ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.542

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ СПОРАДИЧЕСКИХ ПРОСТЫХ ГРУПП Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL И Co_3 ПО ГРАФУ ГРЮНБЕРГА — КЕГЕЛЯ

А. С. Кондратьев

Графом Грюнберга — Кегеля (графом простых чисел) $\Gamma(G)$ конечной группы G называется граф, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. В теории конечных групп активно развиваются исследования распознаваемости конечных групп по графу Грюнберга — Кегеля. Для конечной группы G через $h_\Gamma(G)$ обозначается число всех попарно не изоморфных конечных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ (если множество таких групп H бесконечно, то пишем $h_\Gamma(G) = \infty$). Группа G называется n-распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля, если $h_\Gamma(G) = n < \infty$, распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля, если $h_\Gamma(G) = 1$, и нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля, если $h_\Gamma(G) = \infty$. Говорят, что проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля решена для конечной группы G, если найдено значение $h_\Gamma(G)$. Для нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля конечной группы G интересен также вопрос о (нормальном) строении конечных групп с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у G. В 2003 г. М. Хаги исследовала строение конечных групп, граф Грюнберга — Кегеля которых равен графу Грюнберга — Кегеля какой-либо спорадической простой группы. В частности, в этой работе были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу Грюнберга — Кегеля, а именно, спорадические простые группы J_1, M_{22}, M_{23}, M_{24} и Co_2. Однако это исследование не было завершено. В 2006 г. в работе А. В. Заварницина была установлена распознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля группы J_4. Нераспознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля спорадических групп M_{12} и J_2 была известна ранее, она следует из нераспознаваемости этих групп по спектру. В данной статье продолжается исследование Хаги с использованием ее результатов. Для каждой из спорадических простых групп S, изоморфных Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL или Co_3, определены все конечные группы с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у S. Тем самым для этих шести групп S завершено исследование Хаги, и, в частности, решена проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, спорадическая группа, спектр, граф Грюнберга — Кегеля, распознавание по графу Грюнберга — Кегеля.

A. S. Kondrat'ev. On the recognizability of sporadic simple groups Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL, and Co_3 by the Gruenberg–Kegel graph.

The Gruenberg–Kegel graph (prime graph) $\Gamma(G)$ of a finite group G is a graph in which the vertices are the prime divisors of the order of G and two distinct vertices p and q are adjacent if and only if G contains an element of order pq. The problem of recognition of finite groups by the Gruenberg–Kegel graph is of great interest in the finite group theory. For a finite group G, $h_\Gamma(G)$ denotes the number of all pairwise nonisomorphic finite groups H such that $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ (if the set of such groups H is infinite, we write $h_\Gamma(G) = \infty$). A group G is called n-recognizable by the Gruenberg–Kegel graph if $h_\Gamma(G) = n < \infty$, recognizable the Gruenberg–Kegel graph if $h_\Gamma(G) = 1$, and unrecognizable the Gruenberg–Kegel graph if $h_\Gamma(G) = \infty$. We say that the problem of recognizability by the Gruenberg–Kegel graph is solved for a finite group G if the value $h_\Gamma(G)$ is found. For a finite group G unrecognizable by the Gruenberg–Kegel graph, the question of the (normal) structure of finite groups with the same Gruenberg–Kegel graph as G is also of interest. In 2003, M. Hagie investigated the structure of finite groups having the same Gruenberg–Kegel graph as some sporadic simple group. In particular, she gave first examples of finite groups recognizable by the Gruenberg–Kegel graph; they were the sporadic simple groups J_1, M_{22}, M_{23}, M_{24}, and Co_2. However, that investigation was not completed. In 2006, A. V. Zavarnitsine established that the group J_4 is recognizable by the Gruenberg–Kegel graph. The unrecognizability of the sporadic groups M_{12} and J_2 was known previously; it follows from the unrecognizability of these groups by the spectrum. In the present paper, we continue Hagie's study and use her results. For any sporadic simple group S isomorphic to Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL, or Co_3, we find all finite groups having the same Gruenberg–Kegel graph as S. Thus, for these six groups, we complete Hagie's investigation and, in particular, solve the problem of recognizability by the Gruenberg–Kegel graph.

Keywords: finite group, simple group, sporadic group, spectrum, Gruenberg–Kegel graph, recognition by the Gruenberg–Kegel graph.

MSC: 20D08, 20D20, 20D60, 20C20, 20C34, 20C40, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-79-87

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф Грюнберга — Кегеля* (или *граф простых чисел*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$.

В теории конечных групп сложилось и динамично развивается направление исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [8]). Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру*, если для любой конечной группы H из равенства $\omega(H) = \omega(G)$ следует изоморфизм $H \cong G$.

С этим направлением тесно связано перспективное направление исследований распознаваемости конечных групп по графу Грюнберга — Кегеля. Конечная группа G называется *распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если для любой конечной группы H равенство графов $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Ясно, что граф $\Gamma(G)$ однозначно определяется по множеству $\omega(G)$, поэтому из распознаваемости конечной группы по графу Грюнберга — Кегеля следует ее распознаваемость по спектру.

Первый необходимый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп по спектру или по графу Грюнберга — Кегеля заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости (которое было введено автором в [1]), более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой* по спектру (соответственно по графу Грюнберга — Кегеля), если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(P)$) имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

Для конечной группы G через $h_\Gamma(G)$ обозначается число всех попарно не изоморфных конечных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ (если множество таких групп H бесконечно, то пишем $h_\Gamma(G) = \infty$). Группа G называется *n-распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $h_\Gamma(G) = n < \infty$, *почти распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $1 < h_\Gamma(G) < \infty$, и *нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $h_\Gamma(G) = \infty$. Будем говорить, что *проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля решена для конечной группы G*, если найдено значение $h_\Gamma(G)$. Эта проблема имеет смысл только для групп с тривиальным разрешимым радикалом, поскольку хорошо известно, что группы с нетривиальным разрешимым радикалом не будут распознаваемыми даже по спектру (см. [8]). Для нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля конечной группы G интересен также вопрос о (нормальном) строении конечных групп с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у G.

Первой работой, связанной с распознаваемостью по графу Грюнберга — Кегеля, по-видимому, была работа Чэня [11], в которой он доказал, что каждая из 26 спорадических простых групп однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется в классе конечных групп по своему порядку и графу Грюнберга — Кегеля.

В 2003 г. М. Хаги [14] исследовала строение конечных групп, граф Грюнберга — Кегеля которых равен графу Грюнберга — Кегеля какой-либо спорадической простой группы. В частности, в этой работе были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу Грюнберга — Кегеля, а именно, спорадические простые группы J_1, M_{22}, M_{23}, M_{24}, Co_2, а также доказаны 2-распознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля группы M_{11} и квазираспознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля групп J_3, Suz, $O'N$, Ly, Fi_{23}, Fi'_{24}, Th, Ru, Co_1, F_1, F_2. Однако это исследование не было завершено.

В 2006 г. в работе А .В. Заварницина [3] была установлена распознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля группы J_4.

Нераспознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля спорадических групп M_{12} и J_2 была известна ранее, она следует из нераспознаваемости этих групп по спектру (см. [20; 21]). Результаты Хаги о строении конечных групп, граф Грюнберга — Кегеля которых равен $\Gamma(M_{12})$ или $\Gamma(J_2)$, были существенно усилены в работе автора и И.В. Храмцова [5].

В данной статье мы продолжаем исследование Хаги, используя ее результаты из [14]. Для каждой из спорадических простых групп S, изоморфных Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL или Co_3 (графы Грюнберга — Кегеля этих групп имеют точно две компоненты связности), определены все конечные группы с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у S. Тем самым для этих шести групп S завершено исследование Хаги, и, в частности, решена проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Группа Ru распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.*

Теорема 2. *Пусть $S = HN$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда G изоморфна S или $\mathrm{Aut}(S)$. В частности, группа HN 2-распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.*

Теорема 3. *Пусть $S = Fi_{22}$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда G изоморфна S, $\mathrm{Aut}(S)$ или $\mathrm{Aut}(Suz)$. В частности, группа Fi_{22} 3-распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.*

Теорема 4. *Пусть $S = He$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа G изоморфна He, $\mathrm{Aut}(He)$, $S_8(2)$ или $\mathrm{Aut}(O_8^-(2))$;*

(2) *$O_2(G) \neq 1$, группа $\overline{G} = G/O_2(G)$ изоморфна $S_8(2)$, $O_8^-(2)$ или $\mathrm{Aut}(O_8^-(2))$, каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен неприводимому $GF(2)\overline{G}$-модулю размерности 8, 16 или 48.*

В частности, группа He не распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.

Теорема 5. *Пусть $S = M^cL$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа G изоморфна M^cL, $\mathrm{Aut}(HS)$, $\mathrm{Aut}(M_{22})$ или $U_6(2).2$;*

(2) *$O_2(G) \neq 1$, группа $\overline{G} = G/O_2(G)$ изоморфна HS, $\mathrm{Aut}(HS)$, M_{22}, $\mathrm{Aut}(M_{22})$, $U_6(2)$ или $U_6(2).2$, каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен единственному 20-мерному неприводимому $GF(2)\overline{G}$-модулю.*

В частности, группа M^cL не распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.

Теорема 6. *Пусть $S = Co_3$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа G изоморфна Co_3;*

(2) *$O_2(G) \neq 1$, группа $\overline{G} = G/O_2(G)$ изоморфна Co_3 и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен единственному 22-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)\overline{G}$-модулю;*

(3) *$O_2(G) \neq 1$, группа $\overline{G} = G/O_2(G)$ изоморфна M_{24} и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен одному из двух 11-мерных абсолютно неприводимых $GF(2)\overline{G}$-модулей.*

В частности, группа Co_3 не распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.

Поскольку каждая из спорадических простых групп имеет несвязный граф Грюнберга — Кегеля (см. [22]), мы используем результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля (см. [5;22]). Кроме того, используется система компьютерной алгебры GAP (см. [12]).

Заметим, что в работах Б. Хосрави [17; 18], в частности, изучалось строение конечных групп с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у групп $\mathrm{Aut}(M_{22})$, $\mathrm{Aut}(HS)$ и $\mathrm{Aut}(Suz)$. Но ввиду [13] справедливы равенства $\Gamma(\mathrm{Aut}(M_{22})) = \Gamma(\mathrm{Aut}(HS)) = \Gamma(M^cL)$ и $\Gamma(\mathrm{Aut}(Suz)) = \Gamma(Fi_{22})$. Поэтому ввиду наших теорем 3 и 5 результаты Хосрави из [17, теорема 3.1(b,c,f)] и [18, теоремы 3.2(a), 3.4, 3.5(b)], касающиеся этих групп, неполны и, к сожалению, некорректны.

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [6;9;13;15;16].

Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга—Кегеля. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. По теореме Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] либо группа G изоморфна группе Фробениуса или двойной группе Фробениуса, либо фактор-группа $\overline{G} := G/F(G)$ почти проста (т. е. имеет простой неабелев цоколь $Soc(\overline{G})$) и известна ввиду результатов [4; 19; 22]. Предположим, что $F(G) \neq 1$ и группа $\overline{G}$ почти проста. Тогда $\pi(F(G)) \cup \pi(\overline{G}/Soc(\overline{G})) \subseteq \pi_1(G)$ (см. [22, теорема A]). Каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ при $i > 1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$-холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G (изолированной подгруппой называется собственная подгруппа, содержащая централизатор каждого своего неединичного элемента). Любой неединичный элемент x из $X_i(G)$ при $i > 1$ действует без неподвижных точек на $F(G)$, т. е. $C_{F(G)}(x) = 1$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G, причем $K < L \leq F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, называется *p-главным фактором* группы G, и его можно рассматривать как точный неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль (так как $C_{G/K}(V) = F(G)/K$), причем каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ при $i > 1$ действует без неподвижных точек на V. Поэтому задача изучения строения группы G во многом сводится к имеющей самостоятельный интерес проблеме описания неприводимых $GF(p)\overline{G}$-модулей, на которые некоторый элемент простого порядка (отличного от p) из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек.

Рассмотрим некоторые результаты, используемые в доказательстве теорем.

Следующий полезный результат хорошо известен (см., например, [2, лемма 4]).

Лемма 1.1. *Пусть H — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FH-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент из H порядка, взаимно простого с p, то*

$$\dim C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Лемма 1.2 [15, теорема VII.1.16]. *Пусть G — конечная группа, $F = GF(p^m)$ — поле определения характеристики $p > 0$ для абсолютно неприводимого FG-модуля V, $\langle\sigma\rangle = \mathrm{Aut}(F)$, V_0 обозначает модуль V, рассматриваемый как $GF(p)G$-модуль, и $W = V_0 \otimes_{GF(p)} F$. Тогда*

(1) $W = \bigoplus_{i=1}^m V^{\sigma^i}$, *где V^{σ^i} — модуль, алгебраически сопряженный с V посредством σ^i;*

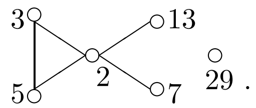
(2) *V_0 является неприводимым $GF(p)G$-модулем, и, в частности, W реализуется как неприводимый $GF(p)G$-модуль V_0;*

(3) *с точностью до изоморфизма модулей неприводимые $GF(p)G$-модули находятся во взаимно однозначном соответствии с классами алгебраической сопряженности неприводимых $\overline{GF(p)}G$-модулей, где $\overline{GF(p)}$ — алгебраическое замыкание поля $GF(p)$.*

Лемма 1.3 [7, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

2. Доказательства теорем

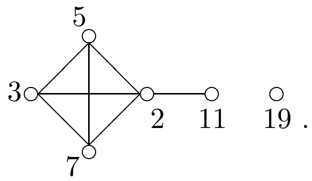
Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $S = Ru$, G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] граф $\Gamma(S)$ имеет вид



Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $F(G) = O_2(G))$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$. Предположим, что $O_2(G) \neq 1$. Тогда элемент порядка 29 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальную 2-группу $F(G)$, что ввиду леммы 1.1 противоречит таблице 2-модулярных характеров Брауэра группы S (см. [12]). Поэтому $O_2(G) = 1$.

Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть $S = HN$, G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] $|\mathrm{Aut}(S) : S| = 2$ и граф $\Gamma(S) = \Gamma(\mathrm{Aut}(S))$ имеет вид

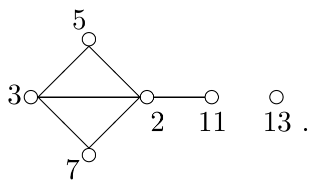


Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$ или $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [13] $U_3(8) \cong X < \overline{G}$ и $\Gamma(X)$ имеет вид

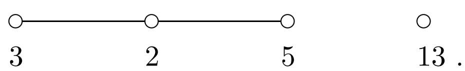
Пусть H — полный проообраз в G подгруппы X. Тогда граф $\Gamma(H)$ несвязен, $F(H) = F(G)$ и $|\pi(H/O_5(H))| = 4$. По [5, теорема 7] имеем $F(H/O_5(H)) = O_2(H/O_5(H))$ и, следовательно, $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 5\}$. Если $5 \in \pi(F(G))$, то элемент порядка 19 из H действует без неподвижных точек на нетривиальной 5-группе $F(H/O_2(H))$, что ввиду леммы 1.1 противоречит таблице 5-модулярных характеров Брауэра группы $\overline{H}$, совпадающей с ее таблицей обыкновенных характеров из [13]. Поэтому $F(G) = O_2(G)$. Если $O_2(G) \neq 1$, то ввиду леммы 1.1 и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы S (см. [12]) элемент порядка 19 из G централизует нетривиальный элемент из $O_2(G)$. Полученное противоречие показывает, что $F(G) = 1$.

Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Пусть $S = Fi_{22}$, G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] $|\mathrm{Aut}(S) : S| = 2$ и граф $\Gamma(S) = \Gamma(\mathrm{Aut}(S)) = \Gamma(\mathrm{Aut}(Suz))$ имеет вид



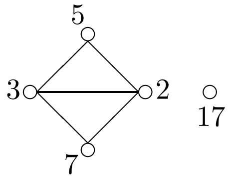
Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3, 5\}$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$, $\mathrm{Aut}(S)$, Suz или $\mathrm{Aut}(Suz)$. Ввиду [13] ${}^2F_4(2)' \cong X < \overline{G}$ и $\Gamma(X)$ имеет вид



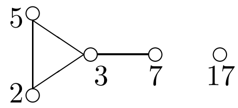
Пусть H — полный проообраз в G подгруппы X. Тогда граф $\Gamma(H)$ несвязен, $F(H) = F(G)$ и $|\pi(H)| = 4$. По [5, теорема 7] имеем $F(H) = 1$ и, следовательно, $F(G) = 1$. Поскольку ввиду [13] в графе $\Gamma(Suz)$ вершины 2 и 11 несмежны, графы $\Gamma(Suz)$ и $\Gamma(S)$ различны, и поэтому $G \cong S$, $\mathrm{Aut}(S)$ или $\mathrm{Aut}(Suz)$.

Теорема 3 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Пусть $S = He$ и G — конечная группа. Докажем *необходимость*. Предположим, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] графы $\Gamma(S) = \Gamma(\mathrm{Aut}(S)) = \Gamma(S_8(2)) = \Gamma(\mathrm{Aut}(O_8^-(2)))$ и $\Gamma(O_8^-(2))$ имеют соответственно вид



и



.

Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,5,7\}$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$, $\mathrm{Aut}(S)$, $L_2(16)$, $L_2(16):2$, $L_2(16):4$, $O_8^-(2)$, $\mathrm{Aut}(O_8^-(2))$ или $S_8(2)$. Ввиду [13] группа $\overline{G}$ содержит подгруппу X, изоморфную группе Фробениуса вида $2^4:5$. Пусть H — полный проообраз в G подгруппы X. Если $7 \in \pi(F(G))$, то, применяя лемму 1.3 к группе $H/O_{7'}(H)$, получим, что элемент порядка 5 из H централизует элемент порядка 7 из $F(G)$, а это противоречит виду графа $\Gamma(G)$. Поэтому $7 \notin \pi(F(G))$ и, следовательно, $7 \in \pi(\overline{G})$, откуда следует, что группа $\overline{G}$ не изоморфна группам $L_2(16)$, $L_2(16):2$, $L_2(16):4$. Если $F(G) = 1$, то выполняется утверждение (1) теоремы 4. Если $F(G) \neq 1$, то элемент порядка 17 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальной нильпотентной группе $F(G)$, и ввиду лемм 1.1 и 1.2 и таблиц p-модулярных характеров Брауэра цоколя группы $\overline{G}$ для $p \in \{2,3,5\}$ (см. [12; 16]) выполняется утверждение (2) теоремы 4.

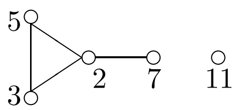
Необходимость доказана.

Докажем *достаточность*. Пусть выполняется заключение теоремы. Если выполняется утверждение (1) теоремы, то из [13] видно, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Пусть выполняется утверждение (2) теоремы. Для доказательства равенства $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ достаточно проверить его для случая, когда $O_2(G)$ — неприводимый $GF(2)\overline{G}$-модуль размерности 8, 16 или 48. Применяя леммы 1.1 и 1.2 для соответствующих 2-модулярных характеров Брауэра и $|g| = 7$, видим, что некоторый элемент порядка 7 из $\overline{G}$ централизует некоторую инволюцию из $O_2(G)$. Отсюда, учитывая вид графа $\Gamma(\overline{G})$, получаем, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

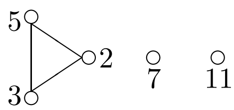
Достаточность доказана.

Теорема 4 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5. Пусть $S = M^cL$ и G — конечная группа. Докажем *необходимость*. Предположим, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] граф $\Gamma(S) = \Gamma(\mathrm{Aut}(M_{22})) = \Gamma(\mathrm{Aut}(HS)) = \Gamma(U_6(2).2)$, граф $\Gamma(U_6(2)) = \Gamma(HS)$ и граф $\Gamma(M_{22})$ имеют соответственно вид



,



и

.

Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,5\}$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$, M_{22}, $\mathrm{Aut}(M_{22})$, HS, $\mathrm{Aut}(HS)$, $U_6(2)$ или $U_6(2).2$. Если $F(G) = 1$, то выполняется п. (1) теоремы 5. Пусть $F(G) \neq 1$. Тогда элемент порядка 11 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальной нильпотентной группе $F(G)$, и ввиду лемм 1.1 и 1.2 и таблиц p-модулярных характеров Брауэра цоколя группы $\overline{G}$ для $p \in \{2,3,5\}$ (см. [12; 16]) имеем $F(G) = O_2(G)$, группа $\overline{G}$ изоморфна HS, $\mathrm{Aut}(HS)$, M_{22}, $\mathrm{Aut}(M_{22})$, $U_6(2)$ или $U_6(2).2$, каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен единственному 20-мерному (абсолютно) неприводимому $GF(2)\overline{G}$-модулю. Таким образом, выполняется утверждение (2) теоремы 5.

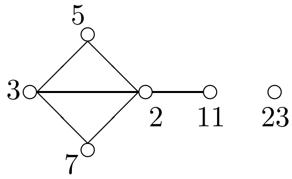
Необходимость доказана.

Докажем *достаточность*. Пусть выполняется заключение теоремы. Если выполняется утверждение (1) теоремы, то из [13] видно, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Пусть выполняется утверждение (2) теоремы. Для доказательства равенства $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ достаточно проверить его для случая, когда $O_2(G)$ — единственный 20-мерный (абсолютно) неприводимый $GF(2)\overline{G}$-модуль. Применяя лемму 1.1 для соответствующего 2-модулярного характера Брауэра и $|g| = 7$, видим, что некоторый элемент порядка 7 из $\overline{G}$ централизует некоторую инволюцию из $O_2(G)$. Отсюда, учитывая вид графа $\Gamma(\overline{G})$, получаем, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

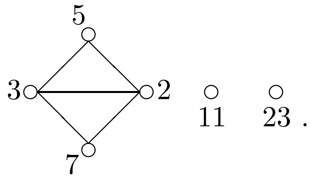
Достаточность доказана.

Теорема 5 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6. Пусть $S = Co_3$ и G — конечная группа. Докажем *необходимость*. Предположим, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] граф $\Gamma(S)$ и граф $\Gamma(M_{24})$ имеют соответственно вид



и



Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $F(G) = O_2(G))$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$ или M_{24}. Если $O_2(G) = 1$, то выполняется утверждение (1) теоремы 6.

Предположим, что $O_2(G) \neq 1$. Тогда элемент порядка 23 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальной 2-группе $O_2(G)$. Если $\overline{G} \cong S$, то ввиду лемм 1.1 и 1.2 и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы S (см. [12]) выполняется утверждение (2) теоремы 6. Если $\overline{G} \cong M_{24}$, то ввиду лемм 1.1 и 1.2, таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы M_{24} (см. [16; 10, табл. 8.70] выполняется утверждение (3) теоремы 6.

Необходимость доказана.

Докажем *достаточность*. Пусть выполняется заключение теоремы. Если выполняется утверждение (1) теоремы, то [13] показывает, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

Пусть выполняется утверждение (2) теоремы. Для доказательства равенства $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ достаточно проверить его для случая, когда $O_2(G)$ — 22-мерный абсолютно неприводимый $GF(2)\overline{G}$-модуль. Ясно, что в этом случае $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

Пусть выполняется утверждение (3) теоремы. Для доказательства равенства $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ достаточно проверить его для случая, когда $O_2(G)$ — один из двух 11-мерных абсолютно неприводимых $GF(2)\overline{G}$-модулей. Применяя лемму 1.1 для соответствующих 2-модулярных характеров Брауэра и $|g| = 11$, видим, что некоторый элемент порядка 11 из $\overline{G}$ централизует некоторую инволюцию из $O_2(G)$. Отсюда, учитывая вид графа $\Gamma(\overline{G})$, получаем, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

Достаточность доказана.

Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость некоторых конечных простых групп по множеству порядков элементов // Укр. мат. конгр. 2001. Алгебра і теор. чисел. Секція 1: Тез. доп. Киев, 2001. С. 4.
2. **Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М.С.** $C55$-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
3. **Заварницин А.В.** О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
4. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
6. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
7. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.

8. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36. С. 119–138.
9. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p. ISBN: 0198531990 .
10. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407). doi: 10.1017/CBO9781139192576 .
11. **Chen G.** A new characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1996. Vol. 3, no. 1. P. 49–58.
12. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.10.0. 2018: [e-resource]. Available at: http://www.gap-system.org .
13. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
14. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800 .
15. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 531 p.
16. **Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R.** An atlas of Brauer characters. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
17. **Khosravi B.** Groups with the same prime graph as an almost sporadic simple group // Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi (N.S.). 2009. Vol. 25, no. 2. P. 175–187.
18. **Khosravi B.** On the prime graphs of the automorphism groups of sporadic groups // Arch. Math. (Brno). 2009. Vol. 45, no. 2. P. 83–94.
19. **Lucido M.S.** Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1999. Vol. 102. P. 1–22; addendum // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
20. **Mazurov V.D., Shi W.J.** A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1998. Vol. 5, no. 3. P. 285–288.
21. **Praeger C.E., Shi W.J.** A characterization of some alternating and symmetric groups // Commun. Algebra. 1994. Vol. 22, no. 5. P. 1507–1530. doi: 10.1080/00927879408824920 .
22. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .

Поступила 30.09.2019
После доработки 19.11.2019
Принята к публикации 21.11.2019

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Alekseeva O.A., Kondrat'ev A.S. Quasirecognizability of some finite simple groups y the set of element orders. *Ukr. mat. kongr. 2001. Algebra and Number Theory.* Sec. 1: Abstracts. Kiev, 2001. P. 4 (in Russian).
2. Dolfi S., Jabara E., Lucido M. S. $C55$-groups, *Sib. Math. J.*, 2004, Vol. 45, no. 6, pp 1053–1062. doi: 10.1023/B:SIMJ.0000048920.62281.61 .
3. Zavarnitsine A.V. Recognition of finite groups by the prime graph. *Algebra Logic.*, 2006, vol. 45, no. 4, pp. 220–231. doi: 10.1007/s10469-006-0020-9 .
4. Kondrat'ev A. S. Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363 .
5. Kondrat'ev A.S., Khramtsov I.V. On finite tetraprimary groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 279, suppl. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543812090040 .
6. Curtis C.W., Reiner I. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Pure Appl. Math., vol. XI, N Y; London: Interscience Publ., 1962, 689 p. ISBN: 978-0-8218-4066-5 . Translated to Russian under the title *Teoriya predstavlenii konechnykh grupp i assotsiativnykh algebr.* Moscow: Nauka Publ., 1969, 668 p.

7. Mazurov V.D. Characterizations of finite groups by sets of orders of their elements. *Algebra Logic*, 1997, vol. 36, no. 1, pp. 23–32. doi: 10.1007/BF02671951 .
8. Mazurov V.D. Groups with given spectrum. *Izv. Ural'sk. Gos. Univ.*, 2005, no. 36, pp. 119–138 (in Russian).
9. Aschbacher M. *Finite group theory.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986, 274 p. ISBN: 0198531990 .
10. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576 .
11. Chen G. A new characterization of sporadic simple groups. *Algebra Colloq.*, 1996, vol. 3, no. 1, pp. 49–58.
12. The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming,* Ver. 4.9.1, 2018. Available at: http://www.gap-system.org .
13. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990 .
14. Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group. *Comm. Algebra*, 2003, vol. 31, no. 9, pp. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800 .
15. Huppert B., Blackburn N. *Finite groups* II. Berlin: Springer-Verlag, 1982, 531 p. ISBN: 978-3-642-67994-0 .
16. Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R. *An atlas of Brauer characters.* Oxford: Clarendon Press, 1995, 327 p.
17. Khosravi B. Groups with the same prime graph as an almost sporadic simple group. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi (N.S.)*, 2009, vol. 25, no. 2,. pp. 175–187.
18. Khosravi B. On the prime graphs of the automorphism groups of sporadic simple groups. *Arch. Math. (Brno)*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 83–94.
19. Lucido M.S. Prime graph components of finite almost simple groups. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 1999, vol. 102, pp. 1–22; addendum *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 2002, vol. 107, pp. 189–190.
20. Mazurov V., Shi W. A note to the characterization of sporadic simple groups. *Algebra Colloq.*, 1998, vol. 5, no. 3, pp. 285–288.
21. Praeger C.E., Shi W.J. A characterization of some alternating and symmetric groups. *Comm. Algebra*, 1994, vol. 22, no. 5, pp. 1507–1530. doi: 10.1080/00927879408824920 .
22. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .

Received September 30, 2019
Revised November 19, 2019
Accepted November 21, 2019

Anatolii Semenovich Kondrat'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. S. Kondrat'ev. On the recognizability of sporadic simple groups Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL, and Co_3 by the Gruenberg–Kegel graph, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 79–87 .