick R.M. Subgroups of prime power index in a simple group. *J. Algebra*, 1983, vol. 81, no. 2, pp. 304–311. doi: 10.1016/0021-8693(83)90190-4 .
11. Huppert B. Singer-Zyklen in klassischen Gruppen. *Math. Z.*, 1970, vol. 117, pp. 141–150. doi: 10.1007/BF01109836 .
12. Kleidman P., Liebeck M. *The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990, 304 p. ISBN: 0-521-35949-X .
13. Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 74, no. 3, pp. 383–437. doi: 10.1090/S0002-9904-1968-11953-6 .

Received April 23, 2020
Revised May 15, 2020
Accepted May 25, 2020

Funding Agency: This work was supported by a joint program of the Russian Foundation for Basic Research and the National Natural Science Foundation of China (project nos. 20-51-53013 and 12011530061), by the National Natural Science Foundation of China (projects nos. 11771409 and 11871062), by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (project no. BK20181451), and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Wenbin Guo, Dr. Phys.-Math. Sci., School of Science, Hainan University, Haikou, Hainan, 570228 China; and School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026 China, e-mail: wbguo@ustc.edu.cn .

Anatolii Semenovich Kondrat'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru .

Natalia Vladimirovna Maslova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: butterson@mail.ru .

Long Miao, Ph. D., School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, 225002 China e-mail: lmiao@yzu.edu.cn .

Cite this article as: W. Guo, A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, L. Miao. Finite groups whose maximal subgroups are solvable or have prime power indices. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 125–131 .