ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54

О СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУППАХ ГРУПП ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ ГРУППАМИ $L_3(2^m)$[1]

А. А. Шлепкин

Группа G насыщена группами из некоторого множества X групп, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из множества X. Если все элементы конечных порядков из группы G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G. Группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Группа Шункова не обязана обладать периодической частью. В работе установлено строение силовской 2-подгруппы группы Шункова, насыщенной проективными специальными линейными группами степени три над конечными полями четной характеристики в предположении, что группа Шункова не обладает периодической частью.

Ключевые слова: группа, насыщенная заданным множеством групп, группа Шункова, периодическая часть группы.

А. А. Shlepkin. On Sylow 2-subgroups of Shunkov groups saturated with the groups $L_3(2^m)$.

A group G is saturated with groups from a set of groups X if any finite subgroup of G is contained in a subgroup of G isomorphic to some group from X. If all finite-order elements of a group G are contained in a periodic subgroup of G, then this subgroup is called the periodic part of G. A group G is called a Shunkov group if, for any finite subgroup H of G, any two conjugate elements of prime order in the quotient group $N_G(H)/h$ generate a finite group. A Shunkov group may have no periodic part. We establish the structure of a Sylow 2-subgroup of a Shunkov group saturated with projective special linear groups of degree 3 over finite fields of even characteristic in the case when the Shunkov group has no periodic part.

Keywords: group saturated with a given set of groups, Shunkov group, periodic part of a group.

MSC: 20K01

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-275-282

1. Введение

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной группе из $\mathfrak{X}$ [8;9]. Пусть G — группа. Если все элементы конечных порядков из G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается через $T(G)$ [2, с. 90]. Группа G называется *группой Шункова* (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [5]. Отметим, что группа Шункова не обязана обладать периодической частью (см. [6]). В работе [4] доказывается, что периодическая группа G, насыщенная группами $L_3(2^n)$, локально конечна и изоморфна $L_3(P)$, где P — подходящее локально конечное поле характеристики 2. Естественно попытаться перенести указанный результат на классы групп, содержащие элементы бесконечного порядка, в частности, на класс групп Шункова.

При изучении группы с условием насыщенности одним из ключевых моментов является нахождение в ней счетной локально конечной подгруппы с достаточно хорошими свойствами.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10007).

В случае, когда насыщающее множество состоит из конечных простых неабелевых групп, в качестве такой подгруппы желательно взять силовскую 2-подгруппу изучаемой группы. Это связано с тем обстоятельством, что в дальнейшем, как правило, удается построить возрастающую цепочку вложенных друг в друга конечных простых неабелевых подгрупп исследуемой группы и в конечном итоге установить структуру изучаемой группы. В данной работе рассматривается группа Шункова, насыщенная проективными специальными линейными группами степени три над конечными полями характеристики два, при дополнительном условии, что группа не обладает периодической частью. Установлена структура нормализатора силовской 2-подгруппы данной группы и доказан а его счетность.

Гипотеза. *Пусть группа Шункова H насыщена группами из множества $\mathfrak{M} = \{L_3(2^n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда H обладает периодической частью $T(H)$, которая изоморфна $L_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики* 2.

В дальнейшем G — контрпример к утверждению гипотезы. В данной работе получены ряд свойств силовской 2-подгруппы группы G. Доказана

Теорема. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда*

(a) *S — бесконечная локально конечная группа периода* 4;

(b) *S двуступенно нильпотентна, $Z(S) = S'$ — группа периода* 2;

(c) $x^2 \in Z(S)$ для любого $x \in S$, $x^2 \in Z(S)$;

(d) *если z — инволюция из G, то $C_G(z)$ обладает единственной силовской 2-подгруппой, которая совпадает с S*;

(e) *силовские 2-подгруппы в группе G сопряжены с S;*

(f) *подгруппа $N = N_G(S)$ обладает счетной периодической частью $T = T(N) = S \leftthreetimes P$, где группа P — локально конечная абелева группа ранга 2 без инволюций;*

(g) *T насыщена группами из множества $\mathfrak{M}_N = \{N_M(S_M) \mid M \in \mathfrak{M}, S_M \in Syl_2 M\}$.*

Пусть H — группа, K — подгруппа H, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через $\mathfrak{X}_H(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы H, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 — единичная подгруппа группы H, то $\mathfrak{X}_H(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы H, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_H(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$ и соответственно вместо $\mathfrak{X}_H(1)$ — $\mathfrak{X}(1)$.

2. Доказательство теоремы

При доказательстве теоремы будем следовать схеме доказательства лемм 2.1–2.11 из [4]. Поскольку G — контрпример к утверждению Гипотезы, то согласно [4, теорема] группа G не обладает периодической частью.

Лемма 1. *Группа G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Если G содержит лишь конечное множество элементов конечного порядка, то по лемме Дицмана [1] и условию насыщенности G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна $L_3(2^n)$ для подходящего n. Противоречие с выбором G. Следовательно, G содержит бесконечно много элементов конечного порядка, и по [10, лемма 1] группа G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Группа G содержит инволюцию, и все инволюции группы G сопряжены. Порядок любого 2-элемента из G не превосходит 4, и для любой инволюции $z \in G$ существует элемент $x \in G$ такой, что $x^2 = z$. Любая 2-подгруппа T из G двуступенно нильпотентна, квадрат любого элемента из T лежит в центре T, $T^{'}$ — группа периода 2 и $T^{'} \leq Z(T)$.*

Доказательство. Поскольку в группе Шункова, как и в периодической группе, любые две инволюции порождают конечную группу, то доказательство данной леммы аналогично доказательству соответствующих свойств перечисленных в утверждении [4, лемма 2.1].

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть x — элемент порядка 4 из G. Тогда $C_G(x)$ обладает периодической частью $T(C_G(x))$, которая является бесконечной абелевой 2-группой. В частности, любая силовская 2-подгруппа группы G бесконечна.*

Доказательство. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из $C_G(x)$. Тогда $\langle K, x\rangle$ — также конечная подгруппа из $C_G(x)$. По условию насыщенности существует группа $L \in \mathfrak{M}(\langle K, x\rangle)$. По [4, § 1, свойства 2, 7] $C_L(x)$ — абелева 2-группа. Так как $\langle K, x\rangle \leq C_L(x)$, то K — абелева группа. По [7, предложение 7] $T(C_G(x))$ существует и является абелевой 2-группой. Покажем, что $T(C_G(x))$ — бесконечная группа. В силу лемм 1 и 2 $C_G(x)$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Следовательно, $T(C_G(x)$ — бесконечная группа, а любая силовская 2-подгруппа из G бесконечна.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть z — инволюция из G. Тогда $C_G(z)$ обладает единственной силовской 2-подгруппой S, которая одновременно будет силовской 2-подгруппой в G.*

Доказательство. По лемме 2 в G найдется элемент x порядка 4 такой, что $x^2 = z$. Отсюда и из леммы 3 следует, что $T(C_G(x)) \leq C_G(z)$. Пусть T — силовская 2-подгруппа из $C_G(z)$, содержащая $T(C_G(x))$. Очевидно, T — бесконечная группа. Пусть T_1 — силовская 2-подгруппа из $C_G(z)$, содержащая x и отличная от T. Очевидно, $Z(T_1) < T$.

Далее разобьем доказательство леммы на несколько пунктов.

1. Пусть I — группа, порожденная всеми инволюциями из $Z(T)$, а I_1 — группа порожденная всеми инволюциями из $Z(T_1)$. Тогда $I = I_1$.

Доказательство. Поскольку $Z(T_1) < C_{T_1}(x) < T(C_G(x) < T$, то $I_1 \leq I$. Предположим, что $I_1 < I$. Тогда найдется инволюция $a \in I \setminus I_1$. Так как $b^2 \in I_1$ для любого $b \in T_1$, то по [7, предложения 4,5] $\langle a, b, z\rangle$ — конечная подгруппа из $C_G(z)$. По условию насыщенности $\langle a, b, z\rangle \leq L_1 \in \mathfrak{M}(\langle a, b, z\rangle)$. По [4, § 1, п. 7] $\langle a, b, z\rangle$ — конечная 2-группа из $C_{L_1}(z)$. Соответственно $\langle a, b\rangle$ — конечная 2-группа и $[x, y] \in I$ для любого $y \in \langle a, b\rangle$ (см. лемму 2). Следовательно, фактор-группа $\langle x, a, b, I\rangle/I$ является конечной 2-группой, группа $\langle x, a, b, I\rangle$ — локально конечная 2-группа (см. теорему Шмидта [2, теорема 23.1.1]), а $\langle x, a, b\rangle$ — конечная 2-группа. По условию насыщенности $\langle x, a, b\rangle \leq L_2 \in \mathfrak{M}(\langle x, a, b\rangle)$. Возьмем в L_2 силовскую 2-подгруппу S_2, содержащую $\langle x, a, b\rangle$. Поскольку $ax = xa$, то $a \in Z(S_2)$, следовательно, $ab = ba$. В силу произвольности выбора b как элемента группы T_1 $a \in C_G(T_1)$. Поскольку T_1 — силовская 2-подгруппа в G, то $a \in T_1$, $a \in Z(T_1)$ и $a \in I_1$. Противоречие с выбором инволюции a. Следовательно, $I = I_1$. □

Обозначим группу I через Z^*.

2. Фактор-группа $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ не содержит элементов порядка 4.

Доказательство. Ввиду п. 1, доказанного выше, и [7, предложения 4, 5] фактор-группа $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ — группа Шункова. Пусть $\overline{d}$ — элемент порядка 4 из фактор-группы $\langle T, T_1\rangle/Z^*$, а d — его прообраз в $\langle T, T_1\rangle$. Ввиду леммы 2 $|d| = 4$ для любого $v \in T_1$, $[v, x] \in Z^*$ и $[w, x] \in Z^*$ для любого $w \in T$. Следовательно, $Z^*\langle x\rangle$ — нормальная подгруппа в $\langle T_1, T\rangle$, $Z^*\langle x\rangle\langle d\rangle$ — локально конечная 2-группа с нормальной подгруппой $Z^*\langle x\rangle$ и $(Z^*\langle x\rangle) \cap \langle d\rangle = 1$. Для любого $u \in Z^*$ $\langle u, x, d\rangle$ — конечная 2-подгруппа из $Z^*\langle x\rangle\langle d\rangle$. По условию насыщенности

$$u \in Z^*, \langle u, x, d\rangle < S_L < L \in \mathfrak{M}(\langle u, x, d\rangle),$$

где S_L — силовская 2-подгруппа из L. По [4, § 1, свойство 3] $d^2 \in Z(S_L)$ и, следовательно, $d^2 \in T(C_G(x)) = T$. Возьмем произвольный элемент $t \in T$. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle t, d^2, x\rangle$ группы T. По условию насыщенности

$$\langle t, d^2, x\rangle < S_{L_1} < L_1 \in \mathfrak{M}(\langle t, d^2, x\rangle),$$

где S_{L_1} — силовская 2-подгруппа из L_1. По [4, § 1, свойство 3] $d^2 \in Z(S_{L_1})$, следовательно, $d^2 t = t d^2$ для любого $t \in T$. Последнее означает, что $d^2 \in Z(T)$, $d^2 \in Z^*$ и $|\overline{d}| = 2$. Противоречие с тем, что $|\overline{d}| = 4$. Таким образом, все неединичные 2-элементы фактор-группы $\langle T, T_1\rangle / Z^*$ являются инволюциями. □

3. Покажем, что произведение любых двух инволюций из фактор-группы $\langle T, T_1\rangle / Z^*$ — снова инволюция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в противном случае в фактор-группе $\langle T, T_1\rangle / Z^*$ найдутся инволюции $\overline{v}, \overline{w}$ такие, что $|\overline{v}\ \overline{w}| > 2$. По п. 2, доказанному выше, фактор-группа $\langle T, T_1\rangle / Z^*$ не может содержать элементов порядка 4. Следовательно, $|\overline{v}\ \overline{w}|$ делится на некоторое нечетное простое число p, в группе $\langle \overline{v}\ \overline{w}\rangle$ найдется подгруппа $\langle \overline{d}\rangle$ простого порядка p, а соответственно в фактор-группе $\langle T, T_1\rangle / Z^*$ найдется группа диэдра $\langle \overline{d}\rangle \leftthreetimes \langle \overline{v}\rangle$ и $\overline{d}^{\overline{v}} = \overline{d}^{-1}$.

Пусть d, v — прообразы элементов d, v в группе $\langle T, T_1\rangle$ такие, что v — 2-элемент, а d — элемент нечетного порядка, делящегося на p. В силу того что $\langle Z^*, x\rangle$ — нормальная подгруппа в $\langle T, T_1\rangle$ (см. доказательство п. 2) $\langle Z^*, x, d, v\rangle$ — локально конечная группа, соответственно $\langle x, d, v\rangle$ —конечная группа из $C_G(z)$. По условию насыщенности

$$\langle x, d, v\rangle < L_2 \in \mathfrak{M}(\langle x, d, v\rangle),$$

и $\langle d, x, v\rangle \le C_{L_2}(z)$. По [4, § 1, свойство 7] $C_{L_2}(z) = S_{L_2} \leftthreetimes D$, где S_{L_2} — силовская 2-подгруппа из L_2, содержащая $\langle x, v\rangle$, а D — циклическая группа нечетного порядка. Без ограничения общности можно считать, что $d \in D$, а $v \in S_{L_2}$ (см. теорему Холла [3, теорема 15.2.4]). Тогда $d^v = sd^{-1}$ для некоторого $s \in Z^*$ (согласно выбору элементов d, v) и $d^v = s_1 d$ для некоторого $s_1 \in S_{L_2}$ (согласно структуре $C_{L_2}(z)$). Следовательно, $sd^{-1} = s_1 d$ и $d^2 = s_1^{-1} s$ — 2-элемент, что невозможно. □

4. T — единственная силовская 2-подгруппа из $C_G(z)$, содержащая x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказанных выше пп. 1–3 вытекает, что все конечные подгруппы фактор-группы $\langle T, T_1\rangle / Z^*$ являются элементарными абелевыми 2-группами. По [7, предложение 7] фактор-группа $\langle T, T_1\rangle / Z^*$ обладает периодической частью $T(\langle T, T_1\rangle / Z^*)$, которая является абелевой группой периода 2. Очевидно, ее полный прообраз в $\langle T, T_1\rangle$ совпадает с $\langle T, T_1\rangle$ (в силу того что $\langle T, T_1\rangle$ порождается элементами конечного порядка) и является 2-подгруппой в $C_G(z)$. Так как T, T_1 — силовские 2-подгруппы из $C_G(z)$, содержащие x, то $\langle T, T_1\rangle = T = T_1$. □

5. Все инволюции из $C_G(z)$ лежат в T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — инволюция из $C_G(z) \setminus T$. По [7, предложения 4,5] группа $\langle x, a\rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle x, a\rangle \le L_3 \in \mathfrak{M}(\langle x, a\rangle)$. Следовательно, $\langle x, a\rangle \le C_L(z)$, $\langle x, a\rangle$ — 2-группа [4, § 1, свойство 7]. Пусть T_2 — силовская 2-подгруппа из $C_G(z)$, содержащая $\langle x, a\rangle$. По п. 4, доказанному выше, $T = T_2$. Следовательно, $a \in T$. Противоречие с выбором инволюции a. □

6. Все элементы порядка 4 из $C_G(z)$ лежат в T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть b — элемент порядка 4 из $C_G(z)$. По условию насыщенности $\langle z, b\rangle < L_4 \in \mathfrak{M}(1)$. Пусть S_4 — силовская 2-подгруппа из L_4, содержащая элемент z из $Z(S_4)$. По [4, § 1, свойство 4] b является произведением инволюций из S_4. Поскольку $S_4 < C_G(z)$, то по п. 5, доказанному выше, $b \in T$. □

Завершим доказательство леммы. Так как все неединичные 2-элементы из $C_G(z)$ имеют порядок 2 или 4, то по пп. 5, 6, доказанным выше, T — характеристическая подгруппа в

$C_G(z)$, а поскольку она силовская 2-подгруппа в $C_G(z)$ (см. п. 4, доказанный выше), то она единственная силовская 2-подгруппа в $C_G(z)$. Тогда $S = T$.

Лемма 4 доказана.

Зафиксируем силовскую 2-подгруппу S группы G из утверждения леммы 4 и положим $N = N_G(S)$, $Z = Z(S)$.

Лемма 5. *Имеют место следующие утверждения*:
(a) *силовские* 2*-подгруппы в группе* G *сопряжены*;
(b) $Z = S'$.

Доказательство. (a). Пусть S_1 — силовская 2-подгруппа группы G, отличная от S. По лемме 2 S_1, S — нильпотентные группы. Возьмем инволюцию $t \in Z(S_1)$ и инволюцию $r \in Z(S)$. Тогда $t = r^g$ для некоторого $g \in G$ (см. лемму 2), и $S_1 = S^g$ (лемма 4).

(b). Доказательство данного утверждения аналогично доказательству [4, лемма 2.4.].

Лемма доказана.

Лемма 6. *Группа* $\overline{N} = N_G(S)/S$ *обладает периодической частью* $T(\overline{N}) := \overline{P}$, *которая является периодической абелевой группой ранга* 2 *без инволюций.*

Доказательство леммы разобьем на несколько пунктов.

1. Пусть $\overline{K}$ — конечная подгруппа из $\overline{N}$. Тогда $\overline{K}$ — абелева группа.

Действительно, пусть K — некоторый конечный прообраз подгруппы $\overline{K}$ в N. Возьмем в S элемент x порядка 4 и рассмотрим конечную подгруппу $\langle x, K\rangle$ из N. По условию насыщенности $\langle x, K\rangle \leq M \in \mathfrak{M}(\langle x, K\rangle)$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая x. По [4, § 1, свойство 7] $S_M < C_M(x^2)$. Следовательно, $S_M < S$, $N_G(S_M) < N_G(S)$ и $K < N_M(S_M)$ (см. лемму 4). По [4, § 1, свойство 6] фактор-группа $N_M(S_M)/S_M$ — абелева группа. Следовательно, фактор-группа KS_M/S_M — абелева группа. Так как $S_M < S$, то фактор-группа $\overline{K} = KS/S$ — абелева подгруппа из $\overline{N}$. □

2. $\overline{N}$ — группа Шункова. Утверждение данного пункта вытекает из лемм 2, 3, [7, предложения 4, 5; 3, теорема Холла, 15.2.4] и того факта, что $\pi(S) \cap \pi(\overline{N}) = \varnothing$. □

3. $\overline{P}$ — счетная группа.

По пп. 1, 2, доказанным выше, и [7, предложение 7] $\overline{P}$ существует и является абелевой группой без инволюций. Следовательно,

$$\overline{P} = \overline{P_1} \times \overline{P_2} \times \cdots \times \overline{P_i} \times \cdots$$

— прямое произведение своих силовских p_i-подгрупп $\overline{P_i}$, по всем $p_i \in \pi(\overline{N})$ [2, упражнение 10.1.2.]. Покажем, что $\overline{P_i}$ — абелева p_i-группа p_i-ранга, не превосходящего 2. Предположим противное и возьмем в $\overline{P_i}$ элементарную абелеву подгруппу $\overline{K}$ порядка p_i^3. Пусть K — некоторый конечный прообраз подгруппы $\overline{K}$ в N. Возьмем в S элемент x порядка 4 и рассмотрим конечную подгруппу $\langle x, K\rangle$ из N. По условию насыщенности $\langle x, K\rangle \leq M \in \mathfrak{M}(\langle x, K\rangle)$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая x. По [4, § 1, свойство 7] $S_M < C_M(x^2)$. Следовательно, $S_M < S$ и $K < N_M(S_M)$ (лемма 4). По [4, § 1, п. 6] фактор-группа $N_M(S_M)/S_M$ — абелева группа p-ранга, не превосходящего 2 по всем $p \in \pi(N_M(S_M)/S_M)$. Следовательно, фактор-группа KS_M/S_M — абелева группа p_i-ранга не более 2. Так как $x \in S_M$, то $N_G(S_M) < N_G(S)$ и фактор-группа $\overline{K} = KS/S$ — абелева подгруппа из $\overline{N}$ p_i-ранга, не превосходящего 2. Противоречие с выбором $\overline{K}$. Поскольку S_M можно выбрать сколь угодно большого порядка, то $|\overline{K}|$ также можно взять сколь угодно большим, и счетность группы $\overline{P}$ в силу [2, теорема 10.1.16] очевидна. □

Лемма доказана.

Лемма 7. Z *— счетная группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем две различные инволюции t, l из Z и элементы a, b порядка 4 из S такие, что $a^2 = t, b^2 = l$. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle a, b\rangle$ из N. По условию насыщенности $\langle a, b\rangle \leq K \in \mathfrak{M}(\langle a, b\rangle)$. Пусть S_K — силовская 2-подгруппа из K, содержащая $\langle a, b\rangle$. Тогда $S_K < S$. По [4, § 1, свойство 8] $N_K(S_K) = S_K \leftthreetimes M$, и в M найдется элемент g такой, что $t^g = l$. Следовательно, для любого $s \in S$ имеем $t^{sg} = l, t^s = t, l^s = l$ (инволюции t, l принадлежат $Z(S)$). Ввиду лемм 3 и 4 инволюции t, l лежат в $Z(S) \cap Z(S^h)$ для любого $h \in M$. По лемме 4 имеем $S = S^h$ и $M < N_G(S)$. Так как $\overline{M} = MS/S < \overline{P}$, то $\overline{P}$ действует транзитивно на $Z \setminus \{1\}$ (по правилу $z^{\overline{g}} = z^g$). Так как $\overline{P}$ — счетная группа, то Z — счетная группа.

Лемма доказана.

Лемма 8. *S — счетная группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству [4, лемма 2.7]. □

Лемма 9. *N обладает счетной периодической частью $T = T(N) = S \leftthreetimes P$, где P — периодическая абелева группа ранга 2 без инволюций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и счетность подгруппы $T = T(N)$ вытекает из леммы 6, теоремы Шмидта [2, теорема 23.1.1] и леммы 8. Покажем существование группы P из утверждения леммы. Пусть группа $\overline{P}$ — из утверждения леммы 6, $\overline{K}$ — конечная подгруппа из $\overline{P}$ и K — конечный прообраз подгруппы $\overline{K}$ в T. Тогда $K/K \cap S \simeq \overline{K}$. По теореме Холла [3, теорема 15.2.4] $K = (K \cap S) \leftthreetimes K_1$, где $K_1 \simeq \overline{K}$. Положим $R_1 = K_1$. Ясно, что $S \leftthreetimes R_1 \leq T$ и $\overline{K} = \overline{R_1}$. Так как $\overline{P}$ — счетная группа, то

$$\overline{P} = \{\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, \dots \mid n = 1, 2 \dots\}.$$

Пусть m_1 — минимальное натуральное число, при котором $\overline{k_{m_1}} \notin \overline{R_1}$. Очевидно, $\overline{K}_2 = \langle \overline{k_{m_1}}, \overline{R_1}\rangle$ — конечная подгруппа в $\overline{P}$. Пусть K_2 — конечная подгруппа из T, содержащая R_1 и являющаяся прообразом подгруппы $\overline{K_2}$. По теореме Холла [3, теорема 15.2.4] $K_2 = (K_2 \cap S) \leftthreetimes R_2$, где $R_2 \simeq \overline{K_2}$ и $R_1 < R_2$. Ясно, что $S \leftthreetimes R_2 \leq T$, $\overline{K_2} = \overline{R_2}$ и $\overline{k_{m_1}} \in \overline{R_2}$. Действуя подобным образом, строим бесконечную цепочку подгрупп группы T

$$R_1 < R_2 < \dots < R_n < \dots$$

такую, что

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

— локально конечная абелева группа и $T = S \leftthreetimes P$. По [2, упражнение 10.1.2.] $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_i \times \dots$ — прямое произведение своих силовских p_i-подгрупп P_i по всем $p_i \in \pi(P)$. То, что P_i — p_i ранга, не превосходящего 2, доказывается точно так же, как в завершении доказательства леммы 6.

Лемма доказана.

Лемма 10. *T насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M}_N = \{N_M(S_M) \mid M \in \mathfrak{M}, S_M \in Syl_2 M\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K — некоторая конечная подгруппа из T. Возьмем в S элемент x порядка 4 и рассмотрим конечную подгруппу $\langle x, K\rangle$ из T. По условию насыщенности $\langle x, K\rangle \leq M \in \mathfrak{M}(\langle x, K\rangle)$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая x. По предложению [4, § 1, свойство 7] $S_M < C_M(x^2)$. Следовательно, $S_M < S$ и $K < N_M(S_M)$ (см. лемму 4).

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Пункты (a)–(c) доказаны в леммах 2 и 3. Пункт (d) доказан в лемме 4. Пункт (e) доказан в лемме 5. Пункт (f) доказан в лемме 9. Пункт (g) доказан в лемме 10.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дицман А.П.** О центре $p-$групп // Тр. семинара по теории групп. М., 1938. С. 30–34.
2. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
3. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. 309 с.
4. **Лыткина Д.В., Мазуров В.Д.** Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 606–626. doi: 10.1007/s10469-007-0033-z.
5. **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Группы с условиями конечности. Новосибирск. Изд-во СО РАН, 2001. 201 с.
6. **Череп А.А.** О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.
7. **Шлепкин А.А.** Группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над полями нечетных порядков// Сиб. электр. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 341–351. doi: 10.17377/semi.2016.13.029.
8. **Шлепкин А.К.** Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Третья междунар. конф. по алгебре (23–28 авг. 1993): сб. тез. Красноярск, 1993. С. 363.
9. **Шлепкин А.К.** О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, №2. С. 224–245.
10. **Шлепкин А.К.** О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. С. 226–231.

Поступила 1.03.2019
После доработки 23.10.2019
Принята к публикации 4.11.2019

Шлепкин Алексей Анатольевич
канд. физ.-мат. наук,
доцент
Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: shlyopkin@gmail.com

REFERENCES

1. Ditsman A.P. On the center of p-groups. *Proc. seminar on group theory.* Moscow, 1938. P. 30–34.
2. Kargapolov M.I., Merzliakov Ju.I. *Fundamentals of the theory of groups.* N Y; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0. Original Russian text (3rd ed.) published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp.* Moscow: Nauka Publ., 1982, 288 p.
3. Kondrat'ev A.S. *Gruppy i algebry Li* [Lie groups and Lie algebras]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2009, 309 p. ISBN: 978-5-7691-2111-1.
4. Lytkina D.V., Mazurov V.D. Periodic groups saturated with $L_3(2^m)$. *Algebra Logic*, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 330–340. doi: 10.1007/s10469-007-0033-z.
5. Senashov V.I., Shunkov V.P. *Gruppy s usloviyami konechnosti* [Groups with finiteness conditions]. Novosibirsk: SO RAN Publ., 2001, 336 p. ISBN: 5-7692-0439-7.
6. Cherep A.A. Set of elements of finite order in a biprimitively finite group. *Algebra Logic*, 1987, vol. 26, no. 4, pp. 311–313. doi 10.1007/BF01980245.
7. Shlepkin A.A. On Shunkov groups, saturated with linear and unitary groups of dimension 3 over fields of odd orders. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 341–351 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.029.
8. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitive finite groups containing finite unsolvable subgroups. In: *Abstracts. III Internat. Conf. on Algebra* (Krasnoyarsk, 1993), p. 369 (in Russian).

9. Shlepkin A.K. On conjugately biprimitively finite groups saturated with finite simple subgroups. *Algebra Logic*, 1998, vol. 37, no. 2, pp. 127–138. doi: 10.1007/BF02671597 .
10. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitively finite groups with the primary minimal condition. *Algebra Logic*, 1983, vol. 22, no. 2, pp. 165–169. doi: 10.1007/BF01978669 .

Received March 1, 2019
Revised October 23, 2019
Accepted November 4, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-71-10007).

Aleksei Anatolievich Shlepkin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Space and Information Technologies of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: shlyopkin@gmail.com .

Cite this article as: A. A. Shlepkin. On Sylow 2-subgroups of Shunkov groups saturated with the groups $L_3(2^m)$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 275–282.