ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.988.63, 517.965, 515.124.2, 512.562

ТЕОРЕМЫ О ВОЗМУЩЕНИЯХ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С РАССТОЯНИЕМ И В ПРОСТРАНСТВАХ С БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ[1]

С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела

Получены утверждения о существовании решений уравнений специального типа в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением. Полученные результаты обобщают известные теоремы о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений, о липшицевых возмущениях накрывающих отображений в метрических пространствах, а также теоремы о точках совпадения накрывающего и изотонного отображений, об антитонных возмущениях накрывающих отображений в частично упорядоченных пространствах. В первой части работы рассматривается отображение $F : X \times X \to Y$, где X — метрическое пространство, а в Y задано расстояние, удовлетворяющее лишь аксиоме тождества. Определены “ослабленные аналоги” понятий накрывания и липшицевости отображений из X в Y. В предположении, что F по первому аргументу является накрывающим, а по второму — липшицевым (в смысле данных в работе определений этих свойств), установлено существование решения x уравнения $F(x, x) = y$. Показано, что из этого утверждения выводятся условия существования точки совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующих из X в Y. Во второй части работы аналогичные результаты получены в случае, когда X — частично упорядоченное пространство, а на Y задано рефлексивное бинарное отношение (не являющееся ни транзитивным, ни антисимметричным). Определены “ослабленные аналоги” понятий упорядоченного накрывания и монотонности отображений из X в Y. В предположении, что F по первому аргументу является накрывающим, а по второму — антитонным (в смысле данных в работе определений этих свойств), установлено существование решения x уравнения $F(x, x) = y$. Из этого утверждения выведены условия существования точки совпадения накрывающего и изотонного отображений, действующих из X в Y. В третьей части установлена взаимосвязь полученных утверждений. А именно, доказано, что из теоремы о разрешимости операторного уравнения в пространствах с бинарным отношением следует аналогичная теорема в пространствах с расстоянием и соответственно утверждения о точках совпадения.

Ключевые слова: метрическое пространство, упорядоченное пространство, накрывающее отображение, липшицево отображение, монотонное отображение.

S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela. Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation.

Statements on the existence of solutions of special-type equations in spaces with a distance and in spaces with a binary relation are derived. The results obtained generalize the well-known theorems on coincidence points of a covering and a Lipschitz mappings and on Lipschitz perturbations of covering mappings in metric spaces as well as the theorems on coincidence points of a covering and an isotonic mappings and on antitone perturbations of covering mappings in partially ordered spaces. In the first part of the paper, we consider a mapping $F: X \times X \to Y$, where X is a metric space and Y is equipped with a distance satisfying only the identity axiom. “Weakened analogs” of the notions of covering and Lipschitz mappings from X to Y are defined. Under the assumption that F is covering in the first argument and Lipschitz in the second argument (in the sense of the definitions of these properties given in the paper), the existence of a solution x to the equation $F(x, x) = y$ is established. It is shown that this statement yields conditions for the existence of a coincidence point of a covering and a Lipschitz mappings acting from X to Y. In the second part of the paper, similar results are obtained in the case when X is a partially ordered space and Y is equipped with a reflexive binary relation (which is neither transitive nor antisymmetric). “Weakened analogs” of the notions of ordered covering and monotonicity of mappings from X to Y are defined. Under the assumption that F is covering in the first argument and antitone in the second argument (in the sense of the definitions of these properties given in the paper), the existence of a solution x to the equation $F(x, x) = y$ is established and conditions for the existence of a coincidence point of a covering and an isotone mappings acting from X to Y are deduced from this statement. In the third part, a connection between the obtained statements is established. Namely, it is proved that the theorem on the solvability of an operator equation in spaces with a binary relation implies a similar theorem in spaces with a distance and, accordingly, the statements on coincidence points.

Keywords: metric space, ordered space, covering mapping, Lipschitz mapping, monotone mapping.

MSC: 47J05, 54H25, 55M20, 47J25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-52-63

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00553, № 17-41-680975, № 17-51-12064.)

Введение

Утверждения о накрывающих отображениях позволяют исследовать разрешимость и получать оценки решений уравнений. Так, теорему Милютина [6] о липшицевых возмущениях накрывающих отображений можно трактовать как утверждение о решениях уравнения

$$\psi(x) - \varphi(x) = y,$$

в котором отображения ψ, φ действуют из метрического пространства X в линейное метрическое пространство Y, отображение ψ является α-накрывающим, а отображение φ — β-липшицевым, $\alpha > \beta$. Теорема Арутюнова [2] о точке совпадения α-накрывающего и β-липшицева отображений ψ, φ, действующих в метрических пространствах, установливает разрешимость уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x). \tag{0.1}$$

В работе [1] получена теорема о липшицевом возмущении накрывающего отображения, позволяющая исследовать уравнение

$$G(x) := F(x, x) = \widehat{y} \tag{0.2}$$

в случае, когда отображение $F : X \times X \to Y$ по первому аргументу является α-накрывающим, а по второму — β-липшицевым. В [12] определено понятие накрывания для отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах и доказаны утверждения о точках совпадения упорядоченно накрывающего и изотонного отображений. В этой статье также показано, что результаты о точках совпадения в упорядоченных пространствах являются более общими, чем соответствующие теоремы в метрических пространствах. Для исследования точек совпадения отображений метрических пространств можно в этих пространствах определить порядок Бишопа — Фелпса, а затем по заданным накрывающему и липшицеву отображениям определить соответствующие упорядоченно накрывающее и изотонное отображения, действующие в полученных упорядоченных пространствах. В [7] доказана теорема об антитонном возмущении упорядоченно накрывающего отображения, позволившая исследовать уравнение (0.2) в частично упорядоченных пространствах.

В последнее время исследователей заинтересовала возможность распространения на пространства с обобщенными метриками теорем о накрывающих отображениях. Эта проблема имеет не только чисто теоретическое значение, ее решение востребовано также в приложениях. Подобные результаты позволяют, в частности, исследовать некоторые модели биологии, задачи математической физики, сводящиеся к сингулярным системам, импульсным системам и др., которые удобнее формализовать в виде уравнений в пространствах, наделенных не метрикой, а расстоянием (например, принимающим значения в конусе некоторого банахова пространства, являющимся несимметричным или не удовлетворяющим неравенству треугольника). В [3] рассмотрена задача о точке совпадения в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. На векторные метрические пространства теоремы о точках совпадения распространены в работе [8], теоремы о липшицевых возмущениях накрывающих отображений — в [9]. В [10] были получены утверждения о точках совпадения отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим только аксиоме тождества. В [4] рассмотрены точки совпадения отображений, определенных на упорядоченном пространстве, со значениями в пространстве с рефлексивным бинарным отношением.

Здесь мы докажем теоремы о возмущениях накрывающих отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, и теоремы о возмущениях накрывающих отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в пространство с рефлексивным бинарным отношением. Эти утверждения были анонсированы в [5]. Также будет доказано, что из теоремы о разрешимости уравнения (0.2) в пространствах с бинарным отношением следуют аналогичная теорема о пространствах с расстоянием и утверждения о точках совпадения. Эти результаты авторы планируют в дальнейшем применить к исследованию некоторых классов дифференциальных уравнений (в том числе с несуммируемыми особенностями), которые могут быть записаны в виде (0.2), где оператор F действует из произведения Лебеговых пространств в пространство измеримых функций и, если в пространстве измеримых функций определить специальное расстояние, оператор F оказывается по первому аргументу накрывающим, а по второму — липшицевым.

1. Теорема о липшицевом возмущении накрывающего отображения в пространствах с расстоянием

Пусть $X = (X, \rho)$ — метрическое пространство, $Y \neq \varnothing$, $d : Y \times Y \to \mathbb{R}_+$ — расстояние в Y, т. е. для $y_1, y_2 \in Y$ равенства $d(y_1, y_2) = 0$ и $y_1 = y_2$ равносильны (важно, что отображение d не обязано быть симметричным и удовлетворять неравенству треугольника). Обозначим $B_X(x_0, r) := \{x \in X \,|\, \rho(x_0, x) \leq r\}$, $B_Y(y_0, R) := \{y \in Y \,|\, d(y_0, y) \leq R\}$ (здесь $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $r, R \geq 0$). В Y определим *сходимость*, полагая $y_i \to y$, если $d(y, y_i) \to 0$. Отметим, что при этом $d(y_i, y)$ может не сходиться к 0, а предел y может быть не единственным.

Приведем вначале предложенные в [10] распространения некоторых определений, ранее известных для отображений метрических пространств, на отображения, действующие из (X, ρ) в (Y, d). Отображение $f : X \to Y$ называется
замкнутым, если

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \ \forall \{x_n\} \subset X \ \ x_n \to x, \quad f(x_n) \to y \ \Rightarrow \ f(x) = y;$$

α-накрывающим, $\alpha > 0$, если

$$\forall u \in X \ \forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ f(x) = y, \quad \rho(x, u) \leq \frac{1}{\alpha} d(y, f(u));$$

β-липшицевым, $\beta \geq 0$, если

$$\forall u, x \in X \ \forall y \in Y \ \ f(x) = y \ \Rightarrow \ d(y, f(u)) \leq \beta \rho(x, u).$$

Если оба пространства X, Y метрические, то приведенные определения совпадают с классическими определениями замкнутости, накрывания и липшицевости (см. [2]).

В [10] получены условия существования точки совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ — решения уравнения (0.1).

Теорема 1 [10, теорема 2.1]. *Пусть $\alpha > \beta \geq 0$, метрическое пространство X является полным и выполнены следующие условия: отображение ψ является α-накрывающим и замкнутым; отображение φ является β-липшицевым. Тогда множество точек совпадения отображений ψ, φ непусто и, кроме того,*

$$\forall x_0 \in X \ \exists \widehat{x} \in X \ \ \psi(\widehat{x}) = \varphi(\widehat{x}), \quad \rho(\widehat{x}, x_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} d(\psi(x_0), \varphi(x_0)).$$

В случае, если расстояние d является “обычной метрикой” в Y, приведенное утверждение совпадает с теоремой Арутюнова [2].

Отметим, что для используемого в теореме 1 свойства замкнутости f необходимо выполнение следующего условия: для любой сходящейся последовательности аргументов $x_n \to x$, если последовательность их образов тоже сходится: $f(x_n) \to y$, то ее предел $y \in Y$ должен быть единственным. Таким образом, предположение о замкнутости f накладывает еще и ограничения на пространство Y. Используемые ниже в теореме о разрешимости операторного уравнения предположения менее обременительны, чем в теореме 1, в частности, единственность предела в пространстве Y не требуется. Мы также ослабляем предположения о накрывании и липшицевости соответствующих отображений. А именно, для отображения $f : X \to Y$ определим следующие множества:

$$\mathrm{Cl}[f] := \big\{(x,y) \in X \times Y \,|\, \forall \{x_n\} \subset X \ x_n \to x, \ f(x_n) \to y \Rightarrow f(x) = y\big\};$$
$$\mathrm{Cov}_\alpha[f] := \big\{(u,y) \in X \times Y \,|\, \exists x \in X \ f(x) = y, \ \rho(x,u) \le \alpha^{-1} d(y, f(u))\big\};$$
$$\mathrm{Lip}_\beta[f] := \big\{(u,y) \in X \times Y \,|\, \forall x \in X \ f(x) = y \Rightarrow d(y, f(u)) \le \beta \rho(x,u)\big\}.$$

Очевидно, соотношение $\mathrm{Cl}[f] = X \times Y$ равносильно тому, что отображение f замкнуто, соотношение $\mathrm{Cov}_\alpha[f] = X \times Y$ означает, что отображение f является α-накрывающим, а соотношение $\mathrm{Lip}_\beta[f] = X \times Y$ справедливо тогда и только тогда, когда f липшицево с коэффициентом β.

Рассматриваемое здесь множество $\mathrm{Cov}_\alpha[f]$ аналогично определенному в [11] *множеству метрической регулярности* отображений, действующих в пространствах с векторной метрикой (частным случаем которых являются “обычные метрические” пространства).

Пусть заданы элемент $\widehat{y} \in Y$ и отображение $F : X \times X \to Y$. Это отображение как отображение первого аргумента при фиксированном втором аргументе $x \in X$ обозначаем символом $F(\cdot, x)$; аналогично через $F(x, \cdot)$ обозначаем отображение второго аргумента. Сформулируем условия разрешимости уравнения (0.2).

Теорема 2. *Пусть метрическое пространство X является полным, $x_0 \in X$, $\alpha > \beta \ge 0$. Предположим, что для любого $x \in B_X(x_0, R)$, где $R = (\alpha - \beta)^{-1} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0))$, выполнены включения*

$$(x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x)], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot)], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G].$$

Тогда существует решение $\widehat{x} \in B_X(x_0, R)$ уравнения (0.2).

Доказательство. Если x_0 является решением уравнения (0.2), то утверждение теоремы справедливо. Поэтому будем предполагать, что x_0 не удовлетворяет уравнению (0.2). Докажем, что существует последовательность $\{x_n\}$, для которой при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнены условия

$$F(x_n, x_{n-1}) = \widehat{y}, \quad \rho(x_n, x_0) \le \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)), \quad d(\widehat{y}, F(x_n, x_n)) \le \beta \rho(x_n, x_{n-1}). \quad (1.3)$$

Для доказательства используем метод математической индукции.

Сначала проверим соотношения (1.3) при $n = 1$. Очевидно, $x_0 \in B_X(x_0, \widehat{R})$, поэтому согласно условиям теоремы справедливо включение $(x_0, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_0)]$. Это означает существование элемента $x_1 \in X$ такого, что

$$F(x_1, x_0) = \widehat{y} \ \text{ и } \ \rho(x_1, x_0) \le \frac{1}{\alpha} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) < R.$$

Так как $x_1 \in B_X(x_0, R)$, имеем $(x_1, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_1, \cdot)]$; таким образом, справедливо неравенство

$$d(\widehat{y}, F(x_1, x_1)) \le \beta \rho(x_1, x_0).$$

Итак, для $n = 1$ соотношения (1.3) выполнены.

Предположим, что соотношения (1.3) справедливы для всех натуральных $n \le k$. Докажем, что соотношения (1.3) верны при $n = k + 1$. Поскольку

$$\rho(x_k, x_0) \le \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha^k(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) < R,$$

в силу предположений теоремы имеем $(x_k, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_k)]$ и $(x_k, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_k, \cdot)]$. Следовательно, существует элемент x_{k+1}, для которого $F(x_{k+1}, x_k) = \widehat{y}$ и

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \le \frac{1}{\alpha} d\big(\widehat{y}, F(x_k, x_k)\big) = \frac{1}{\alpha} d\big(F(x_k, x_{k-1}), F(x_k, x_k)\big) \le \frac{\beta}{\alpha} \rho\big(x_k, x_{k-1}\big).$$

Так как аналогичное соотношение $\rho(x_{n+1}, x_n) \le \alpha^{-1}\beta\rho\big(x_n, x_{n-1}\big)$ справедливо при любом натуральном $n < k$, получаем

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \le \frac{\beta^k}{\alpha^k}\rho(x_1, x_0) \le \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Теперь в силу предположения индукции заключаем

$$\rho(x_0, x_{k+1}) \le \rho(x_0, x_k) + \rho(x_k, x_{k+1}) \le \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha^k(\alpha-\beta)} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) + \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big)$$

$$= \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}(\alpha-\beta)} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Очевидно, $x_{k+1} \in B_X(x_0, R)$, и поэтому выполнено включение $(x_{k+1}, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_{k+1}, \cdot)]$, которое гарантирует, что

$$d(\widehat{y}, F(x_{k+1}, x_{k+1})) \le \beta\rho(x_{k+1}, x_k).$$

Итак, для $n = k+1$ все соотношения (1.3) выполнены.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. При любых натуральных n, m, $n < m$ имеем

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{m-1}, x_m)$$
$$\le \frac{1}{\alpha}\sum_{i=n}^{m-1}\frac{\beta^i}{\alpha^i} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big) \le \frac{\beta^n}{\alpha^n}\frac{1}{\alpha-\beta} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$, если определить

$$N = \log_{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\varepsilon(\alpha-\beta)}{d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big)},$$

то при всех n, m, $m > n > N$ будет выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset B_X(x_0, R)$ в полном пространстве X сходится к некоторой точке $\widehat{x} \in B_X(x_0, R)$. Из последнего в (1.3) неравенства $d\big(\widehat{y}, F(x_n, x_n)\big) \le \beta\rho(x_{n+1}, x_n)$ следует сходимость $d\big(\widehat{y}, F(x_n, x_n)\big) \to 0$, т. е. $G(x_n) \to \widehat{y}$. А так как имеет место включение $(x_n, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G]$, получим $G(\widehat{x}) = \widehat{y}$. □

Важно, что *из теоремы* 2 *может быть выведена теорема* 1. Для этого следует определить отображение $F : X \times X \to \mathbb{R}$, $F(x, u) := d\big(\psi(x), \varphi(u)\big)$, $x, u \in X$, и рассмотреть уравнение

$$F(x, x) := d\big(\psi(x), \varphi(x)\big) = 0. \tag{1.4}$$

Легко проверить, что из α-накрывания отображения ψ следует, что при любом $x \in X$ выполнено включение $(x, 0) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x)]$, а из β–липшицевости отображения φ — включение $(x, 0) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot)]$. Поэтому в условиях теоремы 1 для уравнения (1.4) при любом $x_0 \in X$ выполнены предположения теоремы 2.

Конечно, теорема 2 применима к исследованию точек совпадения отображений, определенных на метрическом пространстве и действующих не только в пространство с расстоянием, но и в пространство с "обычной" метрикой; таким образом из теоремы 2 может быть выведена теорема Арутюнова [2]. Отметим, что связь между уравнениями (0.1) и (0.2) до сих пор оставалась незамеченной, утверждения о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений и утверждения о липшицевом возмущении накрывающего отображения считались независимыми.

2. Теорема об антитонном возмущении накрывающего отображения в пространствах с бинарным отношением

Пусть теперь $X = (X, \le)$ — частично упорядоченное пространство, а на множестве $Y \ne \varnothing$ определено бинарное отношение ω, являющееся рефлексивным (т. е. для любого $y \in Y$ выполнено $(y, y) \in \omega$). Для элементов $u, v \in X$ определим множества $\mathcal{O}_X(u) := \{x \in X : x \le u\}$, $[v, u]_X := \{x \in X : v \le x \le u\}$.

На отображения, действующие из $(X, \le)$ в (Y, ω), в работе [4] были распространены определения, используемые для отображений частично упорядоченных пространств, в том числе предложенное в [12] определение свойства упорядоченного накрывания. Приведем эти определения. Отображение $f : X \to Y$ называется
(*упорядоченно*) *накрывающим*, если

$$\forall u \in X \ \forall y \in Y \quad (y, f(u)) \in \omega \ \Rightarrow \ \exists x \in X \quad f(x) = y, \quad x \le u;$$

изотонным, если

$$\forall u, x \in X \quad u \le x \ \Rightarrow \ (f(u), f(x)) \in \omega;$$

антитонным, если

$$\forall u, x \in X \quad u \le x \ \Rightarrow \ (f(x), f(u)) \in \omega.$$

Если оба пространства X, Y частично упорядочены (т. е. отношение ω есть частичный порядок), то приведенные определения совпадают с классическими определениями свойств накрывания, изотонности и антитонности (см. [12]).

В [4] получены следующие условия существования решения уравнения (0.1) — точки совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$.

Определим совокупность $\Pi := \Pi(\psi, \varphi)$ всех цепей $S \subset X$, удовлетворяющих условию

$$\forall x \in S \quad \big(\varphi(x), \psi(x)\big) \in \omega \quad \text{и} \quad \forall x, u \in S \quad x < u \ \Rightarrow \ \big(\psi(x), \varphi(u)\big) \in \omega. \tag{2.1}$$

Теорема 3 [4, теорема 1.1]. *Пусть для некоторого элемента $x_0 \in X$ имеет место соотношение $\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) \in \omega$ и любая цепь $S \subset \Pi$, содержащая x_0, имеет нижнюю границу $v \in X$, для которой $\big(\varphi(v), \psi(v)\big) \in \omega$. Предположим также, что отображение ψ является накрывающим, а отображение φ — изотонным. Тогда существует точка совпадения $\widehat{x} \in \mathcal{O}_X(x_0)$ отображений ψ, φ.*

В случае, если отношение ω является еще и антисимметричным и транзитивным, т. е. Y — частично упорядоченное пространство, теорема 3 совпадает с теоремой о точках совпадения, полученной в [12].

Далее мы покажем, что утверждения о разрешимости операторных уравнений, в том числе о существовании точек совпадения, могут быть получены при более слабых предположениях. С этой целью для произвольного отображения $f : X \to Y$ определим множества

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y \,|\, (y, f(u)) \in \omega \ \Rightarrow \ \exists x \in X \ f(x) = y, \ x \le u\big\};$$
$$\mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y \,|\, \forall x \in X \ f(x) = y, \ u \le x \ \Rightarrow \ (y, f(u)) \in \omega\big\}.$$

Множеству $\mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[f]$ принадлежат, например, все пары (u, y) такие, что $(y, f(u)) \notin \omega$. Отметим, что соотношение $\mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[f] = X \times Y$ равносильно упорядоченному накрыванию отображения f, а соотношение $\mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[f] = X \times Y$ — антитонности отображения f.

Приведенное определение множества $\mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[f]$ аналогично данному в [7] определению *множества упорядоченного накрывания* отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в частично упорядоченное пространство.

Пусть заданы $\widehat{y} \in Y$ и отображение $F : X \times X \to Y$. Определим совокупность $\Xi := \Xi(F, \widehat{y})$ всех цепей $S \subset X$, удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} &\forall x \in S \quad \big(\widehat{y}, F(x, x)\big) \in \omega, \\ &\forall x, u \in S \quad x < u \ \Rightarrow \ \exists \zeta \in [x, u]_X \quad \big(\widehat{y}, F(\zeta, \zeta)\big) \in \omega, \quad F(x, \zeta) = \widehat{y}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Теорема 4. *Пусть существует элемент* $x_0 \in X$ *такой, что* $\big(\widehat{y}, F(x_0,x_0)\big) \in \omega$, *и любая цепь* $S \subset \Xi$, *содержащая* x_0, *имеет нижнюю границу* $v \in X$, *для которой* $\big(\widehat{y}, F(v,v)\big) \in \omega$. *Предположим также, что для любого* $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *справедливы включения*

$$(x,\widehat{y}) \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[F(\cdot,x)], \quad (x,\widehat{y}) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[F(x,\cdot)].$$

Тогда существует решение $\widehat{x} \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *уравнения* (0.2).

Доказательство. Определим множество

$$U = \{x \in \mathcal{O}_X(x_0) |\ \big(\widehat{y}, F(x,x)\big) \in \omega\}.$$

Это множество непусто, поскольку $x_0 \in U$. На множестве U определим бинарное отношение $\preceq$ следующим соотношением

$$\forall x,u \in U \quad x \preceq u \ \Leftrightarrow \ x \le u \ \text{ и } \ \big(x < u \ \Rightarrow \ \exists \zeta \in [x,u]_U \quad F(x,\zeta) = \widehat{y}\,\big)$$

(естественно, в случае $x \preceq u$, $x \neq u$ будем писать $x \prec u$). Очевидно, что отношение $\preceq$ является порядком и обладает следующим свойством, более “сильным”, чем транзитивность:

$$z \prec x, \quad x \le u \ \Rightarrow \ z \prec u. \tag{2.3}$$

Из определения пространства $(U,\preceq)$ следует, что цепь относительно порядка $\preceq$ является также цепью относительно порядка $\le$, более того, удовлетворяет соотношениям (2.2). В пространстве $(U,\preceq)$ согласно принципу максимума Хаусдорфа существует максимальная цепь S, содержащая точку x_0. Поскольку $S \in \Xi$, в силу предположений теоремы цепь S относительно первоначального порядка $\le$ имеет нижнюю границу $v \in \mathcal{O}_X(x_0)$, для которой выполнено соотношение $\big(\widehat{y}, F(v,v)\big) \in \omega$, т. е. $v \in U$. Покажем, что эта нижняя граница v является решением уравнения (0.2). Предположим противное: $F(v,v) \neq \widehat{y}$.

В силу соотношения $(v,\widehat{y}) \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[F(\cdot,v)]$ существует элемент $\widehat{x} \in O_X(v)$ такой, что выполнено равенство

$$F(\widehat{x},v) = \widehat{y}. \tag{2.4}$$

В этом равенстве $\widehat{x} \neq v$ (так как $F(v,v) \neq \widehat{y}$), поэтому $\widehat{x} < v$. Из (2.4) в силу соотношения $(\widehat{x},\widehat{y}) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[F(\widehat{x},\cdot)]$ получаем $\big(\widehat{y}, F(\widehat{x},\widehat{x})\big) \in \omega$. Таким образом, доказано, что $\widehat{x} \in U$ и $\widehat{x} \prec v$. Поэтому согласно свойству (2.3) для любого $x \in S$ имеет место неравенство $\widehat{x} \prec x$. Так как цепь S является максимальной в U относительно порядка $\preceq$, элемент $\widehat{x}$ должен принадлежать этой цепи. Но тогда неравенство $\widehat{x} \prec v$ противоречит тому, что v — нижняя граница этой цепи.

Итак, предположение $F(v,v) \neq \widehat{y}$ неверно, т. е. элемент $\widehat{x} = v$ является решением уравнения (0.2). □

Продемонстрируем, каким образом *из теоремы* 4 *выводится теорема* 3 *о точках совпадения.* С этой целью зададим на трехэлементном множестве $Z = \{0,-1,1\}$ бинарное отношение

$$\omega_Z := \big\{(0,0), (-1,-1), (1,1), (0,1)\big\}$$

и определим отображение $\eta : Y \times Y \to Z$ формулой

$$(y,v) \in Y \times Y \ \mapsto \ \eta(y,v) = \begin{cases} \ \ 0, & \text{если } y = v, \\ \ \ 1, & \text{если } (v,y) \in \omega, \ v \neq y, \\ -1, & \text{если } (v,y) \notin \omega. \end{cases}$$

Теперь определим отображение $F : X \times X \to Z$, $F(x,u) := \eta\big(\psi(x), \varphi(u)\big)$, $x,u \in X$, и рассмотрим уравнение

$$F(x,x) := \eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big) = 0. \tag{2.5}$$

Очевидно, что решение уравнения (2.5) является точкой совпадения отображений ψ, φ. Покажем, что если для отображений ψ, φ выполнены условия теоремы 3, то существование решения уравнения (2.5) следует из теоремы 4.

Итак, предположения теоремы 3 считаем выполненными. Проверяем справедливость условий теоремы 4.

Во-первых, пусть $\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) \in \omega$, тогда $\eta\big(\psi(x_0), \varphi(x_0)\big)$ равно 1 или 0, следовательно,

$$\big(0, \eta\big(\psi(x_0), \varphi(x_0)\big) \in \omega_Z.$$

Во-вторых, пусть любая цепь $S \subset \Pi$, содержащая x_0, имеет нижнюю границу $v \in X$ такую, что $\big(\varphi(v), \psi(v)\big) \in \omega$. Выберем произвольную цепь $\mathcal{C} \in \Xi$, ее любой элемент $x \in \mathcal{C}$ удовлетворяет условию $\big(0, \eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big)\big) \in \omega_Z$. Это условие означает, что $\eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big)$ равно 0 или 1, т. е. это условие равносильно соотношению $\big(\varphi(x), \psi(x)\big) \in \omega$. Далее, для любых двух элементов $x, u \in \mathcal{C}$ таких, что $x < u$, существует элемент $\zeta \in [x, u]_X$, удовлетворяющий условиям

$$\big(0, \eta(\psi(\zeta), \varphi(\zeta))\big) \in \omega_Z, \quad \eta\big(\psi(x), \varphi(\zeta)\big) = 0.$$

Отсюда $\psi(x) = \varphi(\zeta)$, и вследствие изотонности отображения φ получаем $\big(\psi(x), \varphi(u)\big) \in \omega$. Таким образом, цепь $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям (2.1), поэтому цепь $\mathcal{C} \in \Pi$ имеет нижнюю границу $v \in X$, для которой $\big(\varphi(v), \psi(v)\big) \in \omega$. Следовательно, $\big(0, \eta(\varphi(v), \psi(v))\big) \in \omega_Z$.

Заключая проверку условий теоремы 4, замечаем, что если отображение ψ накрывающее, то при любом $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ для отображения $\eta(\psi(\cdot), \varphi(x)) : X \to Z$ выполнено включение $\big(0, x\big) \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}\big[\eta(\psi(\cdot), \varphi(x))\big]$, а если отображение φ изотонное, то при любом $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ для отображения $\eta(\psi(x), \varphi(\cdot)) : X \to Z$ справедливо $\big(0, x\big) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}\big[\eta((\psi\cdot), \varphi(x))\big]$.

Итак, теорема 4 позволяет исследовать задачу о точках совпадения отображений, действующих из $(X, \le)$ в (Y, ω), где ω — произвольное бинарное отношение, а в частном случае — отношение порядка. Таким образом, из теоремы 4 может быть получена не только [4, теорема 1.1], но и [12, Theorem 1].

3. Связь между теоремами о возмущениях в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением

Как показано выше, теоремы 2, 4 позволяют исследовать не только разрешимость уравнения (0.2), но и устанавливать существование точки совпадения отображений, действующих соответственно в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением. Здесь мы докажем, что *теорема* 2 *является следствием теоремы* 4. Таким образом, из результатов, касающихся уравнения (0.2) в пространствах с бинарным отношением, следуют утверждения и об этом уравнении, и о точках совпадения в случае пространств с расстоянием. Отметим, что в работе [12] было доказано, что из теоремы о точках совпадения упорядоченно накрывающего и изотонного отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах, выводится теорема о точке совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующих в метрических пространствах. Доказательство этого результата основывалось на введении в метрических пространствах порядка Бишопа — Фелпса и определении по заданным действующим в метрических пространствах двум отображениям — α-накрывающему и β-липшицеву — двух новых отображений, действующих в полученных частично упорядоченных пространствах соответственно упорядоченно накрывающего и изотонного. Здесь используется такой же подход — в пространстве с расстоянием вводится бинарное отношение, аналогичное порядку Бишопа — Фелпса.

Итак, пусть выполнены условия теоремы 2. В декартовом произведении $\overline{X}$ метрического пространства $X = (X, \rho)$ и множества $\mathbb{R}_+$ неотрицательных чисел определим порядок Бишопа — Фелпса (см. [13; 14]), полагая для произвольных $(u, r), (x, R) \in \overline{X}$ выполненным неравенство $(u, r) \le (x, R)$ тогда и только тогда, когда

$$\rho(u, x) \le R - r.$$

Согласно [12, Lemma 3] из полноты метрического пространства X следует, что пространство $\overline{X}$ является упорядоченно полным, т. е. всякая цепь в нем имеет точную нижнюю границу.

Аналогично в декартовом произведении $\overline{Y}$ пространства $Y = (Y, d)$ и пространства $\mathbb{R}$ определим бинарное отношение ω следующим образом:

$$\forall (z,r),(y,R) \in \overline{Y} \quad \big((z,r),(y,R)\big) \in \omega \ \Leftrightarrow \ d(z,y) \le R - r$$

(напомним, что расстояние d не обязано быть симметричным, т. е. при выполнении этого соотношения "симметричное неравенство" $d(y,z) \le R - r$ может не выполняться).

Теперь по заданному отображению $F : X \times X \to Y$ построим отображение

$$\overline{F} : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{Y}, \quad \overline{F}\big((x,R),(u,r)\big) := \big(F(x,u), \alpha R - \beta r\big)$$

и рассмотрим уравнение

$$\overline{F}(\overline{x}, \overline{x}) = (\widehat{y}, 0) \tag{3.1}$$

относительно неизвестного $\overline{x} = (x, r) \in \overline{X}$. Легко видеть, что пара $(\widehat{x}, \widehat{r})$ является решением этого уравнения тогда и только тогда, когда ее вторая компонента $\widehat{r} = 0$, а ее первая компонента есть решение уравнения (0.2).

Установим разрешимость уравнения (3.1) на основании теоремы 4.

Для заданных в теореме 2 элемента $x_0 \in X$ и числа $R = (\alpha - \beta)^{-1} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0))$ обозначим $\overline{x}_0 = (x_0, R) \in \overline{X}$. Имеем

$$\overline{F}(\overline{x}_0, \overline{x}_0) = \big(F(x_0,x_0), (\alpha-\beta)R\big) = \big(F(x_0,x_0), d(\widehat{y}, F(x_0,x_0))\big),$$

следовательно,

$$\big((\widehat{y},0), \overline{F}(\overline{x}_0, \overline{x}_0)\big) \in \omega.$$

Рассмотрим цепь $S \subset \overline{X}$, содержащую точку $\overline{x}_0$ (поэтому без ограничения общности можем полагать, что цепь S вложена в множество $\mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{x}_0) := \{(x,r) \,|\, \rho(x,x_0) \le R - r\}$). Пусть для этой цепи выполнено $S \in \Xi(\overline{F}, (\widehat{y}, 0))$. Любой элемент $\overline{x} = (x, r) \in S$ удовлетворяет соотношению

$$\big((\widehat{y},0), \big((\alpha-\beta)r, F(x,x)\big)\big) \in \omega \ \Leftrightarrow \ d\big(\widehat{y}, F(x,x)\big) \le (\alpha-\beta)r. \tag{3.2}$$

Вследствие упорядоченной полноты пространства $\overline{X}$ существует $\overline{v} = (v, \tau) = \inf S$. Если $\overline{v} \in S$, то $\big((\widehat{y},0), \big((\alpha-\beta)\tau, F(v,v)\big)\big) \in \omega$. Пусть $\overline{v} \notin S$. Согласно [12, Lemma 3] существует такая невозрастающая последовательность элементов $\overline{x}_i = (x_i, r_i) \in S$, что $\tau = \inf r_i$, $v = \lim_{i\to\infty} x_i$. Согласно определению совокупности $\Xi(\overline{F}, (\widehat{y}, 0))$ для этой последовательности имеем

$$\exists \overline{\zeta}_i = (\zeta_i, t_i) \in \overline{X} \quad \overline{x}_{i+1} \le \overline{\zeta}_i \le \overline{x}_i, \quad F(\overline{x}_{i+1}, \overline{\zeta}_i) = (\widehat{y}, 0).$$

Из полученных соотношений следует, что $\alpha r_{i+1} - \beta t_i = 0$ и $t_i \le r_i$. Поэтому справедлива оценка

$$r_{i+1} = \frac{\beta}{\alpha} t_i \le \frac{\beta}{\alpha} r_i.$$

Таким образом, последовательность $\{r_i\}$ сходится к нулю, т. е. $\tau = 0$. Теперь из соотношения (3.2) получаем $d\big(\widehat{y}, F(x_i,x_i)\big) \le (\alpha-\beta)r_i \to 0$. А из этого соотношения и сходимости $x_i \to v$ следует $F(v,v) = \widehat{y}$, так как $(x_i, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G]$. Итак, для нижней границы $\overline{v} = (v, 0)$ цепи $S \in \Xi(\overline{F}, (\widehat{y}, 0))$ выполнено $\big((\widehat{y},0), \overline{F}(\overline{v}, \overline{v})\big) \in \omega$. Здесь $\overline{F}(\overline{v}, \overline{v}) = \big(F(v,v), 0\big)$.

Теперь покажем, что для произвольного элемента $\overline{u} = (u, r) \in \mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{x}_0)$ (т. е. удовлетворяющего неравенству $\rho(x_0, u) \le R - r$) выполнено включение $(\overline{u}, (\widehat{y}, 0)) \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[\overline{F}(\cdot, \overline{u})]$. Пусть $\big((\widehat{y},0), \big((\alpha-\beta)r, F(u,u)\big)\big) \in \omega$, т. е. выполнено неравенство $d(\widehat{y}, F(u,u)) \le (\alpha-\beta)r$. Так как $(u, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, u)]$, существует $x \in X$ такой, что

$$F(x,u) = \widehat{y}, \quad \rho(x,u) \le \frac{1}{\alpha} d(\widehat{y}, F(u,u)) \le \frac{\alpha-\beta}{\alpha} r.$$

Положим $\overline{x} = (x, \alpha^{-1}\beta r)$. Для этого элемента, очевидно, выполнено

$$\overline{F}(\overline{x}, \overline{u}) = (\widehat{y}, 0), \quad \overline{x} \le \overline{u},$$

и таким образом включение $(\overline{u}, (\widehat{y}, 0)) \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[\overline{F}(\cdot, \overline{u})]$ доказано.

Остается проверить справедливость включения $(\overline{u}, (\widehat{y}, 0)) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[\overline{F}(\overline{u}, \cdot)]$ при всех $\overline{u} = (u, r) \in \mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{x}_0)$. Пусть для $\overline{x} = (x, t) \in \overline{X}$ выполнено $\overline{F}(\overline{u}, \overline{x}) = (\widehat{y}, 0)$ и $\overline{u} \le \overline{x}$, т. е.

$$F(u, x) = \widehat{y}, \quad \alpha r - \beta t = 0, \quad \rho(u, x) \le t - r.$$

Так как $(u, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(u, \cdot)]$, получаем

$$d(\widehat{y}, F(u, u)) \le \beta\rho(x, u) \le \beta(t - r) = (\alpha - \beta)r,$$

а это означает, что выполнено соотношение $\big((\widehat{y}, 0), \overline{F}(\overline{u}, \overline{u})\big) \in \omega$. Таким образом, включение $(\overline{u}, (\widehat{y}, 0)) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[\overline{F}(\overline{u}, \cdot)]$ доказано.

Итак, согласно теореме 4 уравнение (3.1) имеет решение $(\widehat{x}, 0)$, первая компонента которого $\widehat{x} \in B_X(x_0, R)$ является решением уравнения (0.2). Таким образом, утверждение теоремы 2 действительно следует из теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.** Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 613–634.
2. **Арутюнов А.В.** Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. АН. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
3. **Арутюнов А.В., Грешнов А.В.** (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. математическая. 2018. Т. 82. № 2. С. 3–32. doi: 10.4213/im8546 .
4. **Бенараб С., Жуковский Е.С.** Об условиях существования точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Вест. Тамбов. ун-та. Серия: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 121. С. 10–16. doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-10-16 .
5. **Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В.** Распространение теорем о возмущениях накрывающих отображений // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Междунар. конф., посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2019. С. 67–71.
6. **Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.** Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35. № 6 (216). С. 11–46.
7. **Жуковский Е.С.** Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 1. С. 96–127.
8. **Жуковский Е.С.** О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Мат. заметки. 2016. Т. 100. № 3. С. 344–362. doi: 10.4213/mzm10675 .
9. **Жуковский Е.С.** О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 2. С. 297–311. doi: 10.17377/smzh.2016.57.206 .
10. **Мерчела В.** К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вест. Тамбов. ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 121. С. 65–73. doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73 .
11. **Плужникова Е.А., Жуковская Т.В., Моисеев Ю.А.** О множествах метрической регулярности отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вест. Тамбов. ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 123. С. 547–554. doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-547-554 .
12. **Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.** Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology Appl. 2015. Vol. 179, no. 1. P. 13–33. doi: 10.1016/j.topol.2014.08.013 .

13. **Bishop E., Phelps R.R.** The support functionals of a convex set // Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society. Vol. 7. P. 27–35. doi: 10.1142/9789814415514_0020 .
14. **DeMarr R.** Partially ordered spaces and metric spaces // Am. Math. Mon. 1965. Vol. 72, no. 6. P. 628–631. doi: 10.2307/2313852 .

Поступила 22.10.2019
После доработки 15.11.2019
Принята к публикации 18.11.2019

Бенараб Сарра
аспирант
Тамбовский гос. университет им. Г.Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

Жуковский Евгений Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор НИИ
Тамбовский гос. университет им. Г.Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: zukovskys@mail.ru

Мерчела Вассим
аспирант
Тамбовский гос. университет им. Г.Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: merchela.wassim@gmail.com

REFERENCES

1. Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S. Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative. *Differ. Equ.*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 627–649. doi: 10.1134/S0012266109050024 .
2. Arutyunov A.V. Covering mappings in metric spaces, and fixed points. *Dokl. Math.*, 2007, vol. 76, no. 2, pp. 665–668. doi: 10.1134/S1064562407050079 .
3. Arutyunov A.V., Greshnov A.V. (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 245–272. doi: 10.1070/IM8546 .
4. Benarab S., Zhukovskii E.S. On the conditions of existence coincidence points for mapping in partially ordered spaces. *Tambov University Reports.* Series: Natural and Technical Sciences, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 10–16. (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-10-16 .
5. Benarab S., Zhukovskii E.S., Merchela V. Some generalizations of overing mappings perturbation theorems. In: T. F. Filippova, V. I. Maksimov, A. M. Tarasyev (eds.), Stability, Control, Differential Games (SCDG2019): Proc. Internat. Conf. devoted to the 95th anniversary of Academician N.N. Krasovskii (Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019). Yekaterinburg, 2019, pp. 67–71 (in Russian).
6. Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Lyusternik's theorem and the theory of extrema. *Russian Math. Surveys*, 1980, vol. 35, no. 6, pp. 11–51. doi: 10.1070/RM1980v035n06ABEH001973 .
7. Zhukovskiy E.S. On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities. *St. Petersburg Math. J.*, 2019, vol. 30, no. 1, pp. 73–94. doi: 10.1090/spmj/1530 .
8. Zhukovskiy E.S. On Coincidence points of multivalued vector mappings of metric spaces. *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 3-4, pp. 363–379. doi: 10.1134/S0001434616090030 .
9. Zhukovskii E.S. Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 230–241. doi: 10.1134/S0037446616020063 .
10. Merchela W. On Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces. *Tambov University Reports.* Series: Natural and Technical Sciences, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 65–73 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73 .

11. Pluzhnikova E.A., Zhukovskaya T.V., Moiseev Yu.A. On sets of metric regularity of mappings in spaces with vector-valued metric. *Tambov University Reports.* Series: Natural and Technical Sciences, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 547–554 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-547-554 .
12. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*, 2015, vol. 179, no. 1, pp. 13–33. doi: 10.1016/j.topol.2014.08.013 .
13. Bishop E., Phelps R.R. The support functionals of a convex set. In: *Convexity.* Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, vol. 7, Providence: Amer. Math. Soc., 1963, pp. 27–35. doi: 10.1090/pspum/007/0154092 .
14. DeMarr R. Partially ordered spaces and metric spaces. *Am. Math. Mon.*, 1965, vol. 72, no. 6, pp. 628–631. doi: 10.2307/2313852 .

Received October 22, 2019
Revised November 15, 2019
Accepted November 18, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 17-01-00553, no. 17-41-680975, no. 17-51-12064).

Sarra Benarab, doctoral student, Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: benarab.sarraa@gmail.com .

Evgeny Semenovich Zhukovskiy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: zukovskys@mail.ru .

Wassim Merchela, doctoral student, Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: merchela.wassim@gmail.com .

Cite this article as: S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela. Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 52–63 .