ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.863

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИЙ НА НЕСОВЕРШЕННОМ РЫНКЕ КАПИТАЛА[1]

А. А. Шананин

Рассматривается проблема моделирования инвестиций на несовершенном рынке капитала, на котором процент по кредитам существенно превышает процент по депозитам. Для определения дефлятора денежных потоков предлагается использовать модель Кантора — Липмана, в которой инвестиционная среда описывается пулом стационарных тиражируемых проектов. Пул инвестиционных проектов определяет инвестиционную функцию, которая строится как поточечный максимум преобразований Лапласа денежных потоков инвестиционных проектов. Модель Кантора — Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала позволяет построить функцию Беллмана, которую можно использовать для оценки финансового состояния инвестора. Исследуются свойства оператора Беллмана в задаче об оптимальной стратегии инвестирования. Показано, что в качестве дефлятора денежных потоков следует использовать минимальный положительный корень инвестиционной функции. Исследована управляемая динамическая система, описывающая инвестиционный процесс. Построены режимы сбалансированного роста. Определены неймановский темп роста и неймановские состояния равновесия. Доказана теорема о магистрали в слабой форме.

Ключевые слова: инвестиции, модель Кантора — Липмана, математическое моделирование экономики, NPV, IRR, оператор Беллмана, инвестиционный полином, задача линейного программирования.

A. A. Shananin. Mathematical modeling of investments at an imperfect capital market.

We consider the problem of modeling the investments at an imperfect capital market, in which the interest on loans significantly exceeds the interest on deposits. To determine the cash flow deflator, we propose to use the Cantor–Lippman model, in which the investment environment is described by a pool of stationary, replicated projects. The pool of investment projects defines the investment function, which is built as the pointwise maximum of Laplace transforms of the cash flows of investment projects. The Cantor–Lippman model of investment in an imperfect capital market allows us to build a Bellman function, which can be used to assess the financial condition of the investor. We study the properties of the Bellman operator in the problem of an optimal investment strategy. It is shown that the minimum positive root of the investment function should be used as a cash flow deflator. We also study a dynamic control system describing the investment process. Modes of balanced growth are built. The Neumann growth rate and the Neumann equilibrium states are determined. A weak line theorem is proved.

Keywords: investments, Cantor–Lippman model, mathematical modeling of economics, NPV, IRR, Bellman operator, investment polynomial, linear programming.

MSC: 91B64

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-265-274

Введение

Научное обсуждение оценки эффективности инвестиционного проекта восходит к работам И. Фишера (1907, 1930) [1; 2]. Особенностью инвестиционных проектов в реальном секторе экономики является их ограниченная ликвидность. Начатый инвестиционный проект должен быть завершен, иначе он неликвиден. Инвестиционный проект в реальном секторе экономики характеризуется распределенными по времени денежными потоками $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, где a_i — величина денежного потока в i-й период времени от начала реализации проекта, $i = 1, \ldots, n$. Положительные значения a_i соответствуют доходам от реализации проекта, полученным в i-й период времени, а отрицательные значения — вложениям в инвестиционный

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 16-11-10246).

проект. Считая, что время реализации проекта разбито на равные промежутки времени, И. Фишер предложил в качестве критерия оценки инвестиционного проекта показатель приведенной чистой прибыли (NPV)

$$NPV(\vec{a}, r) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{r^j},$$

где в качестве дефлятора r предлагалось использовать доходность альтернативного варианта вложения денег. Поскольку значение дефлятора оказывает существенное влияние на величину и знак NPV, этот показатель подвергался критике. Естественно считать, что значение дефлятора заключено между процентными ставками по кредитам и депозитам. Однако на несовершенном рынке капитала значения этих процентных ставок существенно различаются. В качестве альтернативы NPV предлагался показатель внутренней доходности проекта (IRR), который определялся как значение дефлятора r, при котором $NPV(\vec{a}, r) = 0$. Однако такое значение может быть неединственным, так как инвестиционный полином

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

может иметь до n положительных корней. Возникшая проблема привела к дискуссии об оценке инвестиционных проектов. По-видимому, первая ее математическая постановка содержится в статье Дж. Хиршлейфера (1958) [3] и продолжена в работах Р. М. Солоу (1963) [4], Д. Гейла (1973) [5], Р. Дорфмана (1981) [6]. В работах Д. Кантора и С. Липмана (1983, 1995) [7; 8] была предложена модель инвестиций на несовершенном рынке капитала, в которой удалось определить доходность пула тиражируемых инвестиционных проектов и установить ее связь с уточненным понятием IRR. Исследование модели Кантора — Липмана было продолжено в работах [9–15].

1. Модель Кантора — Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала

Предположим, что для инвестора в любой период времени в любом объеме доступны M типов инвестиционных проектов. В доступном инвестору пуле проектов могут в том числе содержаться проекты депонирования и заимствования. Проект m-го типа задается вектором финансовых потоков $\vec{a}^m = (a_0^m, a_1^m, \ldots, a_n^m)$. Здесь $n+1$ — наибольшая продолжительность среди всех проектов[2], а $m = 1, \ldots, M$. Для того чтобы эти проекты можно было считать общедоступным альтернативным источником вложений, они должны быть стационарными (доступными в неизменном виде в любой момент времени) и тиражируемыми. Проект называется тиражируемым, если он может быть начат в любой период времени с произвольной интенсивностью $u \geqslant 0$ (вектор финансовых потоков такого проекта будет выглядеть как $u\vec{a} = (ua_0, ua_1, \ldots, ua_k)$).

Целью инвестора в модели Кантора — Липмана предполагается максимизация дохода к периоду времени T, в который вся инвестиционная деятельность должна быть завершена. Возможности инвестора в период времени t описываются остатком его расчетного счета $s_0(t)$, который изменяется в процессе реализации инвестиционной стратегии

$$\{u_m(t) | m = 1, \ldots, M; t = 0, \ldots, T-n\}.$$

Здесь $u_m(t)$ — интенсивность проекта m-го типа, начатого в период времени t. Динамика остатков расчетного счета описывается уравнением

$$s_0(t+1) = s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=0}^{n} a_k^m u_m(t-k).$$

[2]Если какой-то проект длится меньше, чем n периодов времени, то дополним соответствующий вектор нулями.

Дополнительных возможностей занимать и вкладывать деньги у инвестора нет. Все его возможности входят в доступный ему пул проектов; иными словами, должно выполняться условие самофинансирования

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Будем считать заданными в период времени 0 денежные средства инвестора в объеме $\xi_0 > 0$. В модели Кантора—Липмана рассматривается задача об оптимальной стратегии инвестирования

$$s_0(T) \to \max; \tag{1.1}$$

$$s_0(t+1) = s_0(t) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{n} a_k^m u_m(t), \quad t = 0, \ldots, T-1; \tag{1.2}$$

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, \quad t = 1, \ldots, T; \tag{1.3}$$

$$s_0(0) = \xi_0; \tag{1.4}$$

$$u_m(t) \geqslant 0, \quad m = 1, \ldots, M, \quad t = 0, \ldots, T-1; \tag{1.5}$$

$$u_m(t) = 0, \quad m = 1, \ldots, M, \quad t = T-n, \ldots, T-1. \tag{1.6}$$

Обозначим через V_T оптимальное значение функционала в задаче (1.1)–(1.6).

Инвестиционная функция пула проектов определяется на промежутке $[0, +\infty)$ по формуле

$$F(r) = \max_{1 \leqslant m \leqslant M} \sum_{j=0}^{n} a_j^m e^{-rj}. \tag{1.7}$$

Теорема 1 (Кантор, Липман, [7;8]). 1. *Если $F(0) \leqslant 0$, то для любого $T \geqslant 0$ $V_T = \xi_0$ (пул инвестиционных проектов убыточен).*

2. *Если $F(r) > 0$ для всех $r \in [0, \infty)$, то существует $T_0 > 0$ такое, что для любого $T \geqslant T_0$ $V_T = +\infty$ (пул инвестиционных проектов допускает арбитраж).*

3. *Если $F(0) > 0$, существует $\tilde{r} > 0$ такое, что $F(\tilde{r}) < 0$, и $\rho > 0$ — наименьший положительный корень уравнения $F(r) = 0$, то ρ является доходностью пула инвестиционных проектов, т. е.*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{\ln(V_T)}{T} = \rho.$$

4. *Если ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$, причем ρ является простым корнем, т. е. $\left|\left\{m \middle| \sum_{j=0}^{n} a_j^m e^{-pj} = 0\right\}\right| = 1$ и $F'(\rho) \neq 0$, то существуют положительные константы $0 < c < C$ такие, что $c\, e^{\rho T} \leqslant V_T \leqslant C e^{\rho T}$.*

Альтернативной оценкой инвестиционного проекта является его внутренняя норма доходности IRR. Для инвестиционного проекта с денежными потоками $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_n)$ норма IRR определяется как $1/\hat{z}$, где $\hat{z}$ — положительный корень инвестиционного полинома $\omega(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Теорема Кантора—Липмана уточняет выбор корня для тиражируемого стационарного проекта.

2. Оператор Беллмана и оценка финансового состояния инвестора

Обозначим через $s_k(t)$ финансовое состояние инвестора в период $t + k$ при условии, что, начиная с периода t, используется только проект сохранения денег. Тогда вектор $\vec{S}(t) = \big(s_0(t), \ldots, s_{n-1}(t)\big)$ описывает результат финансовой стратегии инвестора. Обозначим через

$u_m(t)$ интенсивность проектов m-го типа, начатых в период времени t. Тогда $\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t)$. Здесь $\vec{u}(t) = \bigl(u_1(t), \dots, u_m(t)\bigr)$ — вектор интенсивностей инвестиционных проектов, начатых в период времени t, $D = (d_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ — матрица $n \times n$, такая что

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если } j = i+1, \ i = 0, \dots, n-2; \\ 1, \text{ если } i = j = n-1; \\ 0 \quad \text{иначе,} \end{cases}$$

где $B = (b_{im})_{i=1,\dots,n}^{m=1,\dots,M}$ — матрица $n \times M$ такая, что $b_{im} = \sum_{j=0}^{i} a_j^m$.

Цель инвестиционной стратегии — максимизация дохода в период времени не позднее T, т. е. оптимальная стратегия инвестиций определяется из решения задачи

$$e^{-r\tau} h\bigl(\vec{S}(\tau - n + 1)\bigr) \to \max_{0 \leqslant \tau \leqslant T, \vec{u}(t) \geqslant 0}; \tag{2.1}$$

$$\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), \quad t = 0, \dots, \tau - n; \tag{2.2}$$

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, \quad t = 0, \dots, \tau - n; \tag{2.3}$$

$$\vec{u}(t) \geqslant 0, \quad t = 0, \dots, \tau - n; \tag{2.4}$$

$$\vec{S}(0) = \vec{\xi}, \tag{2.5}$$

где $h\bigl(\vec{S}\bigr) = \begin{cases} s_{n-1}, \text{ если } \vec{S} = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^n; \\ -\infty \ \text{ иначе.} \end{cases}$

Обозначим через $W_T\bigl(\vec{\xi}, r\bigr)$ оптимальное значение функционала в задаче оптимизации (2.1)–(2.5). Функция $W_T\bigl(\vec{\xi}, r\bigr)$ оценивает начальное финансовое состояние инвестора при дефляторе r. Отметим, что построить функцию $W_T\bigl(\vec{\xi}, r\bigr)$ можно, итерируя оператор Беллмана:

$$W_{T+1}\bigl(\vec{\xi}, r\bigr) = \max\Bigl\{W_T\bigl(\vec{\xi}, r\bigr),\ e^{-r} \sup\Bigl\{W_T\bigl(D\vec{\xi} + B\vec{u}\bigr) \Bigm| \vec{u} \geqslant 0,\ \xi_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\Bigr\}\Bigr\},$$

$$W_0\bigl(\vec{\xi}, r\bigr) = h(\vec{\xi}). \tag{2.6}$$

Множество $L_T = \bigl\{\vec{\xi} \mid W_T\bigl(\vec{\xi}, r\bigr) > 0\bigr\}$ не зависит от значения дефлятора $r > 0$ и является выпуклым конусом. Заметим, что $L_T \subseteq L_{T+1}$ при $T = 0, 1, \dots$. Выпуклый конус $L_\infty = \bigcup_{T=0}^{+\infty} L_T$ будем называть *конусом ликвидных состояний*. Заметим, что конус L_∞ может быть незамкнутым (см. [11, с. 48]).

Функция

$$G_T(\vec{\xi}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \vec{\xi} \in L_T; \\ -\infty \text{ иначе} \end{cases}$$

может быть построена, итерируя оператор Беллмана

$$G_{T+1}(\vec{\xi}) = \sup\Bigl\{G_T\bigl(D\vec{\xi} + B\vec{u}\bigr) \Bigm| \vec{u} \geqslant 0,\ \xi_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\Bigr\}, \quad \text{где} \quad G_0(\vec{\xi}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \vec{\xi} \in \mathbb{R}_+^n, \\ -\infty \text{ иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что

$$G_\infty(\vec{\xi}) = \sup\Bigl\{G_\infty\bigl(D\vec{\xi} + B\vec{u}\bigr) \Bigm| \vec{u} \geqslant 0,\ \xi_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\Bigr\}, \quad \text{где} \quad G_\infty(\vec{\xi}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \vec{\xi} \in L_\infty; \\ -\infty \text{ иначе.} \end{cases}$$

Будем предполагать выполненными условия прибыльности $F(0) > 0$ и отсутствия арбитража, т. е. что существует $r > 0$ такое, что $F(r) < 0$, где $F(r)$ определяется формулой (1.7).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$.*

1. *При любых значениях $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n_+,\ r>0$ существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{T\to+\infty} W_T\big(\vec{\xi},r\big)=W_\infty\big(\vec{\xi},r\big).$$

2. *Функция $W_\infty\big(\vec{\xi},r\big)$ удовлетворяет уравнению*

$$W_\infty\big(\vec{\xi},r\big)=\max\Big\{W_\infty\big(\vec{\xi},r\big),\ e^{-r}\sup\Big\{W_\infty\big(D\vec{\xi}+B\vec{u}\big)\ \Big|\ \vec{u}\geqslant 0,\ \xi_0+\sum_{m=1}^{M}a_0^m u_m\geqslant 0\Big\}\Big\} \tag{2.7}$$

и является положительно однородной первой степени, вогнутой, монотонно неубывающей функцией по переменной $\vec{\xi}$.

3. *Если $r<\rho$, то $W_\infty\big(\vec{\xi},r\big)=+\infty$ при $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$.*

4. *Если $r>\rho$, то $W_\infty\big(\vec{\xi},r\big)=0$ при $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n_+$.*

5. *Если $0<W_\infty\big(\vec{\xi},r\big)<+\infty$ при $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$, то $r=\rho$.*

6. *Если $\Big|\Big\{m\ \Big|\sum_{j=1}^n a_j^m e^{-\rho}=0\Big\}\Big|=1$, $F'(\rho)\neq 0$, то $W_\infty\big(\vec{\xi},\rho\big)>0$ при $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$ и $W_\infty\big(\vec{\xi},\rho\big)=-\infty$ при $\vec{\xi}\notin L_\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что оператор Беллмана

$$BV\big(\vec{\xi},r\big)=e^{-r}\sup\Big\{V\big(D\vec{\xi}+B\vec{u},r\big)\ \Big|\ \vec{u}\geqslant 0,\ \xi_0+\sum_{m=1}^{M}a_0^m u_m\geqslant 0\Big\}$$

является монотонным, т. е. если для любых $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ справедливо $V_1\big(\vec{\xi},r\big)\geqslant V_2\big(\vec{\xi},r\big)$, то для любых $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ справедливо $BV_1\big(\vec{\xi},r\big)\geqslant BV_2\big(\vec{\xi},r\big)$. В силу (2.6) имеем, что $W_{T+1}\big(\vec{\xi},r\big)\geqslant W_T\big(\vec{\xi},r\big)$ для любых $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n, r>0$. Откуда следует, что для любых $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{T\to+\infty} W_T\big(\vec{\xi},r\big)=W_\infty\big(\vec{\xi},r\big).$$

Переходя к пределу в (2.6), получаем (2.7). Остальные утверждения легко следуют из теоремы Кантора — Липмана.

Теорема доказана.

Предложение 1 (см. [10; 11]). *Пусть $F(0)>0$ и ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$. Если $F(\alpha)>0$, то существует удовлетворяющая балансовым ограничениям инвестиционная стратегия экспоненциального роста с темпом $\alpha>0$ вида $u_m(t)=\hat{u}_m e^{\alpha t}$, $m=1,\dots,M$, $t=0,\dots,T-1$; $\vec{S}(t)=\hat{\vec{S}}e^{\alpha t}$, $t=1,\dots,T$,* где $\hat{\vec{S}}=(\hat{s}_0,\dots,\hat{s}_{n-1})$, $\hat{s}_0>0$. Если $\alpha>\rho$, то $\hat{\vec{S}}\notin L_\infty$, т. е. финансовые состояния $\vec{S}(t)=\hat{\vec{S}}e^{\alpha t}$ являются неликвидными. Если $0<\alpha<\rho$, то $\hat{\vec{S}}\in L_\infty$. Если $\alpha=\rho$, то $\hat{\vec{S}}\in L_\infty$ тогда и только тогда, когда ρ — корень уравнения $\zeta(r)=0$, где

$$\zeta(r)=\sum_{j=0}^{n}e^{-rj}\Big(\sum_{m=1}^{M}a_j^m\hat{u}_m\Big),\quad \frac{d\zeta(r)}{dr}\Big|_{r=\rho}<0$$

и для любого корня $r_k>\rho$ уравнения $\zeta(r)=0$ выполняется неравенство $F\left(r_k\right)>0$.

Предложение 1 показывает существенность условий (1.6) выхода из инвестиционного процесса. Если $\alpha>\rho$, $F(\alpha)>0$, то существует инвестиционная стратегия с доходностью α, превышающей ρ, однако из этого инвестиционного процесса нельзя выйти и фиксировать доход, росший с темпом α, т. е. эта стратегия является “финансовой пирамидой”.

3. Магистральные свойства дефляторов

Рассмотрим инвестиционный процесс как управляемую динамическую систему. Переход из финансовой позиции $\vec{S}(t)$ возможен лишь в финансовые позиции

$$\left\{\vec{S}(t+1)=D\vec{S}(t)+B\vec{u}(t) \;\middle|\; \vec{u}(t)\geqslant 0,\ s_0(t)+\sum_{m=1}^{M}a_0^m u_m(t)\geqslant 0\right\}.$$

Будем задавать динамическую систему с помощью многозначного отображения перехода из состояния $\vec{S}$ в состояние $\hat{\vec{S}}\in\Omega\big(\vec{S}\big)$, где

$$\Omega\big(\vec{S}\big)=\left\{\hat{\vec{S}}=D\vec{S}+B\vec{u} \;\middle|\; \vec{u}=(u_1,\dots,u_m)\geqslant 0,\ s_0+\sum_{m=1}^{M}a_0^m u_m\geqslant 0\right\}.$$

Рассмотрим вопрос о режимах сбалансированного роста с темпом $\lambda>0$.

Предложение 2. *Для того чтобы существовал вектор $\vec{\xi}\neq 0$, такой, что $\lambda\vec{\xi}\in\Omega(\vec{\xi})$, $\lambda>1$, необходимо и достаточно, чтобы λ являлось корнем полинома*

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+\lambda a_{n-1}+a_n=0,$$

где

$$a_k=\sum_{m=1}^{M}a_k^m u_m,\ k=0,\dots,n,\ \vec{u}=(u_1,\dots,u_m)\geqslant 0,\quad \vec{u}\neq 0,\quad \lambda\vec{\xi}=D\vec{\xi}+B\vec{u},\quad \xi_0=-\sum_{m=1}^{M}a_0^m u_m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений

$$\begin{aligned}
\xi_0&=a_0;\\
\lambda\xi_0&=\xi_1+(a_0+a_1)\,;\\
\lambda\xi_1&=\xi_2+(a_0+a_1+a_2)\,;\\
&\dots\\
\lambda\xi_{n-2}&=\xi_{n-1}+(a_0+a_1+\ldots+a_{n-1})\,;\\
\lambda\xi_{n-1}&=\xi_{n-1}+(a_0+a_1+\ldots+a_n)
\end{aligned}$$

эквивалентна системе

$$\xi_j=-\sum_{k=0}^{j}a_k\Big(\sum_{i=0}^{j-k}\lambda^i\Big),\quad j=0,\dots,n-1;$$

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^{n-k}=0.$$

Отсюда следует утверждение предложения 2.

Обозначим через $\omega_m(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}a_j^m\lambda^j$ инвестиционный полином m-го проекта. Положим

$$Z\big(\vec{S},\lambda\big)=s_0+(s_1-s_0)\,\lambda+(s_{n-1}-s_{n-2})\,\lambda^{n-1},\quad \text{где}\ \ \vec{S}=(s_0,\dots,s_{n-1})\,.$$

Заметим (см. [10]), что если

$$\vec{S}(t+1)=D\vec{S}(t)+B\vec{u},\quad \vec{u}=(u_1,\dots,u_m)\geqslant 0,\quad s_0(t)+\sum_{m=1}^{M}a_0^m u_m\geqslant 0,$$

то

$$\lambda Z\big(\vec{S}(t+1),\lambda\big)\leqslant Z\big(\vec{S}(t),\lambda\big)+\sum_{m=1}^{M}u_m\omega_m(\lambda). \tag{3.8}$$

Предложение 3. *Пусть ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$ и $\vec{S}(t+1) \in \Omega\bigl(\vec{S}(t)\bigr)$. Тогда*

$$e^{-\rho} Z\bigl(\vec{S}(t+1), e^{-\rho}\bigr) \leqslant Z\bigl(\vec{S}(t), e^{-\rho}\bigr), \tag{3.9}$$

причем если $e^{-\rho} Z\bigl(\vec{S}(t+1), e^{-\rho}\bigr) = Z\bigl(\vec{S}(t), e^{-\rho}\bigr)$, то

$$\{m \,|\, u_m(t) > 0\} \subseteq \bigl\{m \,\bigm|\, \omega_m\left(e^{-\rho}\right) = 0\bigr\}. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $F(\rho) = \max\left\{\omega_m\left(e^{-\rho}\right) \,|\, m = 1, \ldots, M\right\} = 0$, $u_m(t) \geqslant 0$, $m = 1, \ldots, M$, то (3.9) следует из (3.8), и обращение неравенства (3.9) в равенство возможно только при выполнении включения (3.10).

Предложение доказано.

Отметим, что $Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr)$ равняется значению функционала (2.1) на дефляторах

$$p(t) = e^{-\rho t}, \quad t = 0, \ldots, n-1,$$

и что если финансовое состояние $\vec{\xi}$ является ликвидным ($\vec{\xi} \in L_\infty$), то $Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr) > 0$. Из остроты многогранного конуса L_T (см. предположение об отсутствии арбитража) и (3.9) следует компактность множества $\Omega\bigl(\vec{S}\bigr) \cap L_T$.

Обозначим

$$\Lambda = \bigl\{m \,\bigm|\, \omega_m\left(e^{-\rho}\right) = 0\bigr\}, \quad \widehat{\Lambda} = \biggl\{m \in \Lambda \biggm| \frac{d\omega_m(\lambda)}{d\lambda}\Bigr|_{\lambda=\rho} \neq 0\biggr\}.$$

Из предложения 2 следует, что для любого $m \in \Lambda$ существует режим сбалансированного роста $\vec{\xi}^m$ с темпом e^ρ. Обозначим через $\Gamma = \mathrm{con}\bigl\{\vec{\xi}^m \bigm| m \in \Lambda\bigr\}$ их коническую оболочку.

Следствие. *Пусть ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$. Тогда*

$$e^\rho \geqslant \sup\bigl\{\alpha \,\bigm|\, \alpha\vec{\xi} \leqslant \vec{\eta},\ \vec{\eta} \in \Omega(\vec{\xi}),\ \vec{\xi} \in L_\infty\bigr\}. \tag{3.11}$$

Если $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$, то

$$e^\rho = \sup\bigl\{\alpha \,\bigm|\, \alpha\vec{\xi} \leqslant \vec{\eta},\ \vec{\eta} \in \Omega(\vec{\xi}),\ \vec{\xi} \in L_\infty\bigr\}. \tag{3.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства $\alpha\vec{\xi} \leqslant \vec{\eta}$ следует, что $\alpha Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr) \leqslant Z\left(\vec{\eta}, e^{-\rho}\right)$. Поскольку $\vec{\eta} \in \Omega(\vec{\xi})$, имеем, что $e^{-\rho} Z\bigl(\vec{\eta}, e^{-\rho}\bigr) \leqslant Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr)$. Из $\vec{\xi} \in L_\infty$ следует, что $Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr) > 0$, откуда получаем неравенство (3.11). Если $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$, то существует режим сбалансированного роста с темпом e^ρ, лежащий в конусе ликвидных состояний L_∞, и, значит, выполнено (3.12).

Отметим, что в случае, когда $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$, e^ρ является неймановским темпом роста. Условие $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$ может выполняться, только если $\widehat{\Lambda} \neq \varnothing$ (см. [11] и предложение 1).

Следствие доказано.

Обозначим через $V_T(\vec{\xi})$ функцию Беллмана для задачи

$$\begin{aligned}
&e^{-rT} h\bigl(\vec{S}(T-n+1)\bigr) \to \max_{\vec{u}(t) \geqslant 0};\\
&\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t),\ t = 0, \ldots, T-n;\\
&s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, \quad t = 0, \ldots, T-n;\\
&\vec{u}(t) \geqslant 0, \quad t = 0, \ldots, T-n;\\
&\vec{S}(0) = \vec{\xi},
\end{aligned}$$

Функция $V_T(\vec{\xi})$ является вогнутой, положительно однородной функцией, принимающей положительные значения внутри конуса L_T, и удовлетворяет уравнению Беллмана

$$V_{T+1}(\vec{\xi}) = e^{-\rho} \sup \left\{ V_T\big(D\vec{\xi} + B\vec{u}\big) \;\Big|\; \vec{u} \geqslant 0,\ \xi_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0 \right\}, \quad V_0(\vec{\xi}) = h(\vec{\xi}). \tag{3.13}$$

Решая на каждом шаге экстремальную задачу (3.13), можно построить синтез оптимального управления $\vec{u}_T(\vec{\xi})$ и вычислить функцию Беллмана на следующем шаге: $V_{T+1}(\vec{\xi}) = e^{-\rho} V_T\big(D\vec{\xi} + B\vec{u}_T(\vec{\xi})\big)$. Синтез оптимального управления позволяет построить динамическую траекторию финансовых состояний

$$\vec{S}_{t+1} = D\vec{S}_t + B\vec{u}_{T-t}\big(\vec{S}_t\big), \quad \vec{S}_0 = \vec{\xi}, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Теорема 3 (о магистрали в слабой форме). *Для любых $\varepsilon > 0$, $\vec{\xi} \in L_\infty$ существует N (не зависящее от T) такое, что траектория финансовых состояний $\big\{\vec{S}_t \mid \vec{S}_{t+1} = D\vec{S}_t + B\vec{u}_{T-t}\big(\vec{S}_t\big), \vec{S}_0 = \vec{\xi},\ t = 0, \dots, T-1\big\}$ удовлетворяет неравенству*[3]

$$\left| \left\{ t \;\Big|\; \sup_{\vec{y} \in \Gamma \cap L_\infty} \left\| \frac{1}{\|\vec{S}_t\|} \vec{S}_t - \vec{y} \right\| > \varepsilon \right\} \right| \leqslant N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем следовать схеме рассуждений, описанной в [16, с. 124]. Прежде всего заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, обладающее свойством, в силу которого соотношения

$$\vec{S} \in L_\infty, \quad \vec{\eta} \in \Omega\big(\vec{S}\big), \quad \sup_{\vec{y} \in \Gamma \cap L_\infty} \left\| \frac{1}{\|\vec{S}_t\|} \vec{S}_t - \vec{y} \right\| > \varepsilon$$

влекут неравенство $e^{-\rho} Z\big(\vec{\eta}, e^{-\rho}\big) < (1-\delta) Z\big(\vec{S}, e^{-\rho}\big)$. Действительно, в противном случае существуют последовательности $\{\vec{x}_k | k = 1, 2, \dots\}$, $\{\vec{y}_k | k = 1, 2, \dots\}$ такие, что

$$\vec{x}_k \in L_\infty, \quad \|\vec{x}_k\| = 1, \sup_{\vec{z} \in \Gamma \cap L_\infty} \|\vec{x}_k - \vec{z}\| \geqslant \varepsilon, \quad \vec{y}_k \in \Omega\left(\vec{x}_k\right),$$

$$e^{-\rho} Z\left(\vec{y}_k, e^{-\rho}\right) \geqslant \Big(1 - \frac{1}{k}\Big) Z\left(\vec{x}_k, e^{-\rho}\right), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Выберем из последовательностей $\{\vec{x}_k | k = 1, 2, \dots\}$ и $\{\vec{y}_k | k = 1, 2, \dots\}$ подпоследовательности, сходящиеся к $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответственно. Переходя к пределу, получаем

$$\sup_{\vec{w} \in \Gamma \cap L_\infty} \|\vec{x} - \vec{w}\| \geqslant \varepsilon, \tag{3.14}$$

$$\vec{y} \in \Omega(\vec{x}), \quad e^{-\rho} Z\left(\vec{y}, e^{-\rho}\right) \geqslant Z\left(\vec{y}, e^{-\rho}\right). \tag{3.15}$$

Из (3.15) следует, что $\vec{x} \in \Gamma \cap L_T$. Последнее противоречит (3.14).

Если

$$\left| \left\{ t \;\Big|\; \sup_{\vec{y} \in \Gamma \cap L_\infty} \left\| \frac{1}{\|\vec{S}_t\|} \vec{S}_t - \vec{y} \right\| > \varepsilon \right\} \right| = \theta,$$

то $Z\big(\vec{S}_T, e^{-\rho}\big) \leqslant (1-\delta)^\theta e^{\rho T} Z\big(\vec{\xi}, e^{-\rho}\big)$. Кроме того, согласно используемым обозначениям $V_T(\vec{\xi}) \leqslant e^{\rho n} Z\big(\vec{S}_T, e^{-\rho}\big)$. По теореме Кантора—Липмана справедливо неравенство $V_T(\vec{\xi}) \geqslant c e^{\rho T}$, где $c > 0$ — не зависящая от T постоянная величина. Следовательно, $c \leqslant e^{\rho n} (1-\delta)^\theta Z\big(\vec{\xi}, e^{-\rho}\big)$, откуда получаем не зависящую от T оценку сверху на величину θ.

Теорема доказана.

[3] В данном неравенстве $|A|$ означает число элементов, содержащихся в множестве A.

Условие $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$ может выполняться только, если $\widehat{\Lambda} \neq \varnothing$ (см. [11] и предложение 1). Отметим, что в случае, когда $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$, e^ρ является неймановским темпом роста. Если

$$\hat{\vec{\xi}} \in \Gamma \cap L_\infty, \quad \hat{\vec{p}} = \bigl(1 - e^{-\rho},\, e^{-\rho} - e^{-2\rho},\, \ldots, e^{-\rho(n-2)} - e^{-\rho(n-1)},\, e^{-\rho(n-1)}\bigr),$$

то тройка $\bigl(e^\rho, \bigl(\hat{\vec{\xi}}, e^\rho \hat{\vec{\xi}}\bigr), \hat{\vec{p}}\bigr)$ является неймановским состоянием равновесия (см. [16, с. 104]), т. е. $e^\rho \vec{\xi}^m \in \Omega\bigl(\vec{\xi}^m\bigr)$ и для любых $\bigl(\vec{S}, \hat{\vec{S}}\bigr)$ таких, что $\hat{\vec{S}} \in \Omega\bigl(\vec{S}\bigr)$, справедливо $\hat{\vec{p}}\hat{\vec{S}} \leqslant e^\rho \hat{\vec{p}}\vec{S}$.

Это замечание с учетом магистрального свойства может служить оправданием использования $e^{-\rho}$ в качестве дефлятора финансовых потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fisher I.** The rate of interest. N Y: Macmillan Co., 1907. 442 p.
2. **Fisher I.** The theory of interest. N Y: Macmillan Co., 1930. 566 p.
3. **Hirshleifer J.** On the theory of optimal decision // J. Political Economy. 1958. Vol. 66, no. 4. P. 229–239. doi: 10.1086/258057 .
4. **Solow R.M.** Capital theory and the rate of return. Amsterdam: North Holland Press, 1963. 98 p.
5. **Gale D.** On the theory of interest // The American Math. Monthly. 1983. Vol. 80, no 8. P. 853–868. doi: 10.2307/2319391 .
6. **Dorfman R.** The meaning of internal rates of return // J. Finance. 1981. Vol. 36, no. 5. P. 1011–1021. doi: 10.1111/j.1540-6261.1981.tb01072.x .
7. **Cantor D.G., Lipman S.A.** Investment selection with imperfect capital markets // Econometrica. 1983. Vol. 51, no. 4. P. 1121–1144. doi: 10.2307/1912055 .
8. **Cantor D.G., Lipman S.A.** Optimal investment selection with a multitude of projects // Econometrica. 1995. Vol. 63, no. 5. P. 1231–1240. doi: 10.2307/2171729 .
9. **Adler L., Gale D.** Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy // Mathematical Finance. 1997. Vol. 7, no. 1. P. 73–81. doi: 10.1111/1467-9965.00023 .
10. **Sonin I.M.** Growth rate, internal rates of return and tunpikes in investment model // Econ. Theory. 1995. Vol. 5, no. 3. P. 383–400. doi: 10.1007/BF01212325 .
11. **Presman E.L., Sonin I.M.** Growth rate, internal rates of return and financial bubbles. M.: ЦЭМИ РАН, 2000. 33 p.
12. **Беленький В.З.** Экономическая динамика: анализ инвестиционных проектов в рамках линейной модели Неймана—Гейла. М.: ЦЭМИ РАН, 2002. 78 с.
13. **Ващенко М.П.** Оценка доходности инвестиционных проектов в условиях неопределенности // Мат. моделирование. 2009. Т. 21, № 3. С. 18–30.
14. **Ващенко М.П., Шананин А.А.** Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени // Мат. моделирование. 2012. Т. 24, № 3. С. 70–86.
15. **Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh.** Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time // Lobachevskii J. Math. 2018. Vol. 39, no. 7. P. 929–935. doi: 10.1134/S1995080218070181 .
16. **Рубинов А.М.** Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономическим задачам. Л.: Наука, 1980. 166 с.

Поступила 10.10.2019
После доработки 30.10.2019
Принята к публикации 11.11.2019

Шананин Александр Алексеевич
чл.-корр. РАН, профессор, д-р физ.-мат. наук
зав. кафедрой анализа систем и решений
Московский физико-технический институт (научно-исследовательский университет)
г. Москва
e-mail: alexshan@yandex.ru

REFERENCES

1. Fisher I. *The rate of interest.* N Y: Macmillan Co., 1907, 442 p.
2. Fisher I. *The theory of interest.* N Y: Macmillan Co., 1930, 566 p.
3. Hirshleifer J. On the theory of optimal investment decision. *J. Political Economy*, 1958, vol. 66, no. 4, pp. 329–352. doi: 10.1086/258057 .
4. Solow R.M. *Capital theory and the rate of return.* Amsterdam: North Holland Press, 1963, 98 p.
5. Gale D. On the theory of interest. *The American Mathematical Monthly.* 1973, vol. 80, no. 8, pp. 853–868. doi: 10.2307/2319391 .
6. Dorfman R. The meaning of internal rates of return. *J. Finance*, 1981, vol. 36, no. 5, pp. 1011–1021. doi: 10.1111/j.1540-6261.1981.tb01072.x .
7. Cantor D.G., Lipman S.A. Investment selection with imperfect capital markets. *Econometrica*, 1983, vol. 51, no. 4, pp. 1121–1144. doi: 10.2307/1912055 .
8. Cantor D.G., Lipman S.A. Optimal investment selection with a multitude of projects. *Econometrica*, 1995, vol. 63, no. 5, pp. 1231–1240. doi: 10.2307/2171729 .
9. Adler L., Gale D. Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy. *Math. Finance*, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 73–81. doi: 10.1111/1467-9965.00023 .
10. Sonin I.M. Growth rate, internal rates of return and turnpikes in an investment model. *Econ. Theory*, 1995, vol. 5, no. 3, pp. 383–400. doi: 10.1007/BF01212325 .
11. Presman E.L., Sonin I.M. *Growth rate, internal rates of return and financial bubbles.* Moscow: TsEMI RAN Publ., 2000, 33 p. ISBN: 5-8211-0122-0 .
12. Belen'kii V.Z. *Ekonomicheskaya dinamika: analiz investitsionnykh proektov v ramkakh lineinoi modeli Neimana–Geila* [Economic dynamics: an analysis of investment projects in the framework of the von Neumann–Gale linear model]. Moscow: TsEMI RAN Publ., 2002, 78 p. ISBN: 5-8211-0212-X .
13. Vashchenko M.P. Investment projects yield estimation under uncertainty. *Math. Models Comput. Simul.*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 33–45. doi: 10.1134/S2070048210010047 .
14. Vashchenko M.P., Shananin A.A. The estimation of the yield of the pool of investment projects in the optimal invetsing problem for continuous time. *Math. Models Comput. Simul.*, 2012, vol. 4, no. 5, pp. 497–508. doi: 10.1134/S2070048212050092 .
15. Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh. Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time. *Lobachevskii J. Math.*, vol. 39, no. 7, pp. 929–935. doi: 10.1134/S1995080218070181 .
16. Rubinov A.M. *Superlineinye mnogoznachnye otobrazheniya i ikh prilozheniya k ekonomicheskim zadacham* [Superlinear many-valued mappings and their application to economical-mathematical problems]. Leningrad: Nauka Publ., 1980, 166 p.

Received October 10, 2019
Revised October 30, 2019
Accepted November 11, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10246).

Aleksandr Alekseevich Shananin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, 141701 Russia,
e-mail: alexshan@yandex.ru .

Cite this article as: A. A. Shananin. Mathematical modeling of investments at an imperfect capital market, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 265–274 .