ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 1 2020

УДК 519.8

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Г. А. Тимофеева

Традиционный подход к решению задач оптимизации со случайными параметрами состоит в нахождении детерминированного решения, удовлетворяющего тому или иному критерию: оптимизации среднего ожидаемого значения целевой функции, оптимизации вероятности достижения определенного уровня или оптимизации квантили. В данной обзорной работе рассматривается решение задачи стохастической оптимизации в форме случайного вектора (или случайного множества). Это относительно новый класс задач, который называют вероятностными задачами оптимизации. Отмечается, что применение вероятностных решений в задачах со случайными параметрами обосновано в тех случаях, когда лиц, принимающих решения, много. В числе прочих задачи вероятностной оптимизации возникают при анализе многокритериальных задач; в этом случае весовые коэффициенты важности критериев рассматриваются как случайный вектор. В статье представлены важные примеры экономико-математических моделей — задач оптимизации с большим числом принимающих решение лиц: задача об оптимальном выборе на основе функции предпочтения потребителей; задача о выборе маршрута на основе оптимизации обобщенной стоимости поездки; задача о портфеле ценных бумаг с учетом распределения склонности инвесторов к риску. Приведены математические формулировки этих задач в форме задач вероятностной оптимизации. Изучаются некоторые свойства построенных моделей, в том числе анализируется математическое ожидание вероятностного решения задачи оптимизации.

Ключевые слова: вероятностная оптимизация, стохастическая оптимизация, вероятностное решение, многокритериальная оптимизация, линейная свертка критериев, выбор потребителя, функция предпочтения, выбор маршрута, задача о портфеле ценных бумаг.

G. A. Timofeeva. Probabilistic solutions of conditional optimization problems.

Optimization problems with random parameters are studied. The traditional approach to their solution consists in finding a deterministic solution satisfying a certain criterion: optimization of the expected value of the objective function, optimization of the probability of attaining a certain level, or optimization of the quantile. In this review paper, we consider a solution of a stochastic optimization problem in the form of a random vector (or a random set). This is a relatively new class of problems, which is called “probabilistic optimization problems.” It is noted that the application of probabilistic solutions in problems with random parameters is justified in the cases of multiple decision makers. Probabilistic optimization problems arise, for example, in the analysis of multicriteria problems; in this case, the weight coefficients of the importance of criteria are regarded as a random vector. We consider important examples of economic–mathematical models, which are optimization problems with a large number of decision makers: the problem of optimal choice based on the consumer's preference function, the route selection problem based on the optimization of the generalized cost of the trip, and the securities portfolio problem with a distribution of the investors' risk tolerance. Mathematical statements of these problems are given in the form of problems of probabilistic optimization. Some properties of the constructed models are studied; in particular, the expected value of the probabilistic solution of an optimization problem is analyzed.

Keywords: probabilistic optimization, stochastic optimization, probabilistic solution, multicriteria optimization, linear convolution of criteria, consumer choice, preference function, route selection, securities portfolio problem.

MSC: 90C15, 90C29, 91B70, 91B16

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-198-211

Введение

Исследованию задач стохастической оптимизации посвящено значительное число работ; в настоящее время это сформировавшая область математики [1]. Под задачей стохастической оптимизации понимается задача оптимизации, целевая функция или ограничения в которой зависят от случайных параметров. Традиционно под решением задачи оптимизации понимается детерминированное решение, удовлетворяющее тем или иным вероятностным критериям, таким как оптимизирующее среднее значение, вероятность достижения определенного уровня целевой функции и оптимизирующее квантиль целевой функции. Однако в ряде прикладных задач (в том числе экономических) имеет смысл обратиться к вероятностному решению задачи оптимизации со случайными параметрами. Термин "вероятностное решение" используется в работах О.А. Поповой [2;3], в которых сформулирована постановка задачи вероятностной оптимизации и рассмотрен вопрос о нахождении плотности распределения вероятностного решения для простейшей задачи. К решению вспомогательных задач вероятностной оптимизации (random optimization) прибегают при моделировании сложных систем методом Монте-Карло [4] или при рандомизации неопределенности [5; 6] и, как правило, эти задачи не исследуют отдельно.

Предлагаемая модель — вероятностное решение задачи оптимизации со случайными параметрами — имеет широкое применение в условиях, когда оптимальный вариант выбирается многократно, многими агентами и относительно независимо. Ярким примером такой задачи является задача рационального выбора при заданном распределении доходов потребителей.

Среди задач со случайным параметром отметим класс моделей, которые возникают при изучении задач оптимизации с несколькими критериями. Многокритериальные задачи оптимизации исследуются в различных постановках: это задачи дискретного выбора из множества альтернатив [7], задачи выбора оптимального решения в $\mathbb{R}^n$, многокритериальные задачи с неопределенностью [8], задачи выбора оптимального (в смысле нескольких критериев) управления динамической системой [9]. К числу важных приемов решения задачи с несколькими критериями относятся использование линейной свертки критериев и переход к параметрической задаче оптимизации с одним критерием [7;8]. Значимость критериев является субъективным векторным параметром; он зависит от лица, принимающего решение (ЛПР). В случае, когда лиц, принимающих решение, много, этот вектор может рассматриваться как случайный, а задача выбора оптимального решения — как задача вероятностной оптимизации с целевой функцией, зависящей от случайного вектора.

Вероятностный подход к моделированию предпочтений пассажиров был предложен в статье [10] для описания предпочтений пассажиров при выборе типа транспорта и прогнозирования изменения пассажиропотоков при введении нового маршрута. Предлагается распространить вероятностный подход на широкий круг многокритериальных задач, в которых выбор решения производится многими ЛПР. Рассмотрена модель выбора портфеля ценных бумаг со случайной склонностью инвестора к риску. В последнем случае критериями выступают средняя доходность и риск (среднее квадратичное отклонение) доходности портфеля.

В статье приведен обзор основных критериев выбора детерминированных решений в задачах стохастической оптимизации, обоснована актуальность исследования вероятностных решений задач оптимизации со случайными параметрами, показано, что такие решения имеют широкое применение при анализе различных экономических моделей, в том числе модели рационального выбора, модели предпочтений пассажиров, модели портфеля ценных бумаг. Исследованы некоторые свойства вероятностных решений для соответствующих задач стохастической оптимизации.

1. Постановки задач стохастической оптимизации

Под задачей стохастической оптимизации обычно понимаются задачи оптимизации, в которых целевая функция и(ли) ограничения зависят от случайных параметров. Хотя в к этому типу задач относятся также многошаговые стохастические задачи выбора решений, задачи дискретного выбора и оптимизации на марковских цепях и некоторые другие (см. обзор [11]), в данной статье мы ограничимся анализом одношаговой задачи оптимизации в конечномерном пространстве при наличии ограничений. Будем рассматривать два основных типа задач стохастической оптимизации:

1) с целевой функцией, зависящей от случайного параметра;

2) с ограничениями, зависящими от случайного параметра.

Некоторые авторы изучают также задачи, содержащие случайные параметры и в целевой функции, и в ограничениях, но в большинстве работ многие прикладные задачи относятся к задачам стохастической оптимизации первого либо второго типов.

Задача первого типа имеет вид

$$\begin{cases} f(x,\xi) \to \min, \\ x \in X. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь и далее $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ — случайный вектор со значениями в B, $f(x,b)$ — непрерывная функция $X \times B \mapsto \mathbb{R}^1$, $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, $B \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутое связное множество.

Задача второго типа записывается в форме

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ g_j(x,\xi_j) \le 0, \quad j = \overline{1,m}, \\ x \in X. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $f(x)$, $g_1(x,b), \dots, g_m(x,b)$ — непрерывные функции.

С математической точки зрения постановки задач (1.1) и (1.2) не являются корректными, пока не указано, в каком смысле понимается их решение. Изучение задач стохастической оптимизации начиналось с анализа задач типа (1.1), где в качестве критерия выбирается математическое ожидание целевой функции:

$$\begin{cases} Ef(x,\xi) \to \min, \\ x \in X. \end{cases} \tag{1.3}$$

Полученная задача является классической задачей оптимизации в конечномерном пространстве. Ее исследование облегчает тот факт, что взятие математического ожидания сохраняет свойство выпуклости по x целевой функции и при непрерывном распределении случайного вектора, $F(x) = Ef(x,\xi)$ является более гладкой функцией, чем исходная [12].

С учетом того что функцию $F(x)$, как правило, не удается записать аналитически, для численного решения задачи (1.3) были разработаны алгоритмы стохастического программирования, такие как метод стохастического градиента, метод случайного поиска, метод квазиградиента для условной оптимизации и др., в которых используются значения лишь функции $f(x,\xi)$ или ее градиента. Первоначально метод стохастического градиента предложен в работе [13]; исследование сходимости и развитие численных методов стохастического программирования активно проводились в 1960-80-х гг. (см. [12; 14] и др.) и продолжаются до настоящего времени [15; 16].

Начиная с 1990-х гг. акцент в исследовании задач стохастической оптимизации смещается в сторону использования вероятностного и квантильного критериев выбора решения. В случае линейной целевой функции задача оптимизация квантили связана с двухкритериальной задачей оптимизации, т. е. максимизацией математического ожидания и минимизацией дисперсии. Такой подход широко применяется при исследовании задачи о портфеле ценных бумаг [17; 18]. Однако оказалось, что задачи оптимизации вероятностного и квантильного критериев имеют специальные свойства и требуют отдельного глубокого теоретического исследования.

Сформулируем задачу выбора оптимального решения по вероятностному критерию в задаче стохастической оптимизации (1.1). Зафиксируем некоторый уровень значений целевой функции d и будем максимизировать вероятность непревышения этого уровня:

$$\begin{cases} \mathcal{P}\{f(x,\xi) \le d\} \to \max, \\ x \in X. \end{cases} \tag{1.4}$$

Обозначим ее решение через $\hat{X}_d$, а максимальное значение функции вероятности через $\hat{p}(d)$.

При использовании квантильного критерия фиксируют уровень вероятности β (обычно близкий к единице, например 0.95) и максимизируют квантиль целевой функции этого уровня $q_\beta(x)$:

$$\begin{cases} q_\beta(x) \to \min, \\ q_\beta(x) = \{\min q : \mathcal{P}\{f(x,\xi) \le q\} \ge \beta\}, \\ x \in X. \end{cases} \tag{1.5}$$

Решение задачи (1.5) обозначим через $\tilde{X}_\beta$, а оптимальное значение целевой функции через $\tilde{q}(\beta)$.

Так как выбор желаемого уровня d для значений целевой функции в задаче (1.4) и уровня вероятности β в задаче квантильной оптимизации (1.5) зависит от исследователя, то эти задачи можно рассматривать как задачи с параметрами. Изучалась взаимосвязь оптимальных решений и оптимальных значений целевых функций $\hat{p}(d)$ и $\tilde{q}(\beta)$ в задачах (1.4) и (1.5), получены условия, при выполнении которых эти функции непрерывны и взаимно обратны, проанализированы свойства функций вероятности и квантили и методы их аппроксимации [19].

Исследование задач стохастической оптимизации второго типа развивалось параллельно, обзор основных результатов этого направления приведен в [20]. Наиболее распространенный способ решения задачи стохастической оптимизации второго типа — это переход к задаче с вероятностными ограничениями:

$$\begin{cases} \min f(x), \\ \mathcal{P}\{g_j(x,\xi) \le 0, \quad j = \overline{1,m}\} \ge \beta. \end{cases} \tag{1.6}$$

Доказано следующее утверждение [1]: если функции $g_j(x,b)$ вогнутые по x, b, а функция распределения вектора ξ квазивыпукла, то функция вероятности $P(x) = \mathcal{P}\{g_j(x,\xi) \le 0, j = \overline{1,m}\}$ квазивогнута.

Из квазивогнутости функции $P(x)$ вытекает, что ограничение в задаче (1.6) задает выпуклое множество.

Среди задач с вероятностными ограничениями наиболее исследованными являются задачи стохастического линейного программирования:

$$\begin{cases} \min c^T x, \\ \mathcal{P}\{Ax \le \xi\} \ge \beta. \end{cases} \tag{1.7}$$

В работах [21–23] и других изучались вопросы вычисления и аппроксимации функции $F(x) = \mathcal{P}\{Ax \le \xi\}$ в случае непрерывного, в том числе нормального, распределения случайных возмущений ξ, применения численных методов и имитационного моделирования для решения задачи (1.7).

2. Вероятностные решения в задачах стохастической оптимизации

Перейдем к анализу вероятностных решений задач стохастической оптимизации. Введем базовые определения. Рассмотрим вспомогательную задачу оптимизации в $\mathbb{R}^n$, в которой целевая функция зависит от параметра $b \in \mathbb{R}^m$:

$$\min_{x \in X} f(x,b). \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что X — компактное множество, $X \subset \mathbb{R}^n$, а функция $f(x,b)$ определена и непрерывна на $X \times \mathbb{R}^m$. Множество решений для фиксированного $b \in \mathbb{R}^m$ обозначим через

$$X(b) = \operatorname{Arg}\min_{x \in X} f(x,b).$$

В данных условиях минимум в задаче (2.1) достигается, множество $X(b)$ является не пустым компактом для всех b, в частности оно может состоять из одной точки.

Далее считаем, что параметр b носит случайный характер, т. е. $b = \xi$, где ξ — случайный вектор. Получим задачу *вероятностной оптимизации*

$$\min_{x \in X} f(x, \xi),$$

ее решение определим как $X(\xi)$, где

$$X(\xi) = \operatorname{Arg}\min_{x \in X} f(x, \xi).$$

В рассматриваемых условиях вероятностное решение $X(\xi)$ является случайным компактным множеством в смысле [24]. Во многих прикладных задачах решение задачи оптимизации при допустимых значениях параметра определяется однозначно, в этом случае можно исследовать распределение случайного вектора $X(\xi)$.

Вторым типом задач вероятностной оптимизации являются задачи с вероятностными ограничениями, например задачи со случайными параметрами в правых частях ограничений типа неравенство (или равенство):

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in X} f(x), \\ g_j(x) \le b_j, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{2.2}$$

где правые части ограничений $b = \{b_1, \ldots, b_m\} = \xi$ являются случайным вектором.

Предполагаем, что $f(x)$, $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ — непрерывные функции, $X \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество. Решение $X(b)$ задачи (2.2) существует, вообще говоря, не при всех $b \in \mathbb{R}^m$, так как множество допустимых значений может быть пустым при некоторых значениях параметра. Обозначим через $B \subset \mathbb{R}^m$ множество значений параметра b, для которых решение задачи (2.2) не пусто. Если случайный вектор ξ принимает значения из B, то получаем задачу вероятностной оптимизации, множество решений которой $X(\xi)$ — случайное множество.

Как уже упоминалось, рассматривать вероятностное решение задачи оптимизации имеет смысл, когда решение принимается независимо значительным числом лиц. Приведем пример такой задачи. Сформулируем известную задачу рационального выбора [25] как задачу вероятностной оптимизации со случайным ограничением.

Пусть $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto (0; +\infty)$ — функция полезности благ, $p = \{p_1, \ldots, p_n\}$ — вектор цен, $p \in K^+$,

$$K^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_i > 0, \quad i = \overline{1, n}\},$$

параметр b – доход потребителя (ЛПР). Задача об оптимальном выборе при бюджетном ограничении имеет вид

$$\begin{cases} f(x) \to \max\limits_x, \\ p^T x \le b, \\ x \ge 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Неравенство $x \ge 0$ здесь и далее означает, что все координаты вектора x неотрицательны.

Предположение 1. *Будем считать, что функция полезности $f(x)$ удовлетворяет стандартным предположениям:*

1) *функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема на множестве K^+;*

2) *все частные производные первого порядка $f'_{x_i}(x)$ положительны внутри K^+;*

3) *матрица Гессе (вторых производных) является отрицательно определенной внутри K^+.*

Эти условия обеспечивают монотонное возрастание функции полезности по каждой из переменных и вогнутость функции внутри K^+ [25].

При выполнении условий предположения 1 решение задачи (2.3) $X(b)$ существует и единственно, $X(b) \in K^+$ для любых положительных $b \in (0, +\infty)$. Решением задачи (2.3) при фиксированных ценах p будет распределение потребления благ потребителя с доходом b.

Обозначим через X^* объединение всех возможных решений при различных значениях параметра:

$$X^* = \bigcup_{b>0} X(b).$$

Отметим, что $X(b)$ непрерывно зависит от параметра b. В прикладных макроэкономических исследованиях часто используются функции полезности, обладающие свойством α-однородности:

$$f(kx) = k^\alpha f(x) \quad \text{для всех } k > 0. \tag{2.4}$$

В теории рационального потребления решение $x^* \triangleq X(1)$ задачи при $b = 1$ называется репрезентативным потребителем, решение задачи при произвольном $b > 0$ имеет вид [26] $X(b) = bx^*$.

В этом случае объединение множества решений X^* представляет луч

$$X^* = \{kX(1), \quad k > 0\}.$$

Если функция полезности не однородна, то множество решений представляет кривую, расположенную в K^+.

Рассмотрим теперь модель, в которой доход (случайно выбранного) потребителя описывается случайной величиной $b = \xi$, распределение ξ можно оценить на основании статистических данных.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть для функции* $f(x)$ *выполняются условия предположения* 1, *а* ξ *— случайная величина, принимающая значение из интервала* $(0; +\infty)$, *тогда отображение* $X = X(\xi)$, *где* $X(b)$ *— решение задачи оптимизации* (2.3) *при* $\xi = b$, *является случайным вектором, принимающим значения из множества* X^*.

Утверждение следует из существования и единственности решения задачи (2.3) при выполнении условий предположения 1, а также из непрерывной зависимости решения задачи оптимизации от параметра b.

Утверждение 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) ξ *— случайная величина, принимающая лишь положительные значения, и ее математическое ожидание и дисперсия существуют и равны соответственно*

$$E(\xi) = \bar{b}, \quad \sigma^2(\xi) = s^2;$$

2) *функция* $f(x)$ *— положительно однородная функция с коэффициентом* $\alpha > 0$, *т.е. выполняется условие* (2.4).

Тогда моменты распределения вероятностного решение задачи (2.3) *определяются как*

$$E(X(\xi)) = X(E(\xi)) = \bar{b}x^*, \quad Cov(X(\xi)) = s^2 x^* (x^*)^T.$$

Утверждение следует из равенства $X(\xi) = \xi x^*$ в случае α-однородной функции полезности $f(x)$.

Как известно [25; 27], реально функция полезности преимущественно неоднородна. При неоднородной функции полезности множество X^* невыпукло, операция усреднения выводит точку за границы этого множества и $E(X(\xi)) \neq X(E(\xi))$. В этом случае усредненные данные о расходах на те или иные группы товаров не дают оснований для прогноза расходов, единый “репрезентативный потребитель” не существует. В макроэкономике такую ситуацию моделируют с использованием нескольких репрезентативных потребителей. Другим подходом является использование предлагаемой модели, основанной на вероятностном решении задачи рационального потребления.

С прикладной точки зрения важен вопрос о том, как изменится распределение потребления при изменении распределения доходов, т. е. при изменении функции распределения случайной величины ξ. При более детальном анализе рынка можно учесть тот факт, что цены на большинство ресурсов не фиксированы, более корректно их считать также случайными величинами, имеющими некоторый разброс вокруг средних значений. Анализ распределения оптимальных решений задачи рационального потребления со случайными ценами выходит за рамки данного исследования.

3. Вероятностные решения задач многокритериальной оптимизации

Вероятностные решения естественно возникают в задачах с несколькими критериями. Если лиц, принимающих решение, много, то выбор отдельного лица можно считать зависящим от случайного вектора θ, описывающего индивидуальные предпочтения ЛПР. Приведем общую постановку задачи.

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации — задачу оптимального выбора x из множества альтернатив X, максимизирующего m критериев:

$$\begin{cases} f_1(x) \to \max\limits_{x \in X}, \\ \quad \dots \\ f_m(x) \to \max\limits_{x \in X}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $X \subset \mathbb{R}^n$, функции $f_j(x) : X \mapsto \mathbb{R}^1$. Через X^* будем обозначать множество Парето-оптимальных решений задачи (3.1).

Обратимся к задаче вероятностной оптимизации, связанной с многокритериальной задачей. Пусть $\theta = \theta(\omega) = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ — вектор случайных параметров, принимающих неотрицательные значения и отражающих важность критериев для случайно выбранного ЛПР. Введем целевую функцию для случайного ЛПР как

$$F(x, \theta) = \theta_1 f_1(x) + \ldots + \theta_m f_m(x).$$

Получим задачу вероятностной оптимизации со случайным критерием:

$$F(x, \theta) \to \max_{x \in X}. \tag{3.2}$$

Обозначим ее решение через $X(\theta)$. Как известно [8], для любого $b \in \mathbb{R}^m_+ = \{b \in \mathbb{R}^m : \ b_j > 0, \ j = \overline{1, m}\}$ решение $X(b)$ задачи (3.2) при $\theta = b$ принадлежит множеству Парето-оптимальных решений, т. е. $X(b) \subset X^*$.

З а м е ч а н и е. Если критериальные функции $f_j(x)$ нормированы, т. е. принимают значения из интервала $[0; 1]$, то θ_i являются весовыми коэффициентами и вектор случайных параметров θ принимает значения из симплекса

$$B = \{b \in \mathbb{R}^m : b_1 + \ldots + b_m = 1, \quad b_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}\}.$$

Приведем пример задачи дискретной вероятностной оптимизации, в которой множество возможных решений X состоит из набора альтернатив.

3.1. Выбор маршрута пассажиром

Пусть у потребителя (пассажира) есть выбор между n возможными альтернативами (маршрутами). Определим множество альтернатив как $A_0 = \{e_1, \ldots\ldots, e_n\}$, где e_i — базисные векторы в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через c_i стоимости проезда i-м маршрутом, t_i — время проезда. Предполагается, что совпадающих значений параметров нет, т. е. точки $\{c_i, t_i\}$, $i = \overline{1, n}$, на плоскости критериев различны.

Задача о выборе маршрута рассматривается как задача минимизации двух критериев: времени перевозки $T(x)$ и ее стоимости $C(x)$. Под вектором $x \in A_0$ будем понимать индикатор выбора маршрута (элемента множества альтернатив), т. е. $x = e_i$ при выборе i-го маршрута, $T(x) = t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n$, $C(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$.

Для математического описания вероятностного характера предпочтений пассажиров исследуем следующую модель. В качестве критерия будем использовать "обобщенную цену перевозки", которая представляет сумму двух критериев:

$$f(x;\theta) = C(x) + \theta T(x),$$

где $\theta \geq 0$ — индивидуальная "ценность" единицы затраченного времени. Этот параметр считается зависящим от "случайно выбранного" пассажира, т. е. случайным. Получаем следующую задачу вероятностной оптимизации, зависящую от случайного параметра $\theta \in [0, \infty)$:

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_n = 1, \quad x_i \in \{0;1\} \\ f(x;\theta) = C(x) + \theta T(x) \to \min\limits_x . \end{cases} \tag{3.3}$$

Вероятностное решение этой задачи обозначим через $X_0(\theta)$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2 [28]. *Если случайная величина θ имеет непрерывное распределение на интервале $[t_1, t_2] \subseteq [0, +\infty)$, то решение задачи* (3.3) $X_0(\theta)$ *состоит из единственной точки с вероятностью* 1.

В статье [10] были получены соотношения для вероятностей альтернатив

$$q_i^{(j)} = Pr\{X_0(\theta) = e_i\}.$$

Рассмотрим важный вопрос: как изменится распределение решения задачи оптимизации, т. е. вероятности выбора того или иного решения, если множество альтернатив расширится? Пусть $A_1 = A_0 \cup e_{n+1}$, где e_{n+1} — новый маршрут (альтернатива), а распределение случайного параметра θ не изменилось. Обозначим решение задачи оптимизации для нового множества альтернатив через $X_1(\theta)$. Предпочтения случайно выбранного пассажира до и после введения нового маршрута описываются случайным вектором $\{X_0(\theta), X_1(\theta)\}$, где X_i — зависимые между собой дискретные случайные величины, принимающие значения $X_i \in A_i$, $i = 0, 1$.

Получена следующая теорема о свойствах решений задачи вероятностной оптимизации.

Теорема 2 [28, теорема 1]. *Переходные вероятности*

$$p_{ik} = Pr\{X_1(\theta) = e_i | X_0(\theta) = e_j\} = 0 \quad \textit{для всех} \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,n}, \quad k \neq i.$$

По заданному распределению θ можно рассчитать переходные вероятности $p_{i,n+1}$. Существенный интерес имеет вопрос о восстановлении распределения θ по заданным вероятностям альтернатив $q_i^{(j)}$, $j = 0, 1$, исследование которого начато в [28].

3.2. Портфель ценных бумаг

Задача о выборе портфеля ценных бумаг (ПЦБ) является классическим примером задачи стохастической оптимизации, т. е. задачи о выборе детерминированного решения в задаче оптимизации со случайными параметрами [18].

Пусть имеется n активов, доходность которых в фиксированный период описывается как случайный вектор ξ, $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — вложения в n рисковых активов, r — безрисковая процентная ставка, x_0 — доля вложений в безрисковый актив, W — капитал, который инвестируется. Задача о ПЦБ может рассматриваться в следующих постановках, связанных друг с другом [5; 17; 18; 29]:

∘ бикритериальная задача максимизации ожидаемой доходности и минимизации риска, описываемого средним квадратичным отклонением;

∘ задача минимизации риска при фиксированном уровне доходности;

∘ задача максимизации квантили, т.е. дохода, гарантированного с заданной вероятностью.

Обозначим через $m = \{m_1, \ldots, m_n\} = E(\xi) \in \mathbb{R}^n$ вектор математических ожиданий вектора случайных доходностей активов, а через $V = cov(\xi)$ ковариационную матрицу. Здесь и далее предполагать, что матрица V невырождена.

Ожидаемая доходность портфеля описывается функцией

$$f_1(x) = E(x^T\xi + rx_0) = r + (m - rl)^T x,$$

где $l = \{1, \ldots, 1\}^T \in \mathbb{R}^n$, вложение в безрисковый актив составляет $x_0 = 1 - l^T x$.

Риск инвестиций описывается средним квадратичным отклонением доходности портфеля или задача минимизации риска сводится к задаче минимума дисперсии доходности портфеля

$$f_2(x) = \sigma^2(x^T\xi) = x^T V x.$$

Так как решение задачи о выборе ПЦБ пропорционально объему вкладываемого капитала, то далее без ограничения общности будем полагать $W = 1$.

Запишем задачу выбора портфеля с заданным уровнем доходности d, $d \geq r$:

$$\begin{cases} x^T V x \to \min\limits_{x}, \\ r + (m - rl)^T x \geq d, \\ l^T x \leq 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Утверждение 3 [18]. *В случае невырожденной матрицы ковариации V оптимальные решения задачи* (3.4) *пропорциональны эффективному рыночному портфелю x^* и для любого $d \geq r$ имеют вид*

$$X(d) = \frac{d - r}{f_2(x^*)} x^*, \quad x^* = V^{-1}(m - rl). \tag{3.5}$$

Рассмотрим задачу вероятностной оптимизации, связанную с исходной постановкой. Уровень желаемой доходности d отражает склонность инвестора к риску (чем он выше, тем больше риск) и зависит от конкретного (случайно выбранного) инвестора. Таким образом, планируемая доходность инвестиционного портфеля может рассматриваться как случайная величина $d = \mu$, где μ — случайная величина, распределенная на $[r, +\infty)$. Отметим, что случайными являются и склонность к риску μ, и объем вкладываемого капитала W, причем эти величины статистически взаимосвязаны. В данной статье эта взаимосвязь не исследуется.

Будем рассматривать распределение параметра μ на некотором интервале

$$[m_1, m_2] \subset [r; +\infty).$$

Получим задачу оптимизации квадратичного критерия со случайным линейным ограничением (3.4).

Для каждого значения d случайной величины μ решение задачи $X(d)$ определяется однозначно соотношениями (3.5), поэтому $X(\mu)$ есть случайный вектор.

Утверждение 4. *Пусть μ — случайная величина, принимающая значения из $[r, +\infty)$, ее математическое ожидание $E(\mu) = \bar{\mu}$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(\mu)$ существуют, тогда вероятностное решение задачи* (3.4) *$X(\mu)$ удовлетворяет условиям*

$$E(X(\mu)) = X(\bar{\mu}), \tag{3.6}$$

$$cov(X(\mu)) = \frac{\sigma^2(\mu)}{f_2^2(x^*)}\, x^* \, (x^*)^T .$$

Утверждение 4 непосредственно следует из формулы (3.5), которая отражает линейную зависимость решения задачи условной оптимизации от параметра. Отметим, что (3.6) — это формулировка известного свойства рыночных портфелей [18] в терминах свойств вероятностных решений задачи стохастической оптимизации.

Рассмотрим ту же задачу со случайным параметром при наличии естественных ограничений неотрицательности, которым, как правило, должны удовлетворять инвестиции. При фиксированном значении параметра $\mu = d$ задача имеет вид

$$\begin{cases} f_2(x) = x^T V x \to \min\limits_x, \\ f_1(x) = r + (m - rl)^T x \geq d, \\ x \geq 0, \\ l^T x \leq 1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Обозначим через $X_1(d)$ решение задачи (3.7) при заданном $d \geq r$.

Из определения недоминируемого решения следует, что любое оптимальное по Парето решение x^* в задаче с двумя критериями

$$\begin{cases} f_2(x) = x^T V x \to \min\limits_x, \\ f_1(x) = r + (m - rl)^T x \to \max\limits_x, \\ x \geq 0, \\ l^T x \leq 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

является решением задачи параметрической задачи оптимизации (3.7) при некотором d, причем на этом решении параметрическое ограничение является активным (подробное обоснование приведено в [30], теорема 1), т. е. выполняется равенство

$$r + (m - rl)^T x^* = d.$$

Утверждение 5. *Множество X_1^* оптимальных по Парето решений в задаче с двумя критериями* (3.8) *совпадает с объединением*

$$X_1^* = \bigcup_{d \in [r; m_+]} X_1(d),$$

где $m_+ = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$ и представляет из себя ломаную, состоящую из конечного числа отрезков.

Отметим, что m^+ является максимальным значением параметрического ограничения (целевой функции $f_1(x)$) на множестве допустимых значений

$$\begin{cases} m_+ = \max\limits_x f_1(x), \\ l^T x \leq 1, \quad x \geq 0, \end{cases}$$

а $r = f_1(x_-)$, где $x_- = \{0, 0, 0\}$ — решение задачи минимизации выпуклой квадратичной функции

$$\begin{cases} \min\limits_x f_2(x), \\ l^T x \leq 1, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Запишем стандартные необходимые условия оптимальности в задаче выпуклого программирования (3.7) (см. например, [12]). Учитываем, что ограничение $r + (m - rl)^T x = d$ является активным (выполняется как равенство на множестве недоминируемых решений):

$$\begin{cases} 2Vx - z_1(m - rl) + z_0 l - \sum\limits_{j \in J} y_j e_j = 0, \\ (m - rl)^T x = d, \quad z_1 \geq 0, \\ l^T x - 1 = 0, \ z_0 \geq 0 \text{ или } l^T x \leq 1, z_0 = 0, \\ x_j \geq 0, \quad y_j = 0, \ j \notin J, \\ x_j = 0, \ y_j \geq 0, \ j \in J. \end{cases} \tag{3.9}$$

Система (3.9) содержит $2n+2$ линейных уравнения, из которых можно найти векторы $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z = \{z_0, z_1\}$. Пусть для некоторого набора активных индексов J и значения параметра $d = d_1$ существует решение системы уравнений и неравенств (3.9). Правые части уравнений зависят от параметра d линейно, следовательно, для этого набора активных индексов решение задачи параметрической оптимизации $x^*(d), y^*(d), z^*(d)$ в окрестности точки d_1 зависит от параметра линейно и составляет отрезок (возможно, вырожденный в точку). Так как возможных наборов активных индексов конечное число, то множество эффективных состоит из конечного числа отрезков и, возможно, отдельных точек.

В работе [30] (следствие 1 и свойство 2) для случая линейных ограничений общего вида и квадратичной целевой функции доказано, что множество эффективных решений представляет непрерывную ломаную, состоящую из конечного числа отрезков.

Рассмотрим распределение оптимальных портфелей $X_1(\mu)$ предполагая, что параметр задан как $d = \mu$ и является случайной величиной. Свойство сохранения среднего значения для задачи (3.7) со случайным параметром не выполняется в отличие от задачи без условий неотрицательности:

$$E(X_1(\mu)) \neq X_1(\bar{\mu}), \quad \bar{\mu} = E(\mu).$$

Более того, в этом случае среднее значение оптимальных портфелей (“рыночный портфель”) не принадлежит множеству эффективных решений: $E(X_1(\mu)) \notin X_1^*$.

В качестве примера исследуем задачу вероятностной оптимизации (3.7) для трех активов и равномерного распределения параметра $d = \mu$ на интервале $[r; m_+]$. Пусть

$$r = 1, \quad m = \{1.5, 2, 2.2\}, \quad V = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

С помощью алгоритма построения множества Парето-оптимальных решений в линейно-квадратичной задаче, предложенного в [30], получено следующее решение задачи. Множество X_1^* представляет собой ломаную, соединяющую точки $\{X^{(m)},\ m = 0, \ldots, 3\}$; каждая точка является решением задачи параметрической оптимизации (3.7) при соответствующем значении d. Ниже приведены значения параметра и координаты и значение критериальной функции для каждой вершины:

$$\begin{array}{ll} d_0 = 1, & X^{(0)} = \{0, 0, 0\}, \\ d_1 = 1.853, & X^{(1)} = \{0.385, 0.385, 0.230\}, \\ d_2 = 2.083, & X^{(2)} = \{0, 0.585, 0.415\}, \\ d_3 = 2.2, & X^{(3)} = \{0, 0, 1\}. \end{array}$$

Решение $X^{(0)}$ соответствует вложению всего капитала в безрисковый актив, ребро $X^{(0)}X^{(1)}$ состоит из портфелей, которые пропорциональны эффективному рыночному портфелю x^* и вычисляются по формуле (3.5), $X^{(3)}$ — наиболее рисковое вложение (с учетом ограничений неотрицательности); весь капитал вкладывается в 3-й актив, который характеризуется максимальной ожидаемой доходностью и максимальным риском.

Случайный вектор $X_1(\mu)$ распределен непрерывно на ломаной $X_1^* = [X^{(0)}X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)}]$. Расчеты показывают, что $E(X_1(\mu)) = \{0.173, 0.257, 0.214\} = \bar{X}$, для точки $\bar{X}$ не выполняются условия Парето-оптимальности, и, следовательно, $E(X_1(\mu)) \notin X_1^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Prekopa A.** Stochastic programming. Dordrecht: Springer, 1995. 600 p. (Mathematics and Its Applications; vol. 324.) doi: 10.1007/978-94-017-3087-7 .
2. **Попова О.А.** Задача линейного программирования со случайными входными данными // Вестн. СГУТУ. 2013. Т. 41, № 2. С. 19–23.

3. **Popova O.A.** Optimization problems with random data // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Сер.: Математика и физика. 2013. Т. 6. № 4. С. 506–515.
4. **Calafiore G., Campi M.C.** Uncertain convex programs: randomized solutions and confidence levels // Math. Program. Ser. A. 2005. Vol. 102. P. 25–46. doi:10.1007/s10107-003-0499-y .
5. **Bonami P., Lejeune M.A.** An exact solution approach for portfolio optimization problems under stochastic and integer constraints // Stochastic Programming E-print Series (SPEPS). 2007. Iss. 1. No. 2936317-2. doi: 10.18452/8373 .
6. **Kuo-Chen Hung, Shu-Cheng Lin, Chun-Hsiao Chu** Note on solving probabilistic programming problems involving multi-choice parameters // J. Interdisciplinary Math. 2015. Vol. 18, no. 5. P. 617–627. doi: 10.1080/09720502.2015.1047606 .
7. **Подиновский В.В.** Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 3. С. 415–424. doi: 10.7868/S004446691403017X .
8. **Жуковский В.И., Молоствов В.С.** Многокритериальная оптимизация систем в условиях неполной информации. М.: МНИИПУ, 1990. 112 с.
9. **Куржанский А.Б., Комаров Ю.А.** Гамильтонов формализм для задачи управления движением с векторным критерием // Докл. АН. 2018. Т. 480, № 4. С. 408–412. doi: 10.7868/S0869565218160053 .
10. **Timofeeva G., Martynenko A., Zavalishchin D.** Probabilistic modeling of passengers and carriers preferences via bicriterial approach // 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018): IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 496–498. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.469 .
11. **Powell W.B.** A unified framework for stochastic optimization // European J. Oper. Research. 2019. Vol. 275, no. 3. P. 795–821. doi: 10.1016/j.ejor.2018.07.014 .
12. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 383 с.
13. **Robbins H., Monro S.** A stochastic approximation method // The Annals Math. Stat. 1951. Vol. 22, no. 3. P. 400–407. doi: 10.1214/aoms/1177729586 .
14. **Ermoliev Y.** Stochastic quasigradient methods and their application to system optimization // Stochastics. Ser. B. 1983. Vol. 9, no. 1–2. P. 1–36. doi: 10.1080/17442508308833246 .
15. **Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N.** Gradient convergence in gradient methods with errors // SIAM J. Optim.. 2000. Vol. 10, no 3. P. 627–642. doi: 10.1137/S1052623497331063 .
16. **Rosasco L., Villa S., Vũ B.C.** Convergence of stochastic proximal gradient algorithm // Appl. Math. Optim. 2019. Vol. 18. P. 1–27. doi: 10.1007/s00245-019-09617-7 .
17. **Lai T.L., Xing H., Chen Z.** Mean-variance portfolio optimization when means and covariances are unknown // Annals Appl. Stat. 2011. Vol. 5, no. 2 A. P. 798–823. doi: 10.1214/10-AOAS422 .
18. **Markowitz H.M.** Portfolio selection: efficient diversification of investments. 2nd edt. Cambridge, Mass.: B. Blackwell, 1991. 384 p.
19. **Кан Ю.С., Кибзун А.И.** Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. Москва: Физматлит, 2009. 372 с.
20. **Lejeune M.A., Prekopa A.** Relaxations for probabilistically constrained stochastic programming problems: review and extensions // Annals Oper. Research. 2018. doi: 10.1007/s10479-018-2934-8 .
21. **Dentcheva D., Martinez G.** Regularization methods for optimization problems with probabilistic constraints // Math. Programming, 2013. Vol. 138, no. 1, P. 223–251.
22. **Genz A.** Numerical computation of multivariate normal probabilities // J. Comput. Graphical Stat. 1992. No. 1. P. 141–149.
23. **Henrion R., Möller A.** A gradient formula for linear chance constraints under Gaussian distribution // Math. Oper. Research, 2012. Vol. 37. P. 475–488.
24. **Матерон Ж.** Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978. 318 р.
25. **Varian H.R.** Intermediate. Microeconomics. A Modern approach. 8th edt. N Y: University of California at Berkeley, 2009. 739 p.
26. **Dixit A.K., Stiglitz J.E.** Monopolistic competition and optimum product diversity // The American Economic Review. 1977. Vol. 67, no. 3. P. 297–308.
27. **Anderson S.P., De Palma A., Thisse J.-F.** Demand for differentiated products, discrete choice models, and the characteristics approach // Review of Economic Studies. 1989. Vol. 56, no. 1, pp. 21–35. doi: 10.2307/2297747 .
28. **Timofeeva G.** Investigation of mathematical model of passenger preferences // AIP Conf. Proc. 2019. Vol. 2172. Art. no. 080001. doi: 10.1063/1.5133559 .
29. **Кан Ю.С., Тузов Н.В.** Минимизация квантили нормального распределения билинейной функции потерь // Автоматика и телемеханика. 1998. № 11. С. 82–92.

30. **Кац И.Я., Тимофеева Г.А.** Бикритериальная задача стохастической оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 116–123.

Поступила 2.12.2019
После доработки 10.02.2020
Принята к публикации 17.02.2020

Тимофеева Галина Адольфовна
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Уральский государственный университет путей сообщения;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: Gtimofeeva@usurt.ru

REFERENCES

1. Prekopa A. *Stochastic programming.* Ser. Mathematics and Its Applications, vol. 324, Dordrecht: Springer, 1995, 600 p. doi: 10.1007/978-94-017-3087-7 .
2. Popova O.A. Linear programming problem with random input data. *Vestn. VSGUTU*, 2013, vol. 41, no. 2, pp. 19–23 (in Russian).
3. Popova O.A. Optimization problems with random data. *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 506–515.
4. Calafiore G., Campi M.C. Uncertain convex programs: randomized solutions and confidence levels. *Math. Program., Ser. A*, 2005, vol. 102, pp. 25–46. doi: 10.1007/s10107-003-0499-y .
5. Bonami P., Lejeune M.A. An exact solution approach for portfolio optimization problems under stochastic and integer constraints. *Stochastic Programming E-print Series* (*SPEPS*), 2007, iss. 1, no. 2936317-2. doi: 10.18452/8373 .
6. Kuo-Chen Hung, Shu-Cheng Lin, Chun-Hsiao Chu Note on solving probabilistic programming problems involving multi-choice parameters. *J. Interdisciplinary Math.*, 2015, vol. 18, no. 5, pp. 617–627. doi: 10.1080/09720502.2015.1047606 .
7. Podinovski V.V. Potential optimality in multicriterial optimization. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 3, pp. 429–438. doi: 10.1134/S0965542514030154 .
8. Zhukovskii V.I., Molostvov V.S. *Mnogokriterial'naya optimizatsiya sistem v usloviyakh nepolnoi informatsii* [Multicriterion optimization of systems in conditions of incomplete information]. Moscow: MNIIPU Publ., 1990, 112 p.
9. Komarov Yu.A., Kurzhanski A.B. Hamiltonian formalism for the problem of optimal motion control under multiple criteria. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 291–294. doi: 10.1134/S1064562418030134 .
10. Timofeeva G., Martynenko A., Zavalishchin D. Probabilistic modeling of passengers and carriers preferences via bicriterial approach. In: *17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018)*, IFAC-PapersOnLine, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 496–498. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.469 .
11. Powell W.B. A unified framework for stochastic optimization. *European J. Operational Research*, 2019, vol. 275, no. 3, pp. 795–821. doi: 10.1016/j.ejor.2018.07.014 .
12. Polyak B. *Introduction to optimization.* New York: Optimization Software, 1987. ISBN: 9780911575149 . Original Russian text published in Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu.* Moscow: Nauka Publ., 1983, 383 p.
13. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method. *The Annals Math. Stat.*, 1951, vol. 22, no. 3, pp. 400–407. doi: 10.1214/aoms/1177729586 .
14. Ermoliev Y. Stochastic quasigradient methods and their application to system optimization. *Stochastics Ser. B*, 1983, vol. 9, no. 1–2, pp. 1–36. doi: 10.1080/17442508308833246 .
15. Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N. Gradient convergence in gradient methods with errors. *SIAM J. Optim.*, 2000, vol. 10, no. 3, pp. 627–642. doi: 10.1137/S1052623497331063 .
16. Rosasco L., Villa S., Vũ B.C. Convergence of stochastic proximal gradient algorithm. *Appl. Math. Optim.*, 2019, vol. 18, pp. 1–27. doi: 10.1007/s00245-019-09617-7 .
17. Lai T.L., Xing H., Chen Z. Mean-variance portfolio optimization when means and covariances are unknown. *Annals Appl. Stat.*, 2011, vol. 5, no. 2A, pp. 798–823. doi: 10.1214/10-AOAS422 .

18. Markowitz H.M. *Portfolio selection: efficient diversification of investments* (2nd ed.) Cambridge, Mass.: B. Blackwell, 1991, 384 p. ISBN: 9781557861085 .
19. Kibzun A.I., Kan Yu.S. Stochastic programming problems with probability and quantile functions. N Y: Wiley, 1996, 316 p. ISBN: 9780471958154 . Original Russian text published in Kan Yu.S., Kibzun A.I. *Zadachi stokhasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami.* Moscow: Fizmatlit Publ., 2009, 372 p. ISBN: 978-5-9221-1148-5/hbk .
20. Lejeune M.A., Prekopa A. Relaxations for probabilistically constrained stochastic programming problems: review and extensions. *Annals Oper. Research*, 2018. doi: 10.1007/s10479-018-2934-8 .
21. Dentcheva D., Martinez G. Regularization methods for optimization problems with probabilistic constraints. *Math. Program.*, 2013, vol. 138, no. 1, pp. 223–251. doi: 10.1007/s10107-012-0539-6 .
22. Genz A. Numerical computation of multivariate normal probabilities. *J. Comput. Graphical Stat.*, 1992, vol. 1, no. 2, pp. 141–149. doi: 10.2307/1390838 .
23. Henrion R., Möller A. A gradient formula for linear chance constraints under Gaussian distribution. *Mathematics of Operations Research*, 2012, vol. 37, no. 3, pp. 475–488. doi: 10.1287/moor.1120.0544 .
24. Matheron G. *Random sets and integral geometry.* N Y: Wiley, 1975, 261 p. ISBN: 978-0-471-57621-1 . Translated to Russian under the title *Sluchainye mnozhestva i integral'naya geometriya.* Moscow: Mir Publ., 1978, 318 p.
25. Varian H.R. *Intermediate. Microeconomics. A modern approach.* (8th edn.) N Y: University of California at Berkeley, 2009. 739 p. ISBN: 978-0393934243 .
26. Dixit A.K., Stiglitz J.E. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *The American Economic Review*, 1977, vol. 67, no. 3, pp. 297–308. doi: 10.7916/D8S75S91 .
27. Anderson S.P., De Palma A., Thisse J.-F. Demand for differentiated products, discrete choice models, and the characteristics approach. *Review of Economic Studies*, 1989, vol. 56, no. 1, pp. 21–35. doi: 10.2307/2297747 .
28. Timofeeva G. Investigation of mathematical model of passenger preferences. *AIP Conf. Proc.*, 2019, vol. 2172, art. no. 080001. doi: 10.1063/1.5133559 .
29. Kan Yu.S., Tuzov N.V. Quantile minimization of the normal distribution of a bilinear loss function. *Autom. Remote Control*, 1998, vol. 59, no. 11, pp. 1568–1576.
30. Kats I.Ya., Timofeeva G.A. Bicriteria problem of stochastic optimization. *Autom. Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 3, pp. 422–428.

Received December 2, 2019
Revised February 10, 2020
Accepted February 17, 2020

Galina Adol'fovna Timofeeva, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, 620034 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: Gtimofeeva@usurt.ru .

Cite this article as: G. A. Timofeeva. Probabilistic solutions of conditional optimization problems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 198–211 .