ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.926.4

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЭФФЕКТА ПЕРРОНА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ К НУЛЮ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Е. А. Барабанов, В. В. Быков

Пусть $\mathcal{M}_n$ — множество линейных дифференциальных систем порядка n с непрерывными и ограниченными на временнóй полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами, $n \geqslant 2$. Показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}_n$ обозначаются через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, их спектр — через $\Lambda(A) = (\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$ и ее индекс экспоненциальной устойчивости (размерность линейного подпространства решений с отрицательными характеристическими показателями) — через $\mathrm{es}(A)$. Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и метрического пространства M рассматривается класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ непрерывных по совокупности переменных $(n\times n)$-матричнозначных функций $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих оценке $\|Q(t,\mu)\| \leqslant C_Q \exp(-\sigma_Q t)$ для всех $(t,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times M$, где C_Q и σ_Q — положительные постоянные (свои для каждой функции Q), и таких, что показатели Ляпунова системы $A+Q$, являющиеся функциями $\mu \in M$ и обозначаемые через $\lambda_1(\mu; A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu; A+Q)$, не меньше соответствующих показателей Ляпунова системы A, т. е. $\lambda_k(\mu; A+Q) \geqslant \lambda_k(A)$, $k = \overline{1,n}$, для любого $\mu \in M$. Ставится задача полного описания для каждых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M класса пар $\big(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\big)$, составленных из спектра $\Lambda(A) \in \mathbb{R}^n$ системы $A \in \mathcal{M}_n$ и из спектра $\Lambda(\cdot\,; A+Q)\colon M \to \mathbb{R}^n$ семейства $A+Q$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а матричнозначная функция Q при каждом A — класс $\mathcal{E}_n[A](M)$, т. е. класса $\Pi\mathcal{E}_n(M) = \{\big(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\big) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\}$. Решение задачи дает следующее утверждение: для любых натурального $n \geqslant 2$ и метрического пространства M пара $\big(l, F(\cdot)\big)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ и $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))\colon M \to \mathbb{R}^n$, тогда и только тогда принадлежит классу $\Pi\mathcal{E}_n(M)$, когда выполняются четыре условия: 1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$, 2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ для любого $\mu \in M$, 3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ для всех $i = \overline{1,n}$ и $\mu \in M$, 4) для любого $i = \overline{1,n}$ функция $f_i(\cdot)\colon M \to \mathbb{R}$ ограничена, и при каждом $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f_i^{-1}([r,+\infty))$ полуинтервала $[r,+\infty)$ является G_δ-множеством. Решение аналогичной задачи описания пар, составленных из индекса $\mathrm{es}(A) \in \{0, \ldots, n\}$ экспоненциальной устойчивости системы A и из индекса $\mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)\colon M \to \{0, \ldots, n\}$ экспоненциальной устойчивости семейства $A+Q$, т. е. класса $\mathcal{IE}_n(M) = \{\big(\mathrm{es}(A), \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)\big) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\}$, описывается утверждением: для любых натурального $n \geqslant 2$ и метрического пространства M пара $\big(d, f(\cdot)\big)$, где $d \in \{0, \ldots, n\}$ и $f\colon M \to \{0, \ldots, n\}$, принадлежит классу $\mathcal{IE}_n(M)$ тогда и только тогда, когда $f(\mu) \leqslant d$ для любого $\mu \in M$ и при каждом $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}((-\infty, r])$ полуинтервала $(-\infty, r]$ является G_δ-множеством.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, показатели Ляпунова, убывающие к нулю возмущения, классы Бэра.

E. A. Barabanov, V. V. Bykov. Description of the linear Perron effect under parametric perturbations exponentially vanishing at infinity.

Let $\mathcal{M}_n$ be the set of linear differential systems of order $n \geqslant 2$ whose coefficients are continuous and bounded on the time semiaxis $\mathbb{R}_+$. Denote by $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ the Lyapunov exponents of a system $A \in \mathcal{M}_n$, by $\Lambda(A) = (\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$ their spectrum, and by $\mathrm{es}(A)$ the exponential stability index of A (the dimension of the linear subspace of solutions with negative characteristic exponents). For a system $A \in \mathcal{M}_n$ and a metric space M, we consider the class $\mathcal{E}_n[A](M)$ of continuous $(n \times n)$ matrix-valued functions $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfying the bound $\|Q(t,\mu)\| \leqslant C_Q \exp(-\sigma_Q t)$ for all $(t,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times M$, where C_Q and σ_Q are positive constants (possibly different for each function Q), and such that the Lyapunov exponents of the system $A+Q$, which are functions of $\mu \in M$ and are denoted by $\lambda_1(\mu; A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu; A+Q)$, are not less than the corresponding Lyapunov exponents of the system A; i.e., $\lambda_k(\mu; A+Q) \geqslant \lambda_k(A)$, $k = \overline{1,n}$, for all $\mu \in M$. The problem is to obtain a complete description for each $n \in \mathbb{N}$ and each metric space M of the class of pairs $\big(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\big)$ composed of the spectrum $\Lambda(A) \in \mathbb{R}^n$ of a system $A \in \mathcal{M}_n$ and the spectrum $\Lambda(\cdot\,; A+Q)\colon M \to \mathbb{R}^n$ of a family $A+Q$, where A ranges over $\mathcal{M}_n$ and the matrix-valued function Q ranges over the class $\mathcal{E}_n[A](M)$ for each A, i.e., of the class $\Pi\mathcal{E}_n(M) = \{\big(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\big) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\}$. The solution of this problem is provided by the following statement: for each integer $n \geqslant 2$ and every metric space M, a pair $\big(l, F(\cdot)\big)$, where $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ and $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))\colon M \to \mathbb{R}^n$, belongs to the class $\Pi\mathcal{E}_n(M)$ if and only if the following conditions are met: (1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$, (2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ for all $\mu \in M$, (3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ for all $i = \overline{1,n}$ and $\mu \in M$, (4) for each $i = \overline{1,n}$, the function $f_i(\cdot)\colon M \to \mathbb{R}$ is bounded and, for any $r \in \mathbb{R}$, the preimage $f_i^{-1}([r,+\infty))$ of the half-interval $[r,+\infty)$ is a G_δ-set. The solution of the similar problem of describing the pairs composed of the exponential stability index $\mathrm{es}(A) \in \{0, \ldots, n\}$ of a system A and the exponential stability index $\mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)\colon M \to \{0, \ldots, n\}$ of a family $A+Q$, i.e., the class $\mathcal{IE}_n(M) = \{\big(\mathrm{es}(A), \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)\big) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\}$, is contained in the following statement: for any positive integer $n \geqslant 2$ and every metric space M, a pair $\big(d, f(\cdot)\big)$, where $d \in \{0, \ldots, n\}$ and $f\colon M \to \{0, \ldots, n\}$, belongs to the class $\mathcal{IE}_n(M)$ if and only if $f(\mu) \leqslant d$ for all $\mu \in M$ and, for any $r \in \mathbb{R}$, the preimage $f^{-1}((-\infty, r])$ of the half-interval $(-\infty, r]$ is a G_δ-set.

Keywords: linear differential system, Lyapunov exponents, perturbations vanishing at infinity, Baire classes.

MSC: 34D08, 34D10

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-31-43

Введение

Для заданного натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим множество линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с ограниченными и непрерывными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Обозначим через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ показатели Ляпунова [1, с. 27; 2, гл. III, §4] системы (1), через $\Lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$ — ее спектр, а через $\mathrm{es}(A)$ — индекс экспоненциальной устойчивости, т. е. размерность линейного пространства решений этой системы, имеющих отрицательные характеристические показатели. Далее мы отождествляем систему (1) с матричнозначной функцией $A(\cdot)$ и пишем $A \in \mathcal{M}_n$.

В работе [3] О. Перрон построил пример системы $A \in \mathcal{M}_2$ с отрицательными показателями Ляпунова, для которой существует такая непрерывная на полуоси (2×2)-матрица $Q(t)$, экспоненциально убывающая к нулю на бесконечности, что старший показатель Ляпунова $\lambda_2(A+Q)$ возмущенной системы $(A+Q) \in \mathcal{M}_2$ положителен (в частности, $\lambda_2(A+Q) > \lambda_2(A)$), а младший $\lambda_1(A+Q)$ совпадает с показателем $\lambda_1(A)$ невозмущенной системы. Таким образом, в примере Перрона индекс экспоненциальной устойчивости исходной системы равен двум, а возмущенной — единице, т. е. имеет место потеря устойчивости. О. Перроном [4] построен также пример системы $A \in \mathcal{M}_2$ с отрицательными показателями Ляпунова и такого ее определенного в произведении $\mathbb{R}_+ \times G$ (G — окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$) непрерывного по совокупности переменных возмущения $f(t,x)$ высшего порядка малости (т. е. $\|f(t,x)\| \leqslant \mathrm{const}\|x\|^m$, $m = \mathrm{const} > 1$), что показатель Ляпунова любого имеющего в начальный момент $t = 0$ ненулевую первую компоненту решения возмущенной системы $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ больше некоторого положительного числа, а показатель Ляпунова решений с нулевой в начальный момент первой компонентой — тот же, что и у невозмущенной линейной системы.

Эти примеры Перрона послужили отправной точкой многочисленных исследований влияния различных классов линейных и нелинейных возмущений на показатели Ляпунова систем из $\mathcal{M}_n$, а результаты, полученные в этом направлении, составляют существенную часть современной теории показателей Ляпунова. Эффект изменения значений показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}_n$ при тех или иных "малых" ее возмущениях назван в монографии [5, гл. 4] эффектом Перрона. Позднее, начиная с работы [6], это название — эффект Перрона — было усвоено только той ситуации (ее, формально говоря, и рассмотрел О. Перрон), при которой возмущения не уменьшают показатели Ляпунова исходной системы (этой терминологии мы и следуем в дальнейшем). В отличие от работ [5; 6], в которых эффект Перрона, как в [4], рассматривался при возмущениях высшего порядка малости, мы в соответствии с работой [3] рассматриваем линейные убывающие (в частности, экспоненциально) к нулю возмущения матриц коэффициентов систем из $\mathcal{M}_n$ и в этом случае называем эффект Перрона линейным.

Для дальнейшего важно отметить, что построенная в работе [3] матрица-возмущение имела вид $\mu Q(t)$, где μ — вещественный параметр; доказано, что для любого $\mu \neq 0$ при таком возмущении старший показатель Ляпунова возмущенной системы положителен, а младший не изменяется. Имея в виду это обстоятельство, далее, зафиксировав некоторое метрическое пространство M, будем рассматривать семейства линейных дифференциальных систем вида

$$\dot{x} = \big(A(t) + Q(t,\mu)\big)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $A \in \mathcal{M}_n$, а $Q(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — непрерывная по совокупности переменных матричнозначная функция. При каждом фиксированном в семействе (2) значении параметра $\mu \in M$

получаем линейную дифференциальную систему с ограниченными (своей, вообще говоря, для каждого μ постоянной) и непрерывными на полуоси коэффициентами, показатели Ляпунова которой обозначим через $\lambda_1(\mu; A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu; A+Q)$. Таким образом, показатели Ляпунова семейства (2) — функции параметра $\mu \in M$; в частности, определен спектр семейства (2) — вектор-функция $\Lambda(\cdot\,; A+Q) \equiv \big(\lambda_1(\cdot\,; A+Q), \ldots, \lambda_n(\cdot\,; A+Q)\big)\colon M \to \mathbb{R}^n$.

1. Постановка задачи. Основной результат

Через $\mathcal{E}_n(M)$ обозначим класс непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, экспоненциально убывающих к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$, т. е.

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \ln \sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\|^{1/t} < 0. \tag{3}$$

Для каждой системы $A \in \mathcal{M}_n$ через $\mathcal{E}_n[A](M)$ обозначим класс тех возмущений $Q \in \mathcal{E}_n(M)$, которые не уменьшают ее показатели Ляпунова, т. е. для любых системы $A \in \mathcal{M}_n$ и ее возмущения $Q \in \mathcal{E}_n[A](M)$ выполняется неравенство $\inf_{\mu\in M} \lambda_i(\mu; A+Q) \geqslant \lambda_i(A)$ при всех $i = \overline{1,n}$. Очевидно, что для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ не пуст, поскольку ему принадлежит тождественно нулевая матрица.

Ставится задача полного дескриптивно-множественного описания для каждых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M класса пар $\big(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\big)$, составленных из спектра $\Lambda(A)$ системы $A \in \mathcal{M}_n$ и вектор-функции $\Lambda(\cdot\,; A+Q)$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а матричнозначная функция Q при каждом A — класс $\mathcal{E}_n[A](M)$, т. е. класса

$$\Pi\mathcal{E}_n(M) = \big\{\big(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\big) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\big\}.$$

Отметим, что полное описание класса

$$\Lambda\mathcal{E}_n(M) = \{\Lambda(\cdot\,; A+Q) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\},$$

составленного из вторых элементов пар класса $\Pi\mathcal{E}_n(M)$, фактически получено в работе [7].

Очевидно, что решение поставленной задачи будет содержать как частный случай пример Перрона и будет описывать с дескриптивно-множественной точки зрения в том числе и все возможные ситуации, при которых экспоненциально устойчивая линейная система под действием параметрических экспоненциально убывающих возмущений становится неустойчивой. Например, как следует из теоремы работы, существуют такая система $A \in \mathcal{M}_2$ со старшим показателем Ляпунова $\lambda_2(A)$, равным -1, и такое ее возмущение $Q \in \mathcal{E}_2[A](\mathbb{R})$, что старший показатель $\lambda_2(A+Q)$ Ляпунова возмущенной системы при μ рациональном равен -1, а при μ иррациональном равен 1.

Отметим, что направление в теории показателей Ляпунова, ставящее своей целью изучение зависимости от параметра асимптотических свойств и характеристик параметрических дифференциальных систем, возникло благодаря В. М. Миллионщикову, начавшему систематические исследования в этом направлении серией работ, из которых укажем только работу [8]. Ему же мы обязаны пониманием того, что адекватным языком описания такой зависимости является язык теории Бэра разрывных функций [9]. Подчеркнем, что речь идет о полном описании всех возможных типов поведения тех или иных свойств или характеристик при изменении параметров системы, а не об установлении достаточных условий того или иного характера их поведения. К настоящему времени в этом направлении получено большое количество результатов.

Так как при $n = 1$ для любого метрического пространства M и любого семейства $Q \in \mathcal{E}_1(M)$ справедливо равенство $\lambda_1(A) = \lambda_1(A+Q)$, то $\Pi\mathcal{E}_1(M) = \big\{\big(\Lambda(A), \Lambda(A)\big)\big\}$. Поэтому далее считаем, что $n > 1$.

Напомним, что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется [10, с. 224] функцией класса $(^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\bigl([r, +\infty)\bigr)$ полуинтервала $[r, +\infty)$ является G_δ-множеством метрического пространства M. В частности, класс $(^*, G_\delta)$ — подкласс второго класса Бэра [10, с. 248].

Полное описание класса $\Pi\mathcal{E}_n(M)$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, и пространства M дает следующее утверждение, которое было анонсировано в [11].

Теорема. *Пусть n — натуральное число, большее единицы, и M — метрическое пространство. Пара $\bigl(l, F(\cdot)\bigr)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ и $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))\colon M \to \mathbb{R}^n$, тогда и только тогда принадлежит классу $\Pi\mathcal{E}_n(M)$, когда выполняются следующие условия*:

1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$;
2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ *для любого* $\mu \in M$;
3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ *для всех* $\mu \in M$ *и* $i = \overline{1, n}$;
4) *для любого* $i = \overline{1, n}$ *функция* $f_i(\cdot)\colon M \to \mathbb{R}$ *ограничена и принадлежит классу* $(^*, G_\delta)$.

Следствие 1. *Пусть n — натуральное число, большее единицы, и M — отрезок вещественной прямой. Тогда для всякой пары $(l, F(\cdot)) \in \Pi\mathcal{E}_n(M)$ существуют система $A \in \mathcal{M}_n$ и аналитическое по параметру $\mu \in M$ ее возмущение $Q \in \mathcal{E}_n[A](M)$ такие, что $\Lambda(A) = l$ и $\Lambda(\cdot\,; A + Q) = F$.*

Поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие индекс экспоненциальной устойчивости системы (2), получим функцию $\mathrm{es}(\cdot; A) : M \to \mathcal{Z}_n$, где $\mathcal{Z}_n \equiv \{0, \ldots, n\}$. Естественно возникает задача описания класса пар, составленных из индексов экспоненциальной устойчивости исходной и возмущенной систем, т. е. класса $\mathcal{IE}_n(M) = \bigl\{\bigl(\mathrm{es}(A), \mathrm{es}(\cdot\,; A + Q)\bigr) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\bigr\}$. Описание этого класса содержит следующее

Следствие 2. *Пусть n — натуральное число, большее единицы, а M — метрическое пространство. Пара $\bigl(d, f(\cdot)\bigr)$, где $d \in \mathcal{Z}_n$ и $f\colon M \to \mathcal{Z}_n$ принадлежит классу $\mathcal{IE}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:* а) *$f(\mu) \leqslant d$ для любого $\mu \in M$,* б) *функция $(-f)$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$.*

2. Доказательство основных результатов

Сначала сформулируем и докажем три вспомогательных утверждения. Наделим пространство $\mathbb{R}^n$ наиболее удобной для дальнейшего нормой $\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а пространство $n \times n$ матриц — соответствующей операторной нормой

$$\|Y\| = \sup_{\|x\|=1} \|Yx\|, \quad Y \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Лемма 1. *Пусть заданы числа $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ и отрезок $[c, d] \subset (0, +\infty)$. Тогда для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и решения $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))^{\mathrm{T}}$ системы*

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1, \ldots, a_n]x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [c, d],$$

функция $\chi_i^x\colon [c, d] \to \mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}$, определяемая равенством $\chi_i^x(t) = \ln |x_i(t)|^{1/t}$, $t \in [c, d]$, монотонна (вообще говоря, нестрого).

Доказательство. Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и решения $x(\cdot)$ рассматриваемой системы справедливо равенство $x_i(t) = e^{a_i(t-c)}x_i(c)$, $t \in [c, d]$. Следовательно, если $x_i(c) \neq 0$, то $\chi_i^x(t) = a_i + (\ln |x_i(c)| - a_i c)/t$, $t \in [c, d]$, а если $x_i(c) = 0$, то $\chi_i^x(t) = -\infty$ при всех $t \in [c, d]$.

Лемма доказана.

Определение. Пусть $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}_+$ — неограниченное множество. *Характеристическим показателем* вектор-функции $f\colon \mathrm{S} \to \mathbb{R}^n$ называется величина (считаем $\ln 0 = -\infty$)

$$\lambda[f] = \varlimsup_{\mathrm{S} \ni t \to +\infty} \ln \|f(t)\|^{1/t}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}_+$ *— неограниченное множество. Тогда для любой вектор-функции* $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))^{\mathrm{T}} \colon \mathrm{S} \to \mathbb{R}^n$ *справедливо равенство*

$$\lambda[x] = \max_{1 \le i \le n} \lambda[x_i].$$

Доказательство. По определению

$$\lambda[x] = \varlimsup_{\mathrm{S} \ni t \to +\infty} \ln(\max_{1 \le i \le n} |x_i(t)|)^{1/t}.$$

Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $t > 0$ из неравенства $\max_{1 \le l \le n} |x_l(t)| \ge |x_i(t)|$ вытекает неравенство $\ln(\max_{1 \le l \le n} |x_l(t)|)^{1/t} \ge \ln |x_i(t)|^{1/t}$, откуда, переходя к верхнему пределу при $t \to +\infty$ по множеству S, получаем неравенство $\lambda[x] \ge \lambda[x_i]$. Следовательно, $\lambda[x] \ge \max_{1 \le i \le n} \lambda[x_i]$.

Установим обратное неравенство. Пусть, напротив, для некоторого числа $r \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $\lambda[x] > r > \max_{1 \le i \le n} \lambda[x_i]$. Значит, для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует такое $T_i > 0$, что при всех $t \ge T_i$ выполнено неравенство $\ln |x_i(t)|^{1/t} < r$. Положим $T = \max_{1 \le i \le n} T_i$. Тогда при всех $t \ge T$ справедливо неравенство $\ln \|x(t)\|^{1/t} < r$. Переходя в последнем неравенстве к верхнему пределу при $t \to +\infty$ по множеству S, получим, что $\lambda[x] \le r$. Пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_n$, *а матричнозначная функция* $Q(\cdot,\cdot) \colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$ *непрерывна и при каждом* $\mu \in M$ *удовлетворяет условию* $\lim_{t \to +\infty} \|Q(t,\mu)\| = 0$. *Тогда каждая из функций* $\lambda_i(\cdot\,; A + Q)$, $i = \overline{1,n}$, *ограничена и принадлежит классу* $(^*, G_\delta)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $i \in \{1, \ldots, n\}$. При каждом $\mu \in M$ из равенства $\lim_{t \to +\infty} \|Q(t,\mu)\| = 0$ вытекает, что существует такое $T > 0$, что для всех $t \ge T$ выполнено неравенство $\|Q(t,\mu)\| \le 1$. В силу известной оценки для показателей Ляпунова [2, гл. III, § 3] справедливо включение $\lambda_i(A+Q) \in [-(a+1), a+1]$, где $a = \sup\{\|A(t)\| \colon t \in \mathbb{R}_+\}$. Следовательно, функция $\lambda_i(\cdot\,; A + Q)$ ограничена. Принадлежность этой функции классу $(^*, G_\delta)$ по существу вытекает из [12, леммы 6–9] (см. также доказательство теоремы [13]).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы разобьем на шаги.

1. Установим сначала *необходимость* условий теоремы. Условия 1)–3) вытекают непосредственно из определений, а условие 4) — из леммы 3.

2. Докажем *достаточность*. Пусть $l \in \mathbb{R}^n$ и $F = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))$ удовлетворяют условиям 1)–4). В силу результата [14] (см. также [15, замечание 2]) для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует последовательность непрерывных функций $f_m^i \colon M \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что справедливо представление

$$f_i(\mu) = \varlimsup_{m \to \infty} f_m^i(\mu), \quad \mu \in M. \tag{4}$$

Положим $C = \sup\{\|F(\mu)\| \colon \mu \in M\} + 1$. Без ограничения общности можно считать, что для всех $i = \overline{1,n}$, $m \in \mathbb{N}$ и $\mu \in M$ выполнено неравенство $f_m^i(\mu) \le C - 1$ (в противном случае заменим функцию f_m^i функцией $\min\{f_m^i(\cdot), C - 1\}$).

Для каждого $m \in \mathbb{N}_0$ определим функцию $\sigma_m \colon M \to \mathbb{R}$ равенством

$$\sigma_m(\mu) = (6C + 4l_i - 6f^i_{\max\{q,1\}}(\mu))/5, \quad \mu \in M,$$

где $q \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ однозначно определяются из условия $m = qn + i$.

3. Зададим последовательность T_m^j, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = \overline{0,6}$, неотрицательных целых чисел рекуррентно равенствами $T_0^0 = 0$ и

$$T_{m+1}^0 = T_m^6, \quad T_m^j = T_m^{j-1} + \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = 2, 5, \\ 2^{m+1}, & \text{если} \quad j = 1, 3, 4, 6, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}_0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Легко видеть, что $T_m^0 = 4(2^{m+1}-2)+2m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Для упрощения записи через Δ_m^j, $j=\overline{1,6}$, обозначим полуинтервал $[T_m^{j-1}, T_m^j)$, через Δ_m — полуинтервал $[T_m^0, T_{m+1}^0)$, а через $\bar{\Delta}_m^j$ и $\bar{\Delta}_m$ — соответствующие отрезки.

Для всякой тройки чисел $\alpha = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ определим на отрезке $\bar{\Delta}_m$ матричнозначную функцию $A[\alpha;m]$ при помощи равенства

$$A[\alpha;m](t) = \begin{cases} \operatorname{diag}[0,-c] & \text{при } t \in \Delta_m^1 \bigsqcup \Delta_m^4, \\ O_2 & \text{при } t \in \Delta_m^2 \bigsqcup \Delta_m^5, \\ \operatorname{diag}[0,c] & \text{при } t \in \Delta_m^3, \\ \operatorname{diag}[a,b+c] & \text{при } t \in \bar{\Delta}_m^6, \end{cases}$$

а для всякого $\sigma > 0$ — матричнозначную функцию $Q[\sigma;m]$ при помощи равенства

$$Q[\sigma;m](t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^j e^{-\sigma T_m^2} & 0 \end{pmatrix} & \text{при } t \in \Delta_m^j, \quad j \in \{2,5\}, \\ O_2 & \text{при остальных } t \in \bar{\Delta}_m, \end{cases}$$

где O_2 — нулевая (2×2)-матрица. Положим $C[\alpha,\sigma;m] = A[\alpha;m] + Q[\sigma;m]$. Тогда для матрицы Коши $X_{C[\alpha,\sigma;m]}(\cdot,\cdot)$ системы

$$\dot{x} = C[\alpha,\sigma;m](t)x, \quad x = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \bar{\Delta}_m,$$

непосредственными вычислениями получаем соотношения

$$\begin{gathered} X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^1, T_m^0) = X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^5, T_m^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-c2^{m+1}} \end{pmatrix}, \\ X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^2, T_m^0) = X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^4, T_m^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\sigma T_m^2} & e^{-c2^{m+1}} \end{pmatrix}, \\ X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^3, T_m^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{c2^{m+1}-\sigma T_m^2} & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^6, T_m^0) = \begin{pmatrix} e^{a2^{m+1}} & 0 \\ 0 & e^{b2^{m+1}} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{5}$$

4. Построим кусочно-постоянную матричнозначную функцию $\widetilde{A}(\cdot)$ и семейство кусочно-постоянных матричнозначных функций $\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, со следующими свойствами:

1) все точки разрыва функций $\widetilde{A}(\cdot)$ и $\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, содержатся в множестве $\{T_m^j : m \in \mathbb{N}_0,\ j=\overline{1,6}\}$;

2) функция $\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$ экспоненциально стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$;

3) спектр $\Lambda(\widetilde{A})$ показателей Ляпунова системы $\widetilde{A}$ совпадает с вектором l;

4) спектр $\Lambda(\cdot;\widetilde{A}+\widetilde{Q})$ показателей Ляпунова семейства $\widetilde{A}+\widetilde{Q}$ совпадает с вектор-функцией $F(\cdot)$.

4.1. Рассмотрим сначала случай $l_1 = 0$. Для каждого $m \in \mathbb{N}_0$ определим на полуинтервале Δ_m систему $\widetilde{A}(\cdot)$ равенствами

$$\dot{x}_j = l_j x_j, \quad \text{если} \quad j \notin \{\theta(m), \theta(m+1)\}, \tag{6}$$

$$\dot{y} = A[a_m, b_m, 6C; m](t)y, \tag{7}$$

а систему $\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$ при всяком $\mu \in M$ — равенствами (6) и

$$\dot{y} = Q[\sigma_m(\mu); m](t)y. \tag{8}$$

В равенствах (6)–(8) обозначены $y = (x_{\theta(m)}, x_{\theta(m+1)})^{\mathrm{T}}$, $a_m = (4+2^{-m})l_{\theta(m)}$, $b_m = (4+2^{-m})l_{\theta(m+1)}$ и $\theta\colon \mathbb{N}_0 \to \{1,\dots,n\}$ — функция, которая задается условием: $\theta(m) \equiv m \pmod{n}$.

Свойство 1) выполнено по построению. Для доказательства свойства 2) заметим, что при всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $\mu \in M$ выполнено неравенство $\sigma_m(\mu) \geq 6/5$. Следовательно,

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \ln \sup_{\mu\in M} \|\widetilde{Q}(t,\mu)\|^{1/t} \leq \lim_{m\to+\infty} -6T_m^2/(5T_m^5) = -6/7. \tag{9}$$

4.2. Зафиксируем $\mu \in M$ и вычислим показатели Ляпунова системы $\widetilde{C}(\cdot,\mu) \equiv \widetilde{A}(\cdot)+\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$. Рассмотрим произвольное ненулевое решение $x(\cdot)$ этой системы. Поскольку $\|\widetilde{C}(t,\mu)\| \leq 1$ при всех $t \in \bar{\Delta}_m^j$, $j \in \{2,5\}$, из равенства $x(t) = X_{\widetilde{C}(\cdot,\mu)}(t,T_m^j)x(T_m^j)$ в силу известной оценки для нормы матрицы Коши [16, (3.3)] получаем двойное неравенство

$$\ln \|x(T_m^j)\| - 1 \leq \ln \|x(t)\| \leq \ln \|x(T_m^j)\| + 1, \quad t \in \bar{\Delta}_m^j, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \{2,5\}.$$

Следовательно, характеристический показатель решения $x(\cdot)$ совпадает с характеристическим показателем $\lambda[x|_{\mathrm{T}}]$ его сужения на множество $\mathrm{T} = \bigcup\{\bar{\Delta}_m^j : m \in \mathbb{N}_0, j \neq 2,5\}$. Из леммы 2 следует, что упомянутый показатель равен наибольшему из характеристических показателей $\lambda[x_i|_{\mathrm{T}}]$, $i = \overline{1,n}$. Так как на отрезках $\bar{\Delta}_m^j$, $m \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1,3,4,6\}$, составляющих множество Т, система $\widetilde{C}(\cdot,\mu)$ является автономной и диагональной, то в силу леммы 1 каждая из функций χ_i^x, $i = \overline{1,n}$, монотонна, поэтому верхний предел в определении характеристического показателя $\lambda[x_i|_{\mathrm{T}}]$ можно вычислять по последовательности концов отрезков $\bar{\Delta}_m^j$, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = \overline{1,6}$:

$$\lambda[x_i|_{\mathrm{T}}] = \varlimsup_{q\to\infty} \ln |x_i(T_q)|^{1/t}, \text{ где } T_{6m+j} = T_m^j, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Учитывая сказанное и применяя лемму 2 к сужению функции $x(\cdot)$ на множество $\{T_q : q \in \mathbb{N}\}$, получаем цепочку равенств

$$\lambda[x] = \lambda[x|_{\mathrm{T}}] = \max_{1\leq i\leq n} \lambda[x_i|_{\mathrm{T}}] = \max_{1\leq i\leq n} \varlimsup_{q\to\infty} \ln |x_i(T_q)|^{1/t} = \varlimsup_{q\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(T_q)\|.$$

4.3. Зафиксируем произвольное $i \in \{1,\ldots,n\}$. Через e^i обозначим i-й единичный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Вычислим характеристический показатель $\lambda[x^i]$ решения $x^i(\cdot)$ рассматриваемой системы, выходящего в момент времени $t = 0$ из вектора e^i.

Заметим, что из последнего равенства в (5) и задания систем (6)–(8) вытекает, что для i-й компоненты любого решения $x(\cdot)$ рассматриваемой системы при всех $m \in \mathbb{N}_0$ выполнено соотношение $x_i(T_{m+1}^0) = x_i(T_m^0)\exp(l_i(T_{m+1}^0 - T_m^0))$. Следовательно, справедливо равенство

$$x_i(T_m^0) = \exp(l_i T_m^0) x_i(T_0^0), \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{10}$$

из которого и определения систем (6)–(8) следует, что если ни одно из чисел $m-i$ и $m-i+1$ не делится на n, то функция $\chi_i(t) \equiv t^{-1}\ln\|x^i(t)\|$, $t > 0$, на отрезке $\bar{\Delta}_m$ тождественно равна l_i. Следовательно, при вычислении верхнего предела в определении величины $\lambda[x^i]$ можно ограничиться концами только тех отрезков $\bar{\Delta}_m^j$, $j = \overline{1,6}$, для которых одно из чисел $m-i$ или $m-i+1$ делится на n.

Положим $m_q^i = qn + i$, $q \in \mathbb{N}_0$, $i = \overline{1,n}$. Из (5)–(8) получаем соотношения

$$\|x^i(T_{m_q^i}^5)\| = \|x^i(T_{m_q^i}^4)\| = \|x^i(T_{m_q^i}^2)\| = \|x^i(T_{m_q^i}^1)\| = \|x^i(T_{m_q^i}^0)\|,$$

$$\|x^i(T_{m_q^i-1}^5)\| = \|x^i(T_{m_q^i-1}^4)\| = \|x^i(T_{m_q^i-1}^2)\| = \|x^i(T_{m_q^i-1}^1)\| \leq \|x^i(T_{m_q^i-1}^3)\| = \|x^i(T_{m_q^i-1}^0)\|,$$

откуда с учетом (10) вытекают цепочки неравенств

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^5) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^4) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^2) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^1) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^0) = l_i,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i-1}^5) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i-1}^4) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i-1}^2) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i-1}^1)$$

$$\leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^3_{m^i_q-1}) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^0_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^0_{m^i_q+1}) = l_i.$$

Далее, по построению

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^3_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to\infty} (6C\cdot 2^{m^i_q+1} - \sigma_{m^i_q}(\mu)T^2_{m^i_q} + l_iT^0_{m^i_q})/T^3_{m^i_q} = \varlimsup_{q\to\infty} f^i_q(\mu) = f_i(\mu).$$

Окончательно получаем

$$\lambda[x^i] = \max_{0\leq j\leq 6} \max\Big\{ \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^j_{m^i_q}), \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^j_{m^i_q-1})\Big\} = \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^3_{m^i_q}) = f_i(\mu).$$

4.4. Покажем, что базис $(x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot))$ решений системы $\widetilde{C}(\cdot,\mu)$ является нормальным [17, 2.2]. Для этого докажем, что никакое подмножество набора решений $\{x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)\}$ не допускает понижающей комбинации [17, 2.3.4], т. е. что для каждого $i\in\{2,\ldots,n\}$ и произвольного набора чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$, где $\alpha_i\neq 0$, выполняется равенство

$$\lambda\Big[\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k\Big] = \lambda[x^i]. \tag{11}$$

Пусть S — какое-либо неограниченное подмножество временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$. Тогда функционал

$$\lambda[x|_{\mathrm{S}}] = \varlimsup_{\mathrm{S}\ni t\to+\infty} \ln\|x(t)\|^{1/t},$$

определенный на линейном пространстве решений какой-либо системы (1), является показателем на этом пространстве в смысле [17, 2.1], а именно, обладает свойствами

$$\begin{gathered}\lambda[(cx)|_{\mathrm{S}}] = \lambda[x|_{\mathrm{S}}] \text{ при } c\neq 0,\\ \lambda[(x+y)|_{\mathrm{S}}] \leq \max\{\lambda[x|_{\mathrm{S}}],\lambda[y|_{\mathrm{S}}]\}.\end{gathered} \tag{12}$$

Положим $\mathrm{S}_i = \{T^3_{m^i_q} : q\in\mathbb{N}_0\}$. В силу п. 4.3 справедливы равенства

$$\lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}] = f_i(\mu),\quad \lambda[x^k|_{\mathrm{S}_i}] = l_k,\quad k=\overline{1,i-1}.$$

Рассмотрим сначала случай $f_i(\mu) = l_i$. Для любого решения $x(\cdot)$, удовлетворяющего условию $x_i(0)\neq 0$, из равенства (10) вытекает цепочка $\lambda[x]\geq\lambda[x_i]\geq l_i$. Следовательно, левая часть (11) не менее правой. Обратное неравенство вытекает из цепочки $f_1(\mu)\leq\ldots\leq f_i(\mu)$ и соотношений (12) при $\mathrm{S}=\mathbb{R}_+$.

Пусть теперь $f_i(\mu) > l_i$. Предположим, что равенство (11) не выполняется. Тогда из соотношений (12) при $\mathrm{S}=\mathbb{R}_+$ получаем цепочку

$$\lambda\Big[\Big(\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k\Big)\Big|_{\mathrm{S}_i}\Big] \leq \lambda\Big[\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k\Big] < \lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}].$$

Применяя (12) при $\mathrm{S}=\mathrm{S}_i$, приходим к противоречию:

$$\lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}] = \lambda\Big[\Big(\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k - \sum_{k=1}^{i-1}\alpha_k x^k\Big)\Big|_{\mathrm{S}_i}\Big]$$

$$\leq \max\Big\{\lambda\Big[\Big(\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k\Big)\Big|_{\mathrm{S}_i}\Big], \lambda[x^1|_{\mathrm{S}_i}],\ldots,\lambda[x^{i-1}|_{\mathrm{S}_i}]\Big\} < \lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}].$$

В силу [17, 2.3.10] базис $(x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot))$ является нормальным, а показатели его решений суть показатели системы $\widetilde{C}(\cdot,\mu)$. Таким образом, $\Lambda(\mu;\widetilde{C}) = F(\mu)$.

4.5. Теперь вычислим показатели Ляпунова невозмущенной системы $\widetilde{A}$. По построению эта система диагональна, обозначим ее диагональные коэффициенты $p_1, \ldots, p_n$. В силу [17, 4.1] показатели Ляпунова системы $\widetilde{A}$ с точностью до перестановки совпадают с верхними интегральными средними значениями ее диагональных коэффициентов, т. е. с величинами

$$\overline{p}_i \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \chi_i(t), \text{ где } \chi_i(t) = t^{-1}\int\limits_0^t p_i(\tau)\,d\tau, \quad t>0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, n\}$. Поскольку на каждом полуинтервале Δ_m^j, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = \overline{1,6}$, функция p_i постоянна, функция χ_i на каждом отрезке $\bar{\Delta}_m^j$ является дробно-линейной и, значит, монотонной (вообще говоря, нестрого). Следовательно, верхний предел в (13) можно вычислять по последовательности точек разрыва функции p_i, т. е. по концам тех отрезков $\bar{\Delta}_m^j$, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = \overline{1,6}$, для которых хотя бы одно из чисел $m-i$ или $m-i+1$ делится на n. С помощью непосредственных вычислений нетрудно убедиться в справедливости равенства (10), а также соотношений

$$\chi_i(T^j_{m^i_q}) \le \chi_i(T^0_{m^i_q}) = l_i, \quad \chi_i(T^j_{m^i_q-1}) \le \chi_i(T^0_{m^i_q-1}) = \chi_i(T^0_{m^i_q+1}) = l_i, \quad q \in \mathbb{N}_0, \quad j=\overline{1,5},$$

из которых получаем, что $\overline{p}_i = l_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда из условия 1) следует, что спектр показателей Ляпунова системы $\widetilde{A}$ совпадает с вектором l.

5. Построим теперь непрерывную матричнозначную функцию $A(\cdot)$ и семейство непрерывных матричнозначных функций $Q(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, такие, что спектры показателей Ляпунова систем $\widetilde{A}$ и A, а также спектры показателей Ляпунова семейств $\widetilde{A}+\widetilde{Q}$ и $A+Q$ совпадают между собой и выполнены неравенства

$$\|A(t)\| \le \|\widetilde{A}(t)\|, \quad \|Q(t,\mu)\| \le \|\widetilde{Q}(t,\mu)\|, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M. \tag{14}$$

Положим $\delta_k = 2^{-(k+1)}\exp(-(T_{k+1})^2)$, $k \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем произвольную непрерывную (например, кусочно-линейную) функцию $s_k\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, имеющую носитель, содержащийся в интервале (T_k, T_{k+1}), и тождественно равную единице на отрезке $[T_k+\delta_k, T_{k+1}-\delta_{k+1}]$. Определим функцию $s : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ равенством

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{15}$$

Заметим, что носители слагаемых ряда (15) попарно не пересекаются, поэтому ряд (15) всюду сходится, а функция s непрерывна, обращается в нуль в некоторой окрестности каждой из точек T_k, $k \in \mathbb{N}$, и тождественно равна единице на множестве $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[T_k+\delta_k, T_{k+1}-\delta_{k+1}]$.

Положим $A(t) = s(t)\widetilde{A}(t)$, $Q(t,\mu) = s(t)\widetilde{Q}(t,\mu)$, $C(t,\mu) = s(t)\widetilde{C}(t,\mu)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$. Так как матричнозначная функция $\widetilde{A}(\cdot)$ постоянна на каждом из интервалов (T_k, T_{k+1}), $k \in \mathbb{N}_0$, то матричнозначная функция $A(\cdot)$ непрерывна. Проверим, что $Q \in \mathcal{E}^n[A](M)$. Свойство 3) вытекает из оценок (9) и (14). Покажем, что матричнозначная функция $Q(\cdot,\cdot)$ непрерывна. Пусть заданы $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\mu_0 \in M$. Если t_0 совпадает с одной из точек T_k, $k \in \mathbb{N}$, или лежит внутри одного из промежутков Δ_m^j, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 1,3,4,6$, то по построению найдется такая окрестность U точки t_0, что $Q(t,\mu)$ — нулевая матрица при всех $t \in U$ и $\mu \in M$. Если t_0 лежит внутри одного из промежутков Δ_m^j, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 2,5$, то $Q(\cdot,\cdot)$ непрерывна в точке (t_0,μ_0) как произведение постоянной по t в некоторой окрестности точки t_0 и непрерывной по μ матричнозначной функции $\widetilde{Q}(\cdot,\cdot)$ и непрерывной функции $s(\cdot)$.

Заметим, что по построению $\|\widetilde{C}(t,\mu)\| \le 12C$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$. Пусть для некоторого $l \in \mathbb{N}$ выполнено включение $t \in [T_l, T_{l+1})$. Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\int\limits_{T_1}^{t} \|s(\tau)\widetilde{C}(\tau,\mu) - \widetilde{C}(\tau,\mu)\| e^{\tau^2}\,d\tau \le 12C\sum_{k=1}^{l+1} 2\delta_k \exp((T_{k+1})^2) \le 12C,$$

из которой получаем, что при всех $\mu \in M$ интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \|C(\tau,\mu) - \widetilde{C}(\tau,\mu)\| e^{\tau^2}\, d\tau$ сходится. Следовательно [17, теорема 29.1.1], спектры показателей Ляпунова систем $C(\cdot,\mu)$ и $\widetilde{C}(\cdot,\mu)$ совпадают между собой. Путем аналогичных рассуждений устанавливается совпадение спектров систем A и $\widetilde{A}$.

6. Пусть теперь заданы произвольные набор $l \in \mathbb{R}^n$ и вектор-функция $F : M \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям 1)–4) теоремы. По доказанному существуют система $A_0 \in \mathcal{M}_n$ и семейство $Q \in \mathcal{E}_n[A_0](M)$, удовлетворяющие равенствам $\Lambda(A_0) = (0, l_2 - l_1, \ldots, l_n - l_1)$ и $\Lambda(\cdot; A_0+Q) = (f_1 - l_1, \ldots, f_n - l_1)$. Воспользуемся следующим хорошо известным утверждением: показатели Ляпунова $\lambda_i(B)$ и $\lambda_i(B + aE_n)$, $i = \overline{1,n}$, систем

$$\dot{x} = B(t)x \quad \text{и} \quad \dot{y} = (B(t) + aE_n)y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

соответственно, где $a \in \mathbb{R}$ фиксировано, а E_n — единичная $(n\times n)$-матрица, связаны равенством $\lambda_i(B + aE_n) = \lambda_i(B) + a$, которое вытекает из того, что для решений $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ этих систем с одним и тем же начальным вектором $(x(0) = y(0))$ имеет место тождество $y(t) \equiv x(t)\exp(at)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Положим $A(t) = A_0(t) + l_1 E_n$, $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда по выбору системы A_0 и вследствие сказанного выше получаем, что $\Lambda(A) = l$. По той же причине спектр $\Lambda(\cdot\,; A + Q)$ показателей Ляпунова семейства $A+Q$ с так определенной матрицей $A(\cdot)$ совпадает с вектор-функцией $F(\cdot)$. Условие $Q \in \mathcal{E}_n[A](M)$ также, очевидно, выполняется.

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1. В рассматриваемом случае непрерывные функции f_m^i, $m \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$, в представлении (4) можно без ограничения общности считать многочленами. Действительно, по теореме Вейерштрасса для любых $m \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1,n}$ найдется многочлен p_m^i такой, что $f_m^i(\mu) - 1/m < p_m^i(\mu) < f_m^i(\mu) + 1/m$ при всех $\mu \in M$. Следовательно, справедливо равенство

$$f_i(\mu) = \varlimsup_{m\to\infty} p_m^i(\mu), \quad \mu \in M, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ функция σ_m из п. 2 доказательства теоремы является многочленом, а коэффициенты матричнозначной функции $\widetilde{Q}(t,\cdot)$, а значит, и функции $Q(t,\cdot)$ при всяком $t \in \mathbb{R}_+$ являются аналитическими функциями параметра.

Следствие доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2. Установим *необходимость* указанных условий. Условие а) вытекает из определения класса $\mathcal{E}_n[A](M)$, поскольку для любых $B \in \mathcal{M}_n$ и $k = \overline{0, n-1}$ неравенства $\mathrm{es}(B) \le k$ и $\lambda_{k+1}(B) \ge 0$ равносильны. Условие б) равносильно требованию, что для каждого $k = \overline{0, n-1}$ множество $\{\mu \in M \,|\, \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q) \le k\}$ является G_δ-множеством. Последнее вытекает из равенства

$$\{\mu \in M \,|\, \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q) \le k\} = \{\mu \in M \,|\, \lambda_{k+1}(\cdot\,; A+Q) \ge 0\}$$

и утверждения теоремы.

Докажем *достаточность*. Пусть заданы $d \in \mathcal{Z}_n$ и функция $f\colon M \to \mathcal{Z}_n$, удовлетворяющие условиям а) и б). Тогда для любого $r \in \mathbb{R}$ множество $\{\mu \,|\, f(\mu) \le r\}$ является G_δ-множеством. Следовательно, тем же свойством обладает при всех $k = \overline{1,n}$ и множество $U_k = \{\mu \in M \,|\, f(\mu) < k\}$, так как при всех $\mu \in M$ неравенство $f(\mu) < k$ равносильно неравенству $f(\mu) \le k - 1$. Для каждого $k = \overline{1,n}$ определим функцию $f_k\colon M \to \{-1, 0\}$ равенствами: $f_k(\mu) = 0$, если $\mu \in U_k$, и $f_k(\mu) = -1$ в противном случае. Несложно видеть, что f_k — функция класса $(^*, G_\delta)$. В самом деле, множество $\{\mu \in M \,|\, f_k(\mu) \ge r]$ пусто, если $r > 0$, совпадает с множеством U_k, если $r \in (-1, 0]$, и совпадает со всем пространством M, если $r \le -1$.

Далее, из цепочки включений $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$ следует цепочка неравенств $f_1 \leq \ldots \leq f_n$. Кроме того, по построению для любого $k = \overline{1,n}$ неравенство $f_k(\mu) = -1$ равносильно неравенству $f(\mu) \geq k$, откуда получаем $d \geq k$. Следовательно, в силу теоремы существуют система $A \in \mathcal{M}_n$ и семейство $Q \in \mathcal{E}^n[A](M)$ такие, что первые d показателей Ляпунова системы A равны -1, остальные равны нулю и спектр показателей Ляпунова $(\lambda_1(\cdot\,; A+Q), \ldots, \lambda_n(\cdot\,; A+Q))$ семейства $A+Q$ совпадает с вектор-функцией $(f_1, \ldots, f_n)$. Следующие цепочки эквивалентностей

$$f(\mu) = n \Leftrightarrow \mu \notin U_n \Leftrightarrow \lambda_n(\mu; A+Q) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{es}(\mu; A+Q) = n, \quad \mu \in M,$$

$$f(\mu) = k \Leftrightarrow \mu \in U_{k+1} \backslash U_k \Leftrightarrow \lambda_k(\mu; A+Q) < 0 \leq \lambda_{k+1}(\mu; A+Q) \Leftrightarrow \mathrm{es}(\mu; A+Q) = k, \quad k = \overline{1, n-1},$$

показывают, что функции $f(\cdot)$ и $\mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)$ совпадают, как только одна из них принимает значение из множества $\{1, \ldots, n\}$. Но тогда и значение “нуль” они принимают одновременно. Таким образом, $f(\mu) = \mathrm{es}(\mu; A+Q)$ при всех $\mu \in M$.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ляпунов А.М.** Собрание сочинений: в 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 476 с.
2. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
3. **Perron O.** Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Vol 31, iss. 4. P. 748–766.
4. **Perron O.** Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Vol 32, iss. 5. P. 703–728.
5. **Леонов Г.А.** Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 168 с.
6. **Коровин С.К., Изобов Н.А.** Реализация эффекта Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1536–1550.
7. **Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В.** Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 12. С. 1579–1588. doi: 10.1134/S0374064118120014 .
8. **Миллионщиков В.М.** Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408–1416.
9. **Бэр Р.** Теория разрывных функций М.; Л.: ГТТИ, 1932. 134 с.
10. **Хаусдорф Ф.** Теория множеств. М.; Л.: ОНТИ, 193. 306 с.
11. **Барабанов Е.А., Быков В.В.** Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, убывающих к нулю на бесконечности // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Междунар. конф., посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2019. С. 48–53.
12. **Миллионщиков В.М.** Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сб. 1988. Т. 137, № 3. С. 364–380.
13. **Быков В.В.** Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1579–1592. doi: 10.1134/S0374064117120019 .
14. **Stepanoff W.** Sur les suites des fonctions continues // Fund. Math. 1928. Vol. 11. pp. 264–274.
15. **Карпук М.В.** Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1332–1338. doi: 10.1134/S0374064114100057 .

16. **Изобов Н.А.** Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск.: Изд-во Белорус. гос. ун-т, 2006. 319 с.
17. **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

Поступила 30.09.2019
После доработки 8.11.2019
Принята к публикации 11.11.2019

Барабанов Евгений Александрович
канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
г. Минск
e-mail: bar@im.bas-net.by

Быков Владимир Владиславович
канд. физ.-мат. наук, доцент
МГУ имени М.В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: vvbykov@gmail.com

REFERENCES

1. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. *Int. J. Control*, 1992, vol. 55, no. 3, pp. 531–773.
2. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* [Lectures on mathematical stability theory]. Moscow: Nauka Publ., 1967, 472 p.
3. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme. *Math Z.*, 1930, vol. 31, no. 1, pp. 748–766. doi: 10.1007/BF01246445 .
4. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. *Math Z.*, vol. 32, no. 1, pp. 703–728. doi: 10.1007/BF01194662 .
5. Leonov G.A. *Khaoticheskaya dinamika i klassicheskaya teoriya ustoichivosti dvizheniya* [Chaotic dynamics and classical theory of motion stability]. Izhevsk: "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika" Publ., 2006, 168 p. ISBN: 5-93972-470-1 .
6. Korovin S.K., Izobov N.A. Realization of the Perron effect whereby the characteristic exponents of solutions of differential systems change their values. *Diff. Equat.*, vol. 46, no. 11, pp. 1537–1551. doi: 10.1134/S0012266110110029 .
7. Barabanov E.A., Bykov V.V., Karpuk M.V. Complete description of the Lyapunov spectra of families of linear differential systems whose dependence on the parameter is continuous uniformly on the time semiaxis. *Diff. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 12, pp. 1535–1544. doi: 10.1134/S0012266118120017 .
8. Millionshchikov V.M. Baire classes of functions and Lyapunov exponents. I. *Diff. Uravneniya*, 1980, vol. 16, no. 8, pp. 1408–1416 (in Russian).
9. Baire R. *Teoriya razryvnykh funktsii* [Theory of discontinuous functions]. Moscow; Leningrad: GTTI Publ., 1932, 134 p. ISBN: 978-5-4460-6297-3 . Original French text published in Baire R. *Leçons sur les Fonctions Discontinues*, Paris: Gauthier-Villars, 1905, 127 p.
10. Hausdorff F. *Set theory.* N Y: Chelsea Publ. Company, 1962, 352 p. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv.* Moscow; Leningrad: ONTI Publ., 1937, 306 p.
11. Barabanov E.A., Bykov V.V. Description of a linear Perron effect under parametric perturbations vanishing at infinity. In: T. F. Filippova, V. I. Maksimov, A. M. Tarasyev (eds.), Stability, Control, Differential Games (SCDG2019): Proc. Internat. Conf. devoted to the 95th anniversary of Academician N.N. Krasovskii (Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019). Yekaterinburg, 2019, pp. 48–53 (in Russian).
12. Millionshchikov V.M. Lyapunov exponents as functions of a parameter. *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 65, no. 2, pp. 369–384. doi: 10.1070/SM1990v065n02ABEH001147 .
13. Bykov V.V. Functions determined by the Lyapunov exponents of families of linear differential systems continuously depending on the parameter uniformly on the Half-Line. *Diff. Eq.*, 2017, vol. 53, no. 12, pp. 1529–1542. doi: 10.1134/S0012266117120011 .

14. Stepanoff W. Sur les suites des fonctions continues. *Fund. Math.*, 1928, vol. 11, no. 1, pp. 264–274.
15. Karpuk M.V. Lyapunov exponents of families of morphisms of metrized vector bundles as functions on the base of the bundle. *Diff. Eq.*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1322–1328. doi: 10.1134/S001226611410005X .
16. Izobov N.A. *Lyapunov exponents and stability.* Cambridge: Cambridge Scientific Publ., 2012, 353 p. ISBN: 978-1-908106-25-4 . Original Russian text published in Izobov N.A. *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova.* Minsk: Belorusskij Gosudarstvennyj Universitet Publ., 2006, 319 p.
17. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* [Theory of Lyapunov exponents and its application to stability problems]. Moscow: Nauka Publ., 1966, 576 p.

Received September 30, 2019
Revised November 8, 2019
Accepted November 11, 2019

Evgenii Aleksandrovich Barabanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics of National Academy of Sciences, Minsk, 119991 Belarus, e-mail: bar@im.bas-net.by .

Vladimir Vladislavovich Bykov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: vvbykov@gmail.com .

Cite this article as: E. A. Barabanov, V. V. Bykov. Description of the linear Perron effect under parametric perturbations exponentially vanishing at infinity, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 31–43 .